حدّ: تعریف حدّ تابع

(قسمت اوّل)

◆ احمد قندهاری

۱ـ۱. تغییرات $|x|$ وقتی x در فواصل مختلف واقع باشد.

فرض می‌کنیم: $a,b \in R$ و $0<a<b$

۱: اگر $a<x<b \Rightarrow a<|x|<b$

مثال: اگر $2<x<5 \Rightarrow 2<|x|<5$

۲: اگر $-b<x<-a \Rightarrow a<|x|<b$

مثال: اگر $-5<x<-2 \Rightarrow 2<|x|<5$

۳: اگر $-a<x<b \Rightarrow \begin{cases} 0\le x<b \Rightarrow 0\le |x|<b \\ \text{یا} \\ -a<x<0 \Rightarrow 0<|x|<a \end{cases} \Rightarrow 0\le |x|<b$

مثال: اگر $-2<x<5 \Rightarrow \begin{cases} 0\le x<5 \Rightarrow 0\le |x|<5 \\ -2<x<0 \Rightarrow 0<|x|<2 \end{cases} \Rightarrow 0\le |x|<5$

۴: اگر $-b<x<a \Rightarrow \begin{cases} 0\le x<a \Rightarrow 0\le |x|<a \\ -b<x<0 \Rightarrow 0<|x|<b \end{cases} \Rightarrow 0\le |x|<b$

مثال: اگر $-6<x<2 \Rightarrow \begin{cases} 0\le x<2 \Rightarrow 0\le |x|<2 \\ -6<x<0 \Rightarrow 0<|x|<6 \end{cases} \Rightarrow 0\le |x|<6$

۱ـ۲ همسایگی: فرض می‌کنیم: $a\in R$ و $r\in R^+$

داریم:

۱: $|x|<r \Rightarrow -r<x<r$

مثال: $|x|<2 \Rightarrow -2<x<2$

۲: $|x-a|<r \Rightarrow -r<x-a<r$ یا $a-r<x<a+r$

بنا به‌تعریف، مجموعهٔ اعدادی مانند x که در نامساوی $a-r<x<a+r$ صدق می‌کند، یک همسایگی به مرکز (a) و شعاع (r) است که آن را به‌صورت $N(a,r)$ هم نشان می‌دهند.

مثال: $|x-3|<1 \Rightarrow -1<x-3<1$ یا $2<x<4$

مجموعهٔ اعدادی مانند x که در نامساوی $2<x<4$ صدق می‌کند یک همسایگی به مرکز (۳) و شعاع (۱) است. یا $N(3,1)$.

اگر $a-r<x<a+r$ و $x\neq a$، آنگاه این فاصله را یک همسایگی بدون مرکز به مرکز a و شعاع r گوییم. گاهی این همسایگی را محذوف نیز گویند. (کلمهٔ محذوف در این‌جا یعنی؛ مرکز همسایگی حذف شده است.)

مثال: اگر $2<x<4$ و $x\neq 3$، آنگاه این فاصله را یک همسایگی بدون مرکز یا محذوف گوییم.

فرض کنید $x\to a$ و عدد a را مرکز همسایگی به شعاع r در نظر بگیریم. بعداً خواهیم گفت که x هیچ‌وقت به a نمی‌رسد پس همسایگی $a-r<x<a+r$ بدون مرکز باید باشد.

مثال:

$$\begin{cases} x\to 2 \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow 2-1<x<2+1 \quad \text{یا} \quad 1<x<3,\ x\neq 2$$

فاصلهٔ (۳ و ۱) را یک همسایگی بدون مرکز، به مرکز (۲) و شعاع (۱) گوییم.

قرارداد: اعداد مثبت فوق‌العاده کوچک را با α یا β یا ε یا σ نشان می‌دهیم و اعداد مثبت فوق‌العاده بزرگ را با M یا N نشان می‌دهیم.

۱ـ۳. فرض کنیم $x\to 2$ یا حدّ x عدد (۲) باشد، در این‌صورت x ضمن تغییرات به عدد (۲) از دو طرف نزدیک می‌شود.

الف: $x = 1/9$ و $1/99$ و $1/999$ و $1/9999$ و ...

ب: $x = 2/1$ و $2/01$ و $2/001$ و $2/0001$ و ...

در قسمت الف: هرقدر تعداد (۹) های عدد اعشاری ۱/۹۹۹۹ را اضافه کنیم، اعداد حاصل به عدد (۲) نزدیکتر می‌شوند ولی هیچ‌وقت به (۲) نمی‌رسند.

در قسمت ب: هرقدر تعداد صفرهای بعداز ممیز و قبل از (۱) عدد اعشاری ۲/۰۰۰۱ را زیادتر کنیم اعداد حاصل به عدد (۲) نزدیکتر می‌شوند ولی هیچ‌وقت به عدد (۲) نمی‌رسند.

بنابراین وقتی $x \to ۲$ یا حدّ x برابر (۲) باشد حتماً $x \neq ۲$.

۴ـ۱. تعریف حدّ متغیر x: حدّ متغیر x عدد (a) است هرگاه $|x-a|$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر باشد ($x \to a$ پس $x \neq a$ و $|x-a| > ۰$) یعنی؛ اگر $x \to a \Rightarrow ۰ < |x-a| < \sigma$

سؤال: اگر $x \to ۲$، نشان دهید $۰ < |x-۲| < \frac{۱}{۱۰۰۰}$

جواب: اگر به قسمت (۳ـ۱) درس برگردیم چنانچه در وضع الف، $x = ۱/۹۹۹۹$ و در وضع ب: $x = ۲/۰۰۰۱$ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$|x-۲| = \left|\begin{array}{c} ۱/۹۹۹۹-۲ \\ \text{یا} \\ ۲/۰۰۰۱-۲ \end{array}\right| = \frac{۱}{۱۰۰۰۰} < \frac{۱}{۱۰۰۰}, \quad x \neq ۲$$

$$\Rightarrow ۰ < |x-۲| < \frac{۱}{۱۰۰۰}$$

پس همواره می‌توان نوشت:

اگر $x \to a \Rightarrow ۰ < |x-a| < \sigma$

اگر $x \to ۲ \Rightarrow ۰ < |x-۲| < \sigma$

اگر $x \to ۴ \Rightarrow ۰ < |x-۴| < \sigma$

اگر $x \to -۳ \Rightarrow ۰ < |x+۳| < \sigma$

اگر $x \to ۰ \Rightarrow ۰ < |x| < \sigma$

۵ـ۱. تابع f به معادله $f(x) = ۳x + ۱$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم x به‌سمت عدد (۲) میل کند.

x را به‌عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم که f(x) به چه عددی نزدیک می‌شود. جدول زیر را برای این منظور تنظیم کرده‌ایم.

x	$f(x) = ۳x + ۱$	x	$f(x) = ۳x + ۱$
۱/۹	۶/۷	۲/۱	۷/۳
۱/۹۹	۶/۹۷	۲/۰۱	۷/۰۳
۱/۹۹۹	۶/۹۹۷	۲/۰۰۱	۷/۰۰۳
۱/۹۹۹۹	۶/۹۹۹۷	۲/۰۰۰۱	۷/۰۰۰۳
۱/۹۹۹۹۹	۶/۹۹۹۹۷	۲/۰۰۰۰۱	۷/۰۰۰۰۳

به‌طوری‌که جدول نشان می‌دهد وقتی x به عدد (۲) خیلی نزدیک می‌شود آنگاه، f(x) به عدد (۷) نزدیکتر می‌شود.

به‌نظر می‌آیدکه وقتی $x \to ۲$، آنگاه: حدِّ f(x) برابر (۷) است ولی نمی‌توان به‌طور قاطع گفت که وقتی $x \to ۲$، حدِّ f(x) برابر (۷) است زیرا نمی‌توان مطمئن بود برای مقادیری که در جدول آورده نشده است وضع چه خواهد شد.

این ادعاکه وقتی $x \to ۲$، آنگاه (حد $f(x) = ۷$) نیاز به یک استدلال ریاضی دارد.

از جدول داده شده نتایج زیر به دست می‌آید.

اگر $|x-۲| < ۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۷| < ۰/۳$

اگر $|x-۲| < ۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷| < ۰/۰۳$

اگر $|x-۲| < ۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷| < ۰/۰۰۳$

اگر $|x-۲| < ۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷| < ۰/۰۰۰۳$

اگر $|x-۲| < ۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷| < ۰/۰۰۰۰۳$

ملاحظه می‌کنیم که اگر بخواهیم $|f(x)-۷| < ۰/۰۰۰۰۳$ باید $|x-۲| < ۰/۰۰۰۰۱$.

اگر بخواهیم $|f(x)-۷| < ۰/۰۰۰۳$ باید $|x-۲| < ۰/۰۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۷| < ۰/۰۰۳$ باید $|x-۲| < ۰/۰۰۱$

و...

دوباره تابع f به معادله $f(x) = ۳x + ۱$ را وقتی $x \to ۲$ را در نظر بگیریم به گفتگوی جالب بین f(x) و x توجه کنید.

f(x) بـه x می‌گوید: می‌خواهم به عدد (۷) آن‌قدر نزدیک شوم تا $|f(x)-۷|$ کوچکتر از (۰/۰۰۳) شود. تو چه‌قدر باید به عدد (۲) نزدیک شوی؟ x می‌گوید اگر $|f(x)-۷|$ بخواهد کوچکتر از (۰/۰۰۳) باشد، من‌باید به‌عدد (۲) آن‌قدرنزدیک‌شوم تا $|x-۲|$ کوچکتر از (۰/۰۰۱) شود. دوباره f(x) به x می‌گوید: می‌خواهم به عدد (۷) آن‌قدر نزدیک شوم تا $|f(x)-۷|$ کوچکتر از (۰/۰۰۰۳) شود. تو چه‌قدر باید به عدد (۲) نزدیک شوی؟ x می‌گوید اگر $|f(x)-۷|$ بخواهد کوچکتر از (۰/۰۰۰۳) باشد، من باید به عدد (۲) آن‌قدر نزدیک شوم تا $|x-۲|$ کوچکتر از (۰/۰۰۰۱) شود. به‌همین ترتیب برای هر خواست f(x)، x باید شرایط مناسب این خواست را ایجاد کند.

۶ـ۱. تعریف حدّ تابع: فرض می‌کنیم f(x) در فاصله‌ای شامل (a) تعریف شده باشد (ممکن است f(x) در خود (a) تعریف نشده باشد).

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon>0$ داده‌شده، عدد مثبتی مانند σ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\underbrace{0<|x-a|<\sigma}_{\text{گزارهٔ مقدم}} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-b|<\varepsilon}_{\text{گزارهٔ تالی}}$$

تعریف فوق را به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\ \exists\sigma>0:\ \underbrace{0<|x-a|<\sigma}_{\text{گزارهٔ مقدم}} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-b|<\varepsilon}_{\text{گزارهٔ تالی}}\ \ (I)}$$

در این‌جا $f(x)$ می‌گوید می‌خواهم به عدد (b) آن‌قدر نزدیک شوم تا $|f(x)-b|$ از (ε) کوچکتر شود. با حل مسأله تعیین کنید برای این خواست $f(x)$، x را چه‌قدر باید به عدد (a) نزدیک کنیم. رابطهٔ (I) را استلزام منطقی گویند. همان طوری‌که می‌دانید، به گزارهٔ شرطی همیشه درست استلزام منطقی گویند.

گزاره $0<|x-a|<\sigma$ را گزارهٔ مقدّم و گزارهٔ $|f(x)-b|<\varepsilon$ را گزارهٔ تالی گوییم.

باید قسمت $|f(x)-b|<\varepsilon$ را حل کرد تا به قسمت $|x-a|<\sigma$ رسید. منظور از حل کردن پیدان کردن (σ) برحسب (ε) است، پس از پیدا کردن (σ) باید نشان دهیم؛ از گزارهٔ $|x-a|<\sigma$ می‌توان گزارهٔ $|f(x)-b|<\varepsilon$ را نتیجه گرفت. معمولاً به این قسمت حل می‌گویند برگشت پذیری مسأله.

مسأله ۱ : با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 2}(3x+1)=7$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، دست‌کم یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\text{اگر}\quad \underbrace{0<|x-2|<\sigma}_{p} \Rightarrow \underbrace{|3x+1-7|<\varepsilon}_{b}$$

$$\text{اگر}\ |3x+1-7|<\varepsilon \Rightarrow |3x-6|<\varepsilon \Rightarrow 3|x-2|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$$

با مقایسهٔ این رابطه با گزارهٔ مقدّم (p)، ملاحظه می‌کنیم: $\sigma=\frac{\varepsilon}{3}$

حال اگر $\varepsilon=0/03$، آنگاه $\sigma=0/01$، اگر $\varepsilon=0/003$، آنگاه $\sigma=0/001$، اگر $\varepsilon=0/0003$، آنگاه $\sigma=0/0001$

پس به‌ازای هر $\varepsilon>0$، یک $\sigma>0$ به‌دست آمده است.

دقّت کنید، اگر $\sigma\le\frac{\varepsilon}{3}$ باشد باز هم درست است و جواب کاملتری است. حال برگشت‌پذیری مسأله را بررسی می‌کنیم:

$$\text{اگر}\ |x-2|<\sigma\ \text{و}\ \sigma\le\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x-2|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |3x-6|<\varepsilon \Rightarrow |3x+1-7|<\varepsilon$$

توجه:

اگر در حلّ مسائل تعریف حدّ تابع، درست استدلال کنیم، حل ما می‌تواند شامل برگشت‌پذیری باشد. یا به عبارت دیگر باید برگشت‌پذیری مسأله در حل مُستتر باشد. به مسائل زیر دقت کنید:

مسألهٔ ۲: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-5x)=-4$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon>0$ دست کم یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\text{اگر}\ 0<|x-1|<\sigma \Rightarrow |x^2-5x+4|<\varepsilon$$
$$\text{اگر}\ |x^2-5x+4|<\varepsilon \Rightarrow |(x-1)(x-4)|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-1|\times|x-4|<\varepsilon$$

در این‌جا فاصلهٔ همسایگی را مطرح می‌کنیم و کران بالای $|x-4|$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases}x\to 1\\ r=1\end{cases} \Rightarrow 0<x<2$$
$$\begin{array}{c}-4\quad -4\quad -4\\ \hline -4<x-4<-2\end{array} \Rightarrow 2<|x-4|<4$$

عدد (۴) از $|x-4|$ در این شرایط بزرگتر است. این عدد را کران بالای $|x-4|$ می‌گوییم. پس عبارت $|x-1|\times 4$ از عبارت $|x-1|\times|x-4|$ بزرگتر است.

حال می‌توان گفت؛ اگر عبارت بزرگتر از ε کمتر باشد، مسلماً عبارت کوچکتر هم از ε کمتر خواهد شد. یعنی:

$$\text{اگر}\ |x-1|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x-4|<\varepsilon$$

همین رابطهٔ برگشت‌پذیری را مسلّم می‌کند.

$$\Rightarrow |x-1|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$$

با مقایسهٔ این رابطه با گزارهٔ مقدم استلزام منطقی داریم: $\sigma=\frac{\varepsilon}{4}$ یا $\sigma\le\frac{\varepsilon}{4}$

از طرفی چون شعاع همسایگی را عدد (۱) انتخاب کردیم، پس $0<\sigma\le 1$

بنابراین بهتر است بنویسیم: $\sigma = \text{Min}\{1,\frac{\varepsilon}{4}\}$. اگر $\frac{\varepsilon}{4}$ بیشتر از (۱) باشد آنگاه $\sigma = 1$ در غیراین‌صورت $\sigma \le \frac{\varepsilon}{4}$.

توجه (۱): به طوری‌که ملاحظه شد جواب مسأله یعنی؛ $\sigma \le \frac{\varepsilon}{4}$ به مقدار شعاع همسایگی بستگی دارد. اگر در این مسأله شعاع همسایگی را عددی مانند ($\frac{1}{2}$) انتخاب می‌کردیم آنگاه برای σ جواب: $\sigma \le \frac{2\varepsilon}{7}$ به دست می‌آمد.

توجه (۲): اگر به نوع حل مسأله (۲) دقت کنیم، برگشت‌پذیری مسأله در آن مستتر است و نیازی به حلّ عملی برگشت‌پذیری نیست.

مسألهٔ ۳: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\,(x^4+x-1)=17 \\ x\to 2 \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon > 0$، دست‌کم یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به‌طوری که

اگر $0<|x-2|<\sigma \Rightarrow |x^4+x-1-17|<\varepsilon$

$|x^4+x-18|<\varepsilon$

می‌دانیم عبارت (x^4+x-18) باید تجزیه شود، یکی از دو عامل تجزیه $(x-2)$ است پس این عبارت را بر $(x-2)$ تقسیم می‌کنیم تا تجزیه شود.

$$\begin{array}{l|l} x^4+x-18 & x-2 \\ \hline 0 & x^3+2x^2+4x+9 \end{array}$$

$\Rightarrow |x^4+x-18|<\varepsilon \Rightarrow |(x-2)(x^3+2x^2+4x+9)|<\varepsilon$

$\Rightarrow |x-2|\times|x^3+2x^2+4x+9|<\varepsilon$

در این‌جا فاصلهٔ همسایگی را مطرح می‌کنیم و کران بالای (x^3+2x^2+4x+9) را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\to 2 \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow 1<x<3$$

می‌خواهیم کران بالای (x^3+2x^2+4x+9) را پیدا کنیم. اگر فرض کنیم $y=x^3+2x^2+4x+9$ آنگاه $y'=3x^2+4x+4$ و معادله $y'=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد و تابع y اکیداً صعودی است بنابراین: کران بالای این تابع با شرط $1<x<3$ وقتی پیدامی‌شود که به‌جای x عدد (۳) را قراردهیم. درنتیجه کران‌بالای آن (۶۶) می‌شود:

اگر $|x-2|\times 66<\varepsilon \Rightarrow |x-2|\times|x^3+2x^2+4x+9|<\varepsilon$

$\Rightarrow |x-2|\times 66<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{66}$

با مقایسهٔ این رابطه باگزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌شود:

$\sigma = \text{Min}\,\{1 \text{ و } \frac{\varepsilon}{66}\}$

مسأله ۴: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\,(\frac{1}{x})=2 \\ x\to \frac{1}{2} \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon>0$ دست‌کم یک عدد مثبت σ وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $0<|x-\frac{1}{2}|<\sigma \Rightarrow |\frac{1}{x}-2|<\varepsilon$

$$|\frac{1}{x}-2|<\varepsilon \Rightarrow |\frac{1-2x}{x}|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-2(x-\frac{1}{2})}{x}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow 2\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-\frac{1}{2}|\times\frac{2}{|x|}<\varepsilon$$

حال همسایگی به مرکز $\frac{1}{2}$ و شعاع ($\frac{1}{4}$) را در نظر می‌گیریم و کران پایین $|x|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\to \frac{1}{2} \\ r=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}<|x|<\frac{3}{4}$$

کران پایین $|x|$ ، ($\frac{1}{4}$) است.

اگر $|x-\frac{1}{2}|\times\frac{2}{\frac{1}{4}}<\varepsilon \Rightarrow |x-\frac{1}{2}|\times\frac{2}{|x|}<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-\frac{1}{2}|\times 8<\varepsilon \Rightarrow |x-\frac{1}{2}|<\frac{\varepsilon}{8}$$

با مقایسهٔ این رابطه باگزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌شود:

$\sigma = \text{Min}\,\{1,\frac{\varepsilon}{8}\}$

مسألهٔ ۵: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\,\frac{x^2-2}{x-2}=7 \\ x\to 3 \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$ دست‌کم یک عدد مثبتی مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $0<|x-3|<\sigma \Rightarrow |\frac{x^2-2}{x-2}-7|<\varepsilon$

$$|\frac{x^۲-۲}{x-۲}-۷|<\varepsilon \Rightarrow |\frac{x^۲-۷x+۱۲}{x-۲}|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |\frac{(x-۳)(x-۴)}{x-۲}|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}<\varepsilon$$

حال همسایگی به مرکز (۳) و شعاع ($\frac{۱}{۲}$) را در نظر می‌گیریم و کران بالای $|x-۴|$ و کران پایین $|x-۲|$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} x\to ۳ \\ r=\frac{۱}{۲}\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲} \\ -۴\quad -۴\quad -۴ \\ \hline -\frac{۳}{۲}<x-۴<-\frac{۱}{۲} \end{array} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<|x-۲|<\frac{۳}{۲}$$

$$\begin{array}{c} \frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲} \\ -۲\quad -۲\quad -۲ \\ \hline \frac{۱}{۲}<x-۲<\frac{۳}{۲} \end{array} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<|x-۲|<\frac{۳}{۲}$$

کران بالای $|x-۴|$، $\frac{۳}{۲}$ و کران پایین $|x-۲|$، ($\frac{۱}{۲}$) است. توجه کنید، عبارت $|x-۳|\times\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}$ از عبارت $|x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}$ بزرگتر است. حال می‌نویسیم:

اگر $|x-۳|\times\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}<\varepsilon \Rightarrow |x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-۳|\times ۳<\varepsilon \Rightarrow |x-۳|<\frac{\varepsilon}{۳}$$

با مقایسهٔ این رابطه با گزاره مقدّم نتیجه می‌شود: $\sigma = \text{Min}\{\frac{۱}{۲},\frac{\varepsilon}{۳}\}$

مسالهٔ ۶: به کمک تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to ۱}\sqrt{x^۲-۳x+۳}=۱$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon>۰$، دست‌کم عدد مثبتی مانند σ وجود دارد به‌طوری که

اگر $۰<|x-۱|<\sigma \Rightarrow |\sqrt{x^۲-۳x+۳}-۱|<\varepsilon$

عبارت داخل قدر مطلق را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$|\sqrt{x^۲-۳x+۳}-۱|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(\sqrt{x^۲-۳x+۳}-۱)\times\frac{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |\frac{x^۲-۳x+۲}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}|<\varepsilon \Rightarrow |\frac{(x-۱)(x-۲)}{\underbrace{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}_{\text{مثبت است}}}|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-۱|\times\frac{|x-۲|}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}$$

همسایگی به مرکز (۱) و شعاع (۱) را در نظر می‌گیریم. و کران بالای $|x-۲|$ و کران پایین عبارت $(\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱)$ رامحاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} x\to ۱ \\ r=۱\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} ۰<x<۲ \\ -۲\quad -۲\quad -۲ \\ \hline -۲<x-۲<۰ \end{array} \Rightarrow ۰<|x-۲|<۲$$

عدد (۲) کران بالای $|x-۲|$ است.

در مورد کران پایین $\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱$ باید نکاتی را رعایت کنیم. عبارت $x^۲-۳x+۳$ به ازاء $x=\frac{۳}{۲}$ که در فاصله همسایگی $۰<x<۲$ هم واقع است و جواب مشتق عبارت $(x^۲-۳x+۳)$ است کمترین مقدار را دارد.

$$x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\sqrt{x^۲-۳x+۳}=\sqrt{\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۲}+۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

کران پایین عبارت $\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱$ وقتی $۰<x<۲$ باشد برابر $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱)$ است.

توجه کنید که عبارت $|x-۱|\times\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱}$ از عبارت $|x-۱|\times\frac{|x-۲|}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}$ بزرگتر است حال می‌گوییم:

اگر $|x-۱|\times\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱}<\varepsilon\Rightarrow|x-۱|\times\frac{|x-۲|}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}<\varepsilon$

$$\Rightarrow|x-۱|\times\frac{۴}{\sqrt{۳}+۲}<\varepsilon\Rightarrow|x-۱|<\frac{(\sqrt{۳}+۲)\varepsilon}{۲}$$

با مقایسهٔ این رابطه با گزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$\sigma=\text{Min}[۱,\frac{(\sqrt{۳}+۲)\varepsilon}{۲}]$$

ادامه دارد