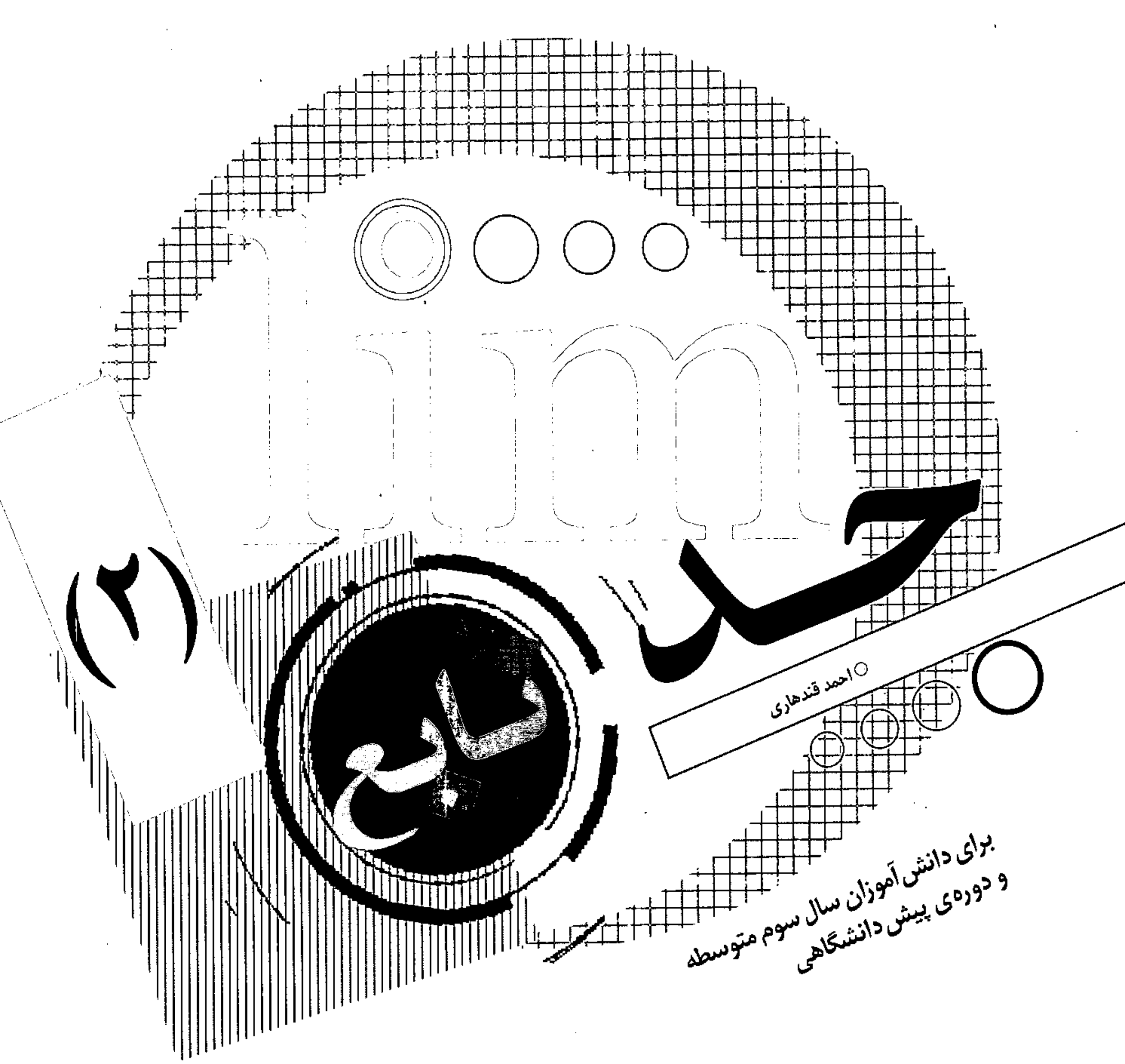


اشاره

در شماره‌ی قبل مفاهیم حد چپ و راست تابع و حد تابع در یک نقطه بررسی شد و به قضایای حد اشاره کردیم، اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

قضیه: به ازای هر x (برحسب رادیان) که $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ باشد، داریم:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

از این قضیه نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 0}\cos x < \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 < \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

نتیجه (هم‌ارزی)

$$\begin{cases}\sin ax \sim ax \\ \tan ax \sim ax\end{cases};\ x\to 0$$ برحسب رادیان

$$\begin{cases}\sin u \sim u \\ \tan u \sim u\end{cases};\ u\to 0$$ برحسب رادیان

دو توابع هم‌ارز

دو تابع f و g را در a وقتی هم‌ارز گویند که:

مثال ۲. مطلوب است محاسبه‌ی

اولاً: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ یا ∞ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ یا ∞

(a می‌تواند هر عدد حقیقی یا $+\infty$ یا $-\infty$ باشد).

ثانیاً: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

مثال: تابع f به معادله‌ی $f(x)=\sin 4x$ و تابع g به معادله‌ی $g(x)=4x$ را وقتی $x\to 0$ هم‌ارز گوییم، زیرا:

اولاً: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

ثانیاً: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(f)x}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=1$

چند هم‌ارزی قابل استفاده در آزمون‌ها وقتی $x\to 0$

۱) $\sin ax \sim ax$

۲) $\tan ax \sim ax$

۳) $\mathrm{Arc}\sin ax \sim ax$

۴) $\mathrm{Arc}\tan ax \sim ax$

۵) $1-\cos mx \sim \frac{m^2x^2}{2}$

۶) $(x-\sin x)\sim \frac{1}{6}x^3$

۷) $(x-\tan x)\sim -\frac{1}{3}x^3$

۸) $(\tan x-\sin x)\sim \frac{x^3}{2}$

۹) $(x-\mathrm{Arc}\sin x)\sim -\frac{x^3}{6}$

۱۰) $(x-\mathrm{Arc}\tan x)\sim \frac{x^3}{3}$

۱۱) $(x-\sin x-\frac{1}{6}x^3)\sim -\frac{x^5}{120}$

۱۲) $(x-\tan x+\frac{1}{3}x^3)\sim -\frac{2x^5}{15}$

۱۳) $ax^n_{(n\in N)}+bx^{n-1}+\cdots+tx \sim tx$

۱۴) $ax^n_{(n\in N)}+bx^{n-1}+\cdots+tx+u \sim u$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی این حدها:

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x.\tan 5x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x)(5x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{10x^2}{2x^2}=5$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{2\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{2\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x^2}}{2(2x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}|x|}{4x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}|x|}{4x}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

۳) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos 4x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2\sin^2 2x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2(2x)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{8x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}x}{2\sqrt{2}|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{2(-x)}=-\frac{1}{2}$

رفع ابهام مسئله از حالت $\frac{0}{0}$

اگر در محاسبه‌ی حد یک کسر به حالت $\frac{0}{0}$ برخوردیم، برای تعیین حد از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم (فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$):

۱. عبارت f(x) و g(x) را تجزیه می‌کنیم تا عامل $(x-a)$ در آن‌ها ظاهر شود. پس از حذف این عامل از صورت و مخرج، حد تابع به‌دست می‌آید.

مثال ۱. مطلوب است محاسبه‌ی حد زیر.

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+4x-5}{x^4+x-2}=\frac{0}{0}$$

حل: الف) برای تجزیه‌ی صورت و مخرج، هرکدام را بر $(x-1)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x-5 & x-1 \\ \hline 0 & x^2+x+5 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} x^4+x-2 & x-1 \\ \hline 0 & x^3+x^2+x+2 \end{array}$$

$x^3+4x-5=(x-1)(x^2+x+5)$

$x^4+x-2=(x-1)(x^3+x^2+x+2)$

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+4x-5}{x^4+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+5)}{(x-1)(x^3+x^2+x+2)}$$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+5}{x^3+x^2+x+2}=\frac{1+1+5}{1+1+1+2}=\frac{7}{5}$$

۲. اگر f(x) یا g(x) یا هر دو عبارت‌های رادیکالی باشند،

صورت و مخرج را در عبارت مناسبی ضرب می‌کنیم تا صورت و مخرج کسر قابل تجزیه، بدون رادیکال شود. آن‌گاه بنا به شماره‌ی ۱، آن‌ها را تجزیه می‌کنیم تا حد تابع به‌دست آید.

مثال ۲. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}$$

حل:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$

صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{2})}{x^2 + x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{2})}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-3)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{2})}{x+2}$$

$$= \frac{-2(\sqrt{2} + \sqrt{2})}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

مثال ۳. مطلوب است محاسبه‌ی

$$B = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{20}}$$

حل:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{20}} = \frac{0}{0}$$

صورت و مخرج را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$B = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{2x+1} - 3)(\sqrt{2x+1} + 3)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{20})}{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{20})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{20})(\sqrt{2x+1} + 3)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(2x + 1 - 9)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{20})}{(x^2 + x - 20)(\sqrt{2x+1} + 3)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{20})}{(x-4)(x+5)(\sqrt{2x+1} + 3)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{20})}{(x+5)(\sqrt{2x+1} + 3)} = \frac{2(\sqrt{20} + \sqrt{20})}{9(\sqrt{9} + 3)}$$

$$B = \frac{4\sqrt{20}}{54} = \frac{2\sqrt{20}}{27} = \frac{8\sqrt{5}}{27}$$

مثال ۴. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$C = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}$$

حل:

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x} - 2\sqrt{2}} = \frac{2-2}{\sqrt{8} - 2\sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$

داریم:

$$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab})$$

درباره‌ی صورت کسر، از اتحاد بالا استفاده می‌کنیم و درباره‌ی مخرج، از اتحاد مزدوج.

$$C = \lim_{x\to 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 4 + 2\sqrt[3]{x})(\sqrt{x} + 2\sqrt{2})}{(\sqrt{x} - 2\sqrt{2})(\sqrt{x} + 2\sqrt{2})(\sqrt[3]{x^2} + 4 + 2\sqrt[3]{x})}$$

$$= \lim_{x\to 8} \frac{(x-8)(\sqrt{x} + 2\sqrt{2})}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + 4 + 2\sqrt[3]{x})} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2} + 4 + 2\sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{8} + 2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{64} + 4 + 2\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt{2}}{4 + 4 + 4} = \frac{4\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

۳. اگر عبارت $f(x)$ یا $g(x)$ یا هر دو مثلثاتی باشند، آن‌ها را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم. سپس از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم. در غیر این صورت، از تبدیل‌ها و فرمول‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

مثال ۵. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$D = \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

حل:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \frac{0}{0}$$

صورت را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$D = \lim_{x\to a} \frac{2\cos\frac{x+a}{2} . \sin\frac{x-a}{2}}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{2\cos\frac{x+a}{2}(\frac{x-a}{2})}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} = \cos\frac{a+a}{2} = \cos a$$

می‌دانیم که: $x \to a;\ \sin\frac{x-a}{2} \sim \frac{x-a}{2}$

مثال ۶. مطلوب است محاسبه‌ی حد $E=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\sin x^2}$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\sin x^2}=\frac{0}{0}$$

$$E=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x\mathrm{conx}-\sin x}{\cos x}}{x\sin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x.\cos x-\sin x}{x\cos x.\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x(1-\cos x)}{x\cos x.\sin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x(2\sin^2\frac{x}{2})}{x\cos x.\sin x^2}\sim\lim_{x\to 0}\frac{-x(2\times\frac{x^2}{4})}{x.\cos x(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}}{\cos x}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$$

توجه: در حل این مسئله، از هم‌ارزی ۸ هم می‌توان استفاده کرد.

مثال ۷. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$F=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\frac{0}{0}$$

کسر را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$F=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-1-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$F=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x}}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$\sim\lim_{x\to 0}\frac{x(2\times\frac{x^2}{4})}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0})}=\frac{\frac{1}{2}}{1+1}=\frac{1}{4}$$

توجه: در حل این مسئله هم می‌توان از هم‌ارزی ۸ استفاده کرد.

تمرین: حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

۲) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5+x-2}{x^4+x-2}$

۳) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin 4x}$

۴) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$

حدهای نامتناهی

۱. اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a، تعریف شده باشد و وقتی $x \to a^+$، مقدار f(x) مرتباً بزرگ و بزرگ‌تر شود، به‌طوری که وقتی x از سمت راست به a خیلی نزدیک شود، مقدار f(x) بی‌هیچ محدودیتی افزایش یابد، در این صورت می‌گوییم: حد تابع $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

۲ . در صورتی که با نزدیک شدن x از سمت راست به a ، مقدار f(x) بدون هیچ محدودیتی کاهش یابد ، می گوییم : وقتی $x \to a^+$ ، حد تابع $-\infty$ است و می نویسیم :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

۳ . چنان‌چه با نزدیک شدن x به a از سمت چپ ، مقدار f(x) بی‌هیچ محدودیتی افزایش یابد ، در این صورت می گوییم : وقتی $x \to a^-$ ، حد تابع $+\infty$ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

۴ . اگر با نزدیک شدن x به a از سمت چپ ، مقدار f(x) بی‌هیچ محدودیتی کاهش یابد ، در این صورت می گوییم : وقتی $x \to a^-$ ، حد تابع $-\infty$ است و می نویسیم :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

نکته‌ی مهم : $+\infty$ یا $-\infty$ عدد نیستند ، بلکه نشان می‌دهند که مقدار تابع بی‌هیچ محدودیتی افزایش یا کاهش می‌یابد (درواقع باید گفت ، تابع حد مشخصی ندارد) .

تعریف : اگر $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ را در نظر بگیریم ، این حد بدین معنی است که می‌توان f(x) را از هر عدد مثبت بزرگی ، بزرگ‌تر انتخاب کرد؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کنیم .

چنان‌چه $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ را در نظر بگیریم ، این حد بدین معنی است که می‌توان f(x) را از هر عدد منفی کوچکی ، کوچک‌تر انتخاب کرد؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کنیم .

نکته : اگر k یک عدد حقیقی مثبت باشد ، داریم $(n \in N)$:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{k}{(x-a)^{2n-1}} = +\infty \qquad \lim_{x\to a^-} \frac{k}{(x-a)^{2n-1}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^+ \text{ یا } a^-} \frac{k}{(x-a)^{2n}} = +\infty$$

چنان‌چه k یک عدد حقیقی منفی باشد ، داریم $(n \in N)$:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{k}{(x-a)^{2n-1}} = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} \frac{k}{(x-a)^{2n-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^+ \text{ یا } a^-} \frac{k}{(x-a)^{2n}} = -\infty$$

مثال ۱ : می‌دانیم $\lim_{x\to 1} \frac{4}{(x-1)^2} = +\infty$. اگر بخواهیم $\frac{4}{(x-1)^2} > 40000$ باشد ، x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟

حل : در دو طرف نامساوی را معکوس می‌کنیم . درنتیجه جهت نامساوی عوض می‌شود :

$$\frac{4}{(x-1)^2} > 40000$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{1}{40000}$$

از دو طرف ریشه‌ی دوم می‌گیریم :

$$\frac{|x-1|}{2} < \frac{1}{200} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{100}$$

یعنی x را باید آن‌قدر به عدد ۱ نزدیک کنیم تا $|x-1|$ کمتر از $\frac{1}{100}$ باشد .

مثال ۲ . می‌دانیم $\lim_{x\to 2} \frac{-2}{(x-2)^2} = -\infty$. اگر بخواهیم $\frac{-2}{(x-2)^2} < -8\times 10^6$ باشد ، x را چه‌قدر باید به عدد ۲ نزدیک کنیم؟

حل دو طرف نامساوی را در ۱- ضرب می‌کنیم :

$$\frac{-2}{(x-2)^2} < -8\times 10^6$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(x-2)^2} > 8\times 10^6 \Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} > 4\times 10^6$$

معکوس می‌کنیم :

$$\Rightarrow (x-2)^2 < \frac{1}{4\times 10^6} \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}} |x-2| < \frac{1}{2000}$$

یعنی x را آن‌قدر باید به عدد ۲ نزدیک کنیم تا $|x-2|$ کمتر از $\frac{1}{2000}$ باشد .

مثال ۳. مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر:

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$

حل: این حد را به ناچار در دو حالت بررسی می‌کنیم:

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \tan x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} \to \frac{\sin\frac{\pi^+}{2}}{\cos\frac{\pi^+}{2}} \to \frac{1}{0^-} \to -\infty$

(منظور از علامت $\to$ میل کردن در حالت حدی است)

ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{2}} \tan x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} \to \frac{\sin\frac{\pi^-}{2}}{\cos\frac{\pi^-}{2}} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to 0} \cot x$

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} \to \frac{\cos 0^+}{\sin 0^+} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{\sin x} \to \frac{\cos 0^-}{\sin 0^-} \to \frac{1}{0^-} \to -\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos 2x}$

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{4}} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos 2x} \to \frac{\sin\frac{\pi^+}{2}}{\cos\frac{\pi^+}{2}} \to \frac{1}{0^-} \to -\infty$

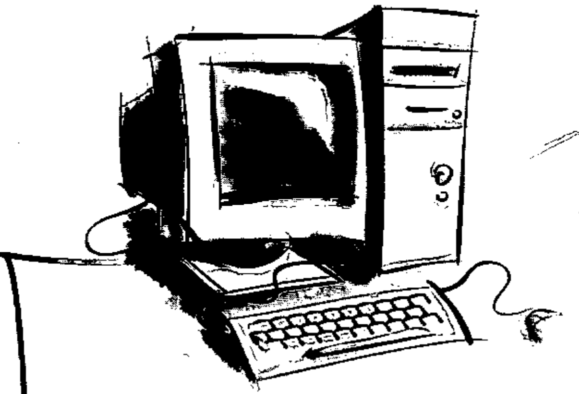
ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{4}} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos 2x} \to \frac{\sin\frac{\pi^-}{2}}{\cos\frac{\pi^-}{2}} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-4x}{(x-1)^3} \to \frac{1-4}{(0^-)^3} \to \frac{-3}{0^-} \to +\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x^2+2x+4}{(x-4)^2} \to \frac{16+8+4}{(0^-)^2} \to \frac{28}{0^+} \to +\infty$

۶) $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{-2x+1}{(x+1)^5} \to \frac{2+1}{(0^-)^5} \to \frac{3}{0^-} \to -\infty$

ادامه دارد...



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

اسم سایت: **Algebra**

آدرس اینترنتی سایت: **http://www.algebra.com**

این سایت کمک‌هایی را در قالب تکالیف منزل، به‌وسیله‌ی استاد راهنمای ریاضی که به‌صورت رایگان در این سایت خدمت می‌کند، در اختیار علاقه‌مندان قرار می‌دهد. در ضمن، هر بخش این سایت شامل درس‌ها و مسئله‌های حل شده، به‌همراه مکانی برای ارسال مسائل ریاضی خود به قسمت استاد راهنمای ریاضی آن است. در این قسمت، از هر چهار مسئله‌ی ارسال‌شده توسط کاربران، سه مسئله به وسیله‌ی استاد راهنمای ریاضی پاسخ داده می‌شود. به‌علاوه، بیشتر بخش‌های این سایت یک بایگانی دارد که دربرگیرنده‌ی مسائل حل شده به وسیله‌ی استاد راهنمای ریاضی است.

در ادامه، چهار قسمت اصلی سایت **Algebra** را به همراه عنوان‌های آن ارائه می‌کنیم:

■ جبر مقدماتی **(Pre-Algebra)**

● کسرهای عددی **(Numeric Fractions)**

● اعداد اعشاری، توانی از ۱۰، گرد کردن
(Decimal Numbers, Power of 10, Rounding)

● اعمال به وسیله‌ی اعداد علامت‌دار
(OPerations with Signed Numbers)

● توان‌ها و اعمال روی توان‌ها
(Exponents and Operations on Exponents)

● بخش‌پذیری و اعداد اول
(Divisibility and Prime Numbers)

● اعمال وارون برای جمع و ضرب متقابل
(Inverse Operations for Addition and Multipication Reciprocals)

● ارزش‌یابی عبارات، پرانتزها
(Evaluation of Expressions, Parentheses)

ادامه در صفحه ی ۳۳