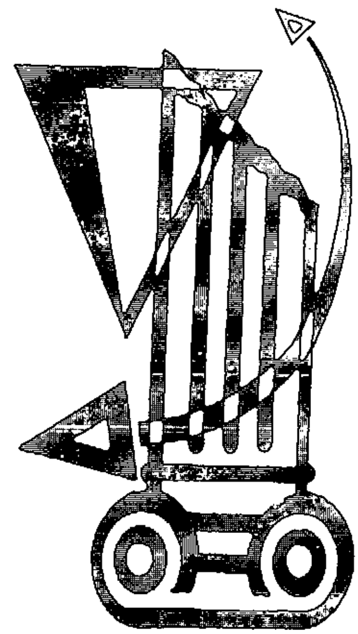


حد

(قسمت دوّم)

◄ احمد قندهاری

(با توجه به محدوده کتاب حسابان (۱) نظام جدید)

◄ حدّ چپ

مثال (۸): تابع به معادله $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\neq ۱ \\ ۳ & x=۱ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

مقادیر $f(x)$ را به ازاء $x<۱$ و در نزدیکی عدد (۱) محاسبه می‌کنیم و نتیجه را در جدول زیر می‌نویسیم

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹
f(x)	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹

در این جدول مشاهده می‌شود وقتی x (از مقادیر کوچکتر از (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر می شود، مقدار f(x) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود.

حال اگر به طریقه دیگر به این جدول نگاه کنیم و ابتدا مقادیر f(x) را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که مقادیر f(x) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x (از مقادیر کوچکتر (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر شود.

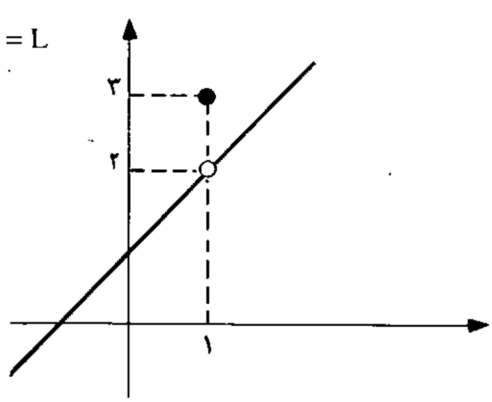
می توانیم مقادیر f(x) را به هر اندازه دلخواه به عدد (۲) نزدیک کنیم.به شرطی که x را به اندازهٔ کافی از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) نزدیک کنیم. پس به طریقه شهودی می‌توان گفت که حدّ چپ تابع وقتی x، از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) نزدیک می‌شود برابر عدد (۲) است و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد}\ f(x)=۲ \\ x\to ۱^- \end{cases}$$

◄ نتیجه شهودی حدّ چپ تابع:

فرض کنیم تابع f به معادله f(x) در بازه (a,x_0) تعریف شده باشد. عدد L را حدّ چپ تابع در نقطه x_0 می‌نامیم اگر بتوان مقدار f(x) را به هر اندازه دلخواه به عدد L نزدیک کرد به شرطی که عدد مثبت (x_0-x) را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم. می نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد}\ f(x)=L \\ x\to x_0^- \end{cases}$$



◄ تعریف ریاضی حدّ چپ تابع:

فرض می کنیم تابع f به معادله f(x) در بازه (a,x_0) تعریف شده باشد. عدد L را حدّ چپ تابع f در نقطه x_0

می‌نامیم، اگر برای هر عدد مثبت (ε) عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد. به طوری که:

$0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

دوباره به مثال (۸) برمی‌گردیم. و سؤال زیر را مطرح می‌کنیم.

سؤال: می‌خواهیم مقدار f(x) آنقدر به عدد (۲) نزدیک شود که $|f(x)-2|$ از $\frac{1}{100}$ کوچکتر باشد. در این صورت x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) چقدر باید نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-2|<\frac{1}{100} \Rightarrow |x+1-2|<\frac{1}{100} \Rightarrow |x-1|<\frac{1}{100}$$

چون $x \to 1^- \Rightarrow |x-1| = 1-x$

$\Rightarrow 0 < 1-x < \frac{1}{100}$

ملاحظه می‌شود که x را باید از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) آن قدر نزدیک کنیم که $(x-1)$ از $\frac{1}{100}$ کوچکتر باشد.

حال همین سؤال را کلّی‌تر مطرح می‌کنیم.

سؤال: می‌خواهیم مقدار f(x) را به عدد (۲) آن قدر نزدیک کنیم تا $|f(x)-2|$ از عدد مثبت‌فوق‌العاده کوچک (ε)، کوچکتر شود در این صورت x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) چقدر باید نزدیک کرد.

جواب: می‌نویسیم:

$|f(x)-2|<\varepsilon \Rightarrow |x+1-2|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\varepsilon$

چون $x \to 1^- \Rightarrow |x-1| = 1-x$

$\Rightarrow 0 < 1-x < \varepsilon \Rightarrow \delta \le \varepsilon$

پس باید x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) به اندازه ε یا مقادیر کوچکتر از (ε) نزدیک کنیم.

یا می‌توان گفت باید x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) آنقدر نزدیک کرد تا $(x-1)$ از ε کمتر باشد.

مثال (۹): تابع f به معادله

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x>1 \\ 1-x^2 & x<1 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم.

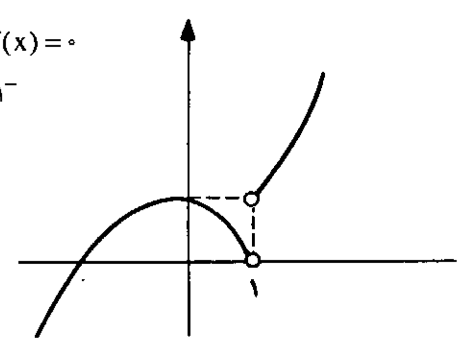
می‌خواهیم حدّ چپ این تابع را وقتی x از مقادیر کوچکتر از (۱) به عدد (۱) نزدیک می‌شود به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و f(x)) بررسی و تعیین کنیم. برای این کار جدول زیر را می‌نویسیم.

x	۰	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹
f(x)	۱	۰/۷۵	۰/۳۶	۰/۱۹	۰/۱۲	۰/۰۱

به طوری که در این جدول ملاحظه می‌شود، وقتی x از **طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱)** نزدیک و نزدیکتر **می‌شود، مقدار f(x) به عدد صفر** نزدیک و نزدیکتر می شود.

به بیان دیگر، اگر مقادیر f(x) را درنظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم، **که مقادیر f(x) را می‌توان به هر اندازه دلخواه به صفر** نزدیک کرد به شرطی که x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) به اندازه کافی نزدیک کنیم پس می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد } f(x) = 0 \\ x \to 1^- \end{cases}$$



تمرین ۱: مسایل زیر را هم به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و f(x)) و هم با تعریف ریاضی حدّ چپ تابع بررسی و حل کنید.

$$\begin{cases} \text{حد } (-4x+2) = 2 \\ x \to 0^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (2x+1) = 3 \\ x \to 1^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } \dfrac{x^2-4}{|x-2|} = -4 \\ x \to 2^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } \sqrt{1-x} = 0 \\ x \to 1^- \end{cases}$$

تمرین ۲: به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و $f(x)$) حدّ چپ توابع به معادلات زیر را بررسی کنید و حدس بزنید.

$$\begin{cases} \text{حد}\ ([x]+[-x]) \\ x \to ۲^- \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{حد}\ ([x]-۱) \\ x \to ۱^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد}\ (x-[x]) \\ x \to ۴^- \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{حد}\ \dfrac{x^۲-۷x+۶}{x-۱} \\ x \to ۱^- \end{cases}$$

◄ حدّ تابع:

مثال (۱۰): تابع f به معادله $f(x)=۳x+۱$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و $f(x)$) حدّ تابع فوق را وقتی x از دو طرف به عدد (۲) میل می‌کند را بیابیم. برای این منظور جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۱/۵,۱/۹,۱/۹,۱/۹۹۹ → ۲ ← ۲/۰۰۱,۲/۰۱,۲/۱,۲/۵
$f(x)$	۵/۵,۶/۷,۶/۹۷,۶/۹۹۷ → ۷ ← ۷/۰۰۳,۷/۰۳,۷/۳,۸/۵

به طوری که جدول نشان می‌دهد وقتی x از هر دو طرف به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر شود، مقدار $f(x)$ نیز به عدد (۷) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. حال اگر از دیدگاه دیگری به جدول نگاه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که $f(x)$ به عدد (۷) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. اگر x به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر شود، می‌توانیم $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به عدد ۷ نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به عدد (۲) نزدیک کنیم.

◄ نتیجه شهودی حدّ تابع:

فرض می‌کنیم تابع f به معادله $f(x)$ دربازهٔ (a,b) شامل $(x_۰)$ تعریف شده باشد. (ممکن است تابع f در خود $x_۰$ تعریف نشده باشد).

وقتی می‌نویسیم : $\begin{cases} \text{حد}\ f(x)=L \\ x \to x_۰ \end{cases}$

به معنی آن است که: می‌توان $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به عدد L نزدیک کرد به شرطی که x را (از هر دو طرف) به قدر کافی به $x_۰$ نزدیک کنیم. به بیان دیگر مقدار $|f(x)-L|$ را می‌توان به هر اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد به شرطی که $|x-x_۰|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

از جدول مثال (۱۰) نتایج زیر به دست می‌آید.

اگر $|x-۲|=۰/۵ \Rightarrow |f(x)-۷|=۱/۵$

اگر $|x-۲|=۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۷|=۰/۳$

اگر $|x-۲|=۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷|=۰/۰۳$

اگر $|x-۲|=۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷|=۰/۰۰۳$

بررسی این جدول نشان می‌دهد، وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه $(\pm۰/۵)$ باشد، اختلاف $f(x)$ و عدد (۷) به اندازه $(\pm۱/۵)$ است و وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه $(\pm۰/۱)$ باشد، اختلاف $f(x)$ و عدد (۷) به اندازه $(\pm۰/۳)$ است. و وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه $(\pm۰/۰۱)$ باشد، اختلاف $f(x)$ و عدد (۷) به اندازه $(\pm۰/۰۳)$ است. و بالاخره وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه $(\pm۰/۰۰۱)$ باشد، اختلاف $f(x)$ و عدد (۷) به اندازه $(\pm۰/۰۰۳)$ است. می‌توانیم نتیجه بگیریم که می‌توان $|f(x)-۷|$ را به هر اندازه دلخواه که بخواهیم به صفر نزدیک کنیم به شرطی که $|x-۲|$ را به اندازهٔ، کافی به صفر نزدیک کنیم.

سؤال: اگر بخواهیم $|f(x)-۷|$ کوچکتر از $\dfrac{۱}{۱۰۰۰}$ باشد، x را چقدر باید به عدد (۲) نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-۷|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow |۳x+۱-۷|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow |۳x-۶|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow ۳|x-۲|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow$$

$$|x-۲|<\frac{۱}{۳۰۰۰}$$

به طوری که ملاحظه شد، باید $|x-۲|$ را از $\dfrac{۱}{۳۰۰۰}$ کوچکتر اختیار کنیم. حال سؤال قبلی را به صورت کلی مطرح می‌کنیم.

سؤال: اگر بخواهیم $|f(x)-۷|$ کوچکتر از عدد مثبت خیلی کوچک (ε) باشد آنگاه $|x-۲|$ را باید کوچکتر از چه

عددی اختیار کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$|f(x)-۷|<\varepsilon \Rightarrow |۳x+۱-۷|<\varepsilon$

$\Rightarrow |۳x-۶|<\varepsilon \Rightarrow ۳|x-۲|<\varepsilon$

$\Rightarrow |x-۲|<\frac{\varepsilon}{۳} \qquad \delta=\frac{\varepsilon}{۳}$

به طوری که ملاحظه شد، باید $|x-۲|$ را از $\frac{\varepsilon}{۳}$ یا δ کوچکتر اختیار کنیم. نتیجه:

اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۳۰۰}$

اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۳۰۰۰}$

اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۳۰۰۰۰}$

پس برای هر $\varepsilon>۰$، حداقل یک $\delta>۰$ (وابسته به ε) به دست می‌آید که:

$۰<|x-۲|<\delta \Rightarrow |f(x)-۷|<\varepsilon$

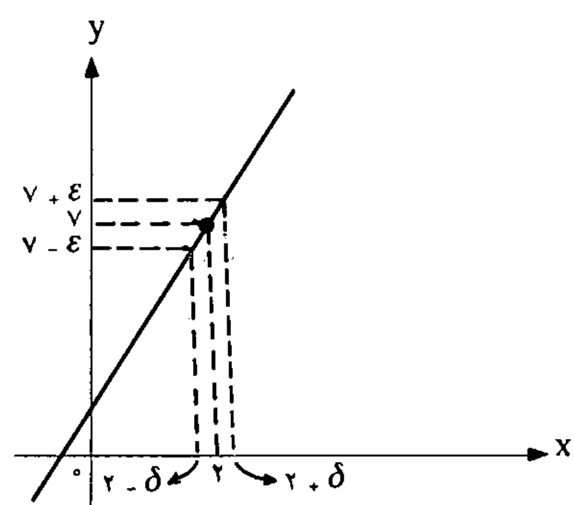
توجه:

$|x-۲|<\delta \Rightarrow -\delta<x-۲<\delta \Rightarrow ۲-\delta<x<۲+\delta$

$|f(x)-۷|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-۷<\varepsilon$

$\Rightarrow ۷-\varepsilon<f(x)<۷+\varepsilon$

نمودار هندسی تابع و بحث فوق چنین است.



تعریف ریاضی حدّ تابع:

فرض می‌کنیم تابع f به معادله $f(x)$ در بازه (a,b) شامل $x_۰$ تعریف شده باشد. (ممکن است تابع f در خود $x_۰$ تعریف نشده باشد).

وقتی نوشته می‌شود $\begin{cases} \text{حد } f(x)=L \\ x\to x_۰ \end{cases}$

به این معنی است که: برای هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک (ε)، عدد مثبت کوچکی (وابسته به ε) مانند δ وجود دارد به طوری که:

اگر $۰<|x-x_۰|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

مثال (۱۱): نشان دهید در تابع به معادله $f(x)=۲x+۱$،

$\begin{cases} \text{حد} f(x)=۳ \\ x\to ۱ \end{cases}$

ابتدا به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و $f(x)$) مسأله را بررسی می‌کنیم.

x	۰/۷	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۲
f(x)	۲/۴	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	→	۳	←	۳/۰۰۲	۳/۰۲	۳/۲	۳/۴

به طوری که این جدول نشان می‌دهد، وقتی x از دو طرف به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار $f(x)$ به عدد (۳) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. حال اگر از دیدی دیگر به جدول نگاه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که $f(x)$ را می‌توانیم به اندازه دلخواه به عدد (۳) نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به عدد (۱) نزدیک کنیم.

به عبارت دیگر مقدار $|f(x)-۳|$ را می‌توانیم به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کنیم به شرطی که مقدار $|x-۱|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم. حال مسأله را با استفاده از تعریف ریاضی حدّ تابع، حل می‌کنیم.

می‌گوییم حدّ تابع فوق وقتی $x\to ۱$ عدد (۳) است هرگاه:

به ازاء هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک (ε)، عدد مثبت δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که:

اگر $۰<|x-۱|<\delta \Rightarrow |f(x)-۳|<\varepsilon$

این تعریف می‌گوید مقدار $|f(x)-۳|$ را به اندازه دلخواه (ε) به صفر نزدیک می‌کنیم به شرطی که مقدار $|x-۱|$ را به قدر کافی

(به قدر δ) به صفر نزدیک کنیم. می‌نویسیم:

$$|f(x)-3|<\varepsilon \Rightarrow |2x+1-3|<\varepsilon \Rightarrow |2x-2|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow 2|x-1|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \delta\le\frac{\varepsilon}{2}$$

پس اگر $|x-1|$ را کوچکتر از δ اختیار کنیم، آنگاه $|f(x)-3|$ کوچکتر از مقدار دلخواه (ε) خواهد شد.

اگر $\varepsilon=\frac{1}{100}$ ، آنگاه $\delta\le\frac{1}{200}$

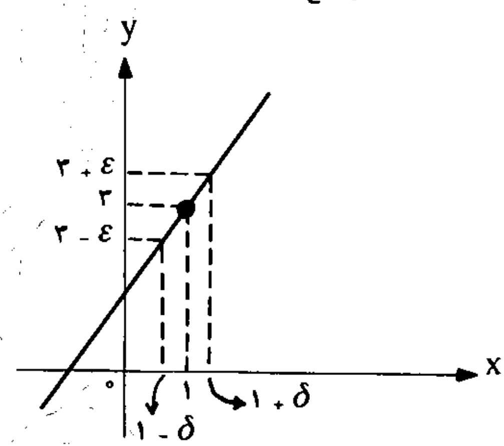
اگر $\varepsilon=\frac{1}{1000}$ ، آنگاه $\delta\le\frac{1}{2000}$

اگر $\varepsilon=\frac{1}{10000}$ ، آنگاه $\delta\le\frac{1}{20000}$

پس برای هر $\varepsilon>0$ ، حداقل یک δ (وابسته به ε) وجود دارد که:

اگر $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$

نمودار هندسی تابع و بحث فوق چنین است.



$$|x-1|<\delta \Rightarrow -\delta<x-1<\delta \Rightarrow 1-\delta<x<1+\delta$$

$$|f(x)-3|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-3<\varepsilon$$

$$\Rightarrow 3-\varepsilon<f(x)<3+\varepsilon$$

مثال (۱۲): با تعریف ریاضی حدّ تابع ثابت کنید :

$$\begin{cases} \text{حد}\,(x^2-4x)=-4 \\ x\to 2 \end{cases}$$

حل: می‌خواهیم نشان دهیم که در تابع به معادله $f(x)=x^2-4x$ وقتی x به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار f(x) به عدد (۴-) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. به عبارت دیگر f(x) را به هر اندازه دلخواه می‌توان به عدد (۴-) نزدیک کرد به شرطی که، x را به قدر کافی به عدد (۲) نزدیک کنیم یعنی $|f(x)+4|$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به عدد صفر نزدیک کرد به شرطی که $|x-2|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

به بیان کلّی‌تر می‌خواهیم $|f(x)+4|$ را به اندازه‌ای به صفر نزدیک کنیم تا از عدد مثبت فوق‌العاده کوچک (ε) کوچکتر باشد. به شرطی که $|x-2|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم تا $|x-2|$ کوچکتر از δ (وابسته به ε) باشد.

می‌نویسیم:

$$|f(x)+4|<\varepsilon \Rightarrow \left|x^2-4x+4\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|(x-2)^2\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow (x-2)^2<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \delta\le\sqrt{\varepsilon}$$

پس باید $|x-2|$ را آنقدر به صفر نزدیک کنیم تا $0<|x-2|<\delta$

مثال (۱۳): ثابت کنید حدّ تابع f به معادله

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{|x-1|}$$

وقتی $x\to 3$ برابر صفر است.

حل: باید نشان دهیم: برای هر $\varepsilon>0$ ، لااقل یک عدد مثبت مانند (δ) وجود دارد به طوری که :

$$0<|x-3|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-4x+3}{|x-1|}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-4x+3}{|x-1|}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)}\right|<\varepsilon$$

$$\begin{cases} x\to 3 \\ |x-1|=(x-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x-3|<\varepsilon \Rightarrow \delta\le\varepsilon$$

مثال (۱۴): ثابت کنید، حدّ تابع به معادله $f(x)=(-1)^{[x]}(2x-6)$ وقتی $x\to 3$ برابر صفر است.

حل: باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon>0$ ، لااقل یک عدد

مثبت مانند (δ) وجود دارد به طوری که:

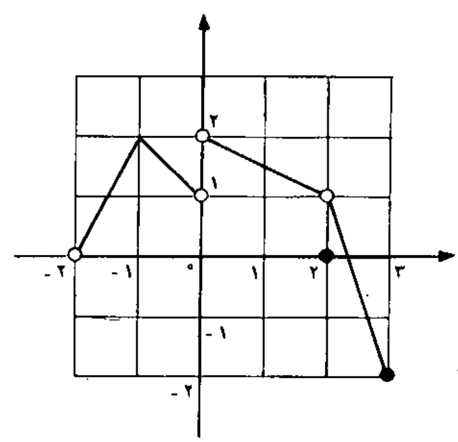
$$\circ<|x-۳|<\delta \Rightarrow \left|(-۱)^{[x]}(۲x-۶)\right|<\varepsilon$$

توجه:

$$\begin{cases}(-۱)^{[x]}=\pm ۱\\ x\to ۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow |\pm(۲x-۶)|<\varepsilon \Rightarrow |\pm ۲(x-۳)|<\varepsilon \Rightarrow ۲|x-۳|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-۳|<\frac{\varepsilon}{۲} \Rightarrow \quad \delta \le \frac{\varepsilon}{۲}$$

تمرین۱: فرض کنید نمودار تابع f شکل زیر باشد.
حدّهای زیر را بیابید.



$\begin{cases}\text{حد } f(x)\\ x\to ۳^-\end{cases}$ $\begin{cases}\text{حد } f(x)\\ x\to ۲\end{cases}$

$\begin{cases}\text{حد } f(x)\\ x\to ۱^+\end{cases}$ $\begin{cases}\text{حد } f(x)\\ x\to ۱^-\end{cases}$ $\begin{cases}\text{حد } f(x)\\ x\to -۱\end{cases}$

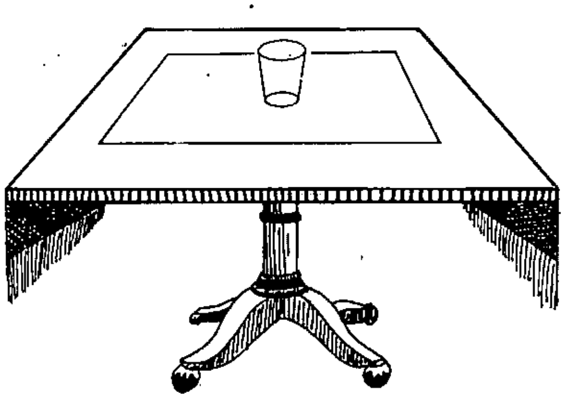
تمرین ۲: توابع به معادلات زیر مفروض‌اند جدول زیر را برای هر کدام کامل کنید.

$$f(x)=\sqrt{x-۱} \qquad f(x)=\left|\frac{x^۲-۴}{|x|-۲}\right|$$
$$f(x)=\frac{x^۲-۴}{|x-۲|}$$

x	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹ ⟵	۲	⟶ ۲/۰۱	۲/۱	۲/۳
f(x)							

تفریح اندیشهٔ ۱

لیوان آبی بر چهار پایهٔ پوشیده از سفره‌ای قرار دارد. چگونه می‌توان بدون دست زدن به لیوان، سفره را از روی چهارپایه برداشت و لیوان را باقی گذاشت؟



جواب در صفحهٔ ۸۸