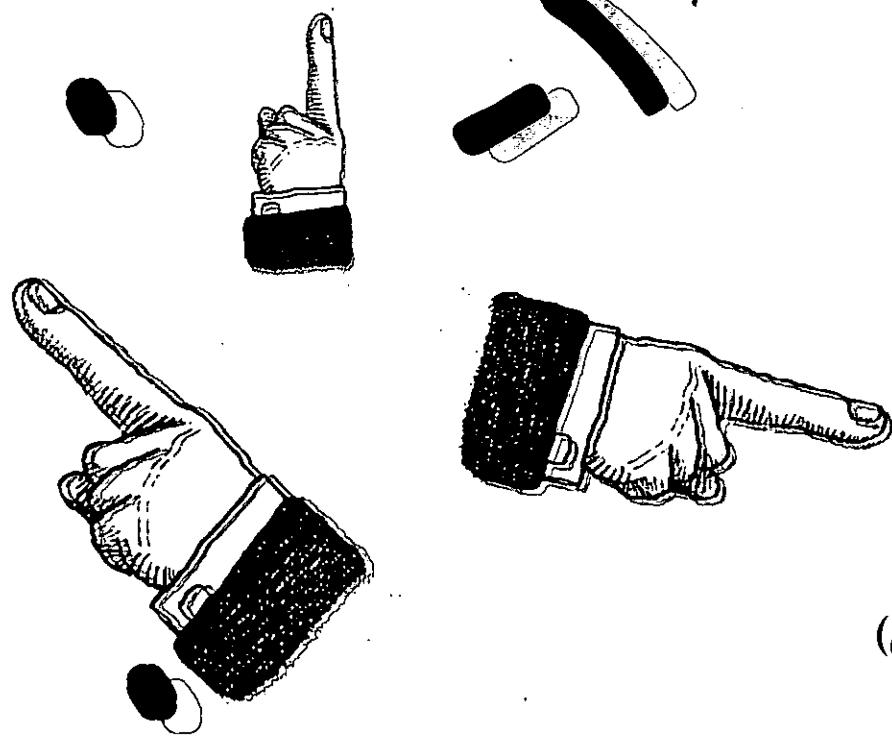


حد

(دانش‌آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی)

• احمد قندهاری

حد، یکی از مفاهیم بنیادی در ریاضی است؛ به طوری که مباحث اصلی دیگری مانند پیوستگی، مشتق‌پذیری، انتگرال و ... به آن وابسته است.

وقتی درمورد حد بحث می‌کنیم، منظور ما بررسی رفتار یک تابع است، وقتی که متغیر آن به عدد مشخصی، بسیار نزدیک می‌شود؛ ولی هیچ‌گاه به آن نمی‌رسد. پیش از ورود به بحث حد، به موارد زیر باید توجه کرد:

۱ـ همسایگی عدد حقیقی a [1]:

الف: هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی a را یک همسایگی عدد حقیقی a گویند. برای مثال، اگر $a=2$، آن‌گاه بازه‌های $(1,6)$، $(0,5)$، $(-1,10)$ را یک همسایگی عدد ۲ گویند.

ب: همسایگی متقارن:

بازهٔ $(a-r, a+r)$ را یک همسایگی متقارن عدد a گویند.

مثال: بازهٔ $(2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2})$ را یک همسایگی متقارن عدد ۲ گویند. و بازهٔ $(4-\frac{1}{5}, 4+\frac{1}{5})$ را یک همسایگی متقارن عدد ۲ گویند.

ج: همسایگی متقارن محذوف:

اگر از همسایگی متقارن عدد a، خود عدد a را برداریم، این همسایگی را همسایگی متقارن محذوف گویند:

$(a-r,a+r)-\{a\}$

برای مثال، همسایگی $(5-\frac{1}{10}, 5+\frac{1}{10})-\{5\}$ را یک همسایگی متقارن محذوف عدد ۵ گویند.

د: بهترین شکل نشان دادن همسایگی متقارن محذوف عدد a با شعاع r، به صورت $0<|x-a|<r$ می‌باشد که خود به خود $x \neq a$ را می‌رساند.

$0<|x-a|<r \Rightarrow -r<x-a<r \;,\; x\neq a$

یا $a-r<x<a+r$ و $x \neq a$

همسایگی متقارن عدد a با شعاع r را با نماد $N(a,r)$ [2] نیز نشان می‌دهند؛ یعنی:

$N(a,r)=(a-r,a+r)$

مثال: $N(3,\frac{1}{10})=(3-\frac{1}{10}, 3+\frac{1}{10})$

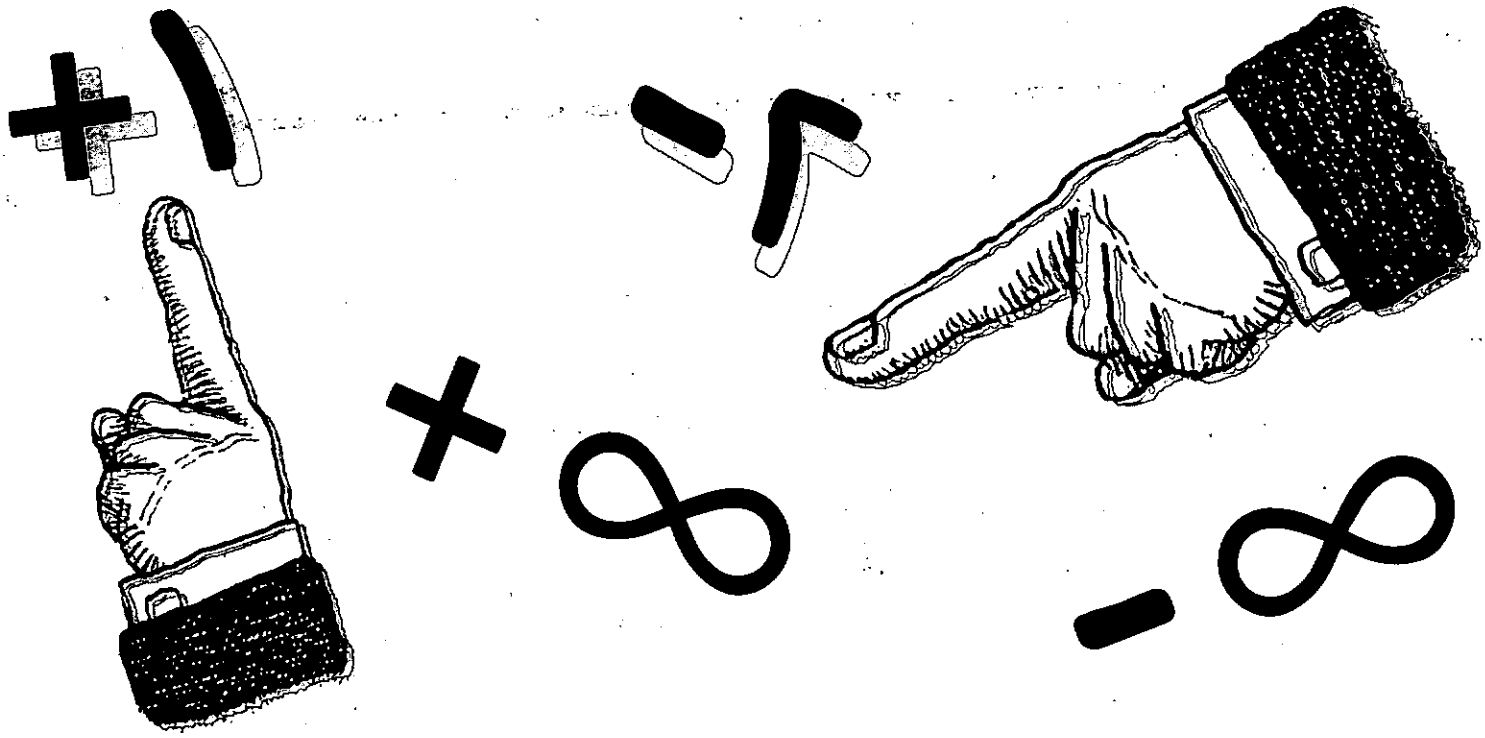
مثال: اگر همسایگی $N(a,\varepsilon)$ به صورت $(\frac{13}{4},\frac{15}{4})$ باشد، a و ε را بیابید.

حل: $N(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-\varepsilon=\frac{13}{4} \\ a+\varepsilon=\frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{7}{2} \;,\; \varepsilon=\frac{1}{4}$$

تست: اشتراک دو همسایگی $N(1,\frac{1}{2})$ و $N'(0,1)$ کدام است؟

۱) $(1,\frac{3}{2})$ ۲) $(-1,\frac{1}{2})$



۳) $(\frac{1}{2},1)$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

حل: گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا :

$$N(1,\frac{1}{2})=(1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2})=(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$$

$$N'(0,1)=(0-1,0+1)=(-1,1)$$

$$N\cap N'=(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\cap(-1,1)=(\frac{1}{2},1)$$

۲ـ تغییرات $|x|$ وقتی x در بازه‌های مختلف باشد:

الف: اگر x در یک بازه مثبت باشد، قدرمطلق x نیز در همان بازه است. مثال :

$$2<x<5\Rightarrow 2<|x|<5$$

ب: اگر x در یک بازه منفی باشد، قدرمطلق x در بازه قرینه آن است. مثال :

$$-3<x<-1\Rightarrow 1<|x|<3$$

$$-7<x<-2\Rightarrow 2<|x|<7$$

ج: اگر x در یک بازه که شامل عددهای منفی و مثبت باشد، آن‌گاه قدرمطلق x ازخود صفر تا قدرمطلق، بزرگترین عدد بازه قرار می‌گیرد. مثال :

$$-4<x<10\Rightarrow\begin{cases}-4<x<0\Rightarrow 0<|x|<4\\ 0\le x<10\Rightarrow 0\le|x|<10\end{cases}\Rightarrow 0\le|x|<10$$

$$-8<x<3\Rightarrow\begin{cases}-8<x<0\Rightarrow 0<|x|<8\\ 0\le x<3\Rightarrow 0\le|x|<3\end{cases}\Rightarrow 0\le|x|<8$$

تست: اگر $5>x>2$ ، آن‌گاه، $|x-3|$ درکدام یک از بازه‌ها قرار دارد؟

۱) $[1,2]$ ۲) $[0,2]$

۳) $[0,3]$ ۴) $[0,2]$

حل: گزینهٔ (۴).

$$2<x<5\Rightarrow 2-3<x-3<5-3$$

$$\Rightarrow -1<x-3<2\Rightarrow 0\le|x-3|<2$$

حد

ورود به مبحث حد را با مثالی شروع می‌کنیم :

مثال: تابع به معادلهٔ $f(x)=\frac{3x^2-2x-1}{x-1}$ با شرط $x\neq 1$ را درنظر می‌گیریم. این تابع برای تمام مقادیر x بجز $x=1$ تعریف شده است. می‌خواهیم رفتار $f(x)$ را وقتی x نزدیک به ۱ ولی مخالف با ۱ است، مورد بررسی قرار دهیم.

الف: فرض کنیم، x مقادیر۰/۲۵ ، ۰/۵۰ ، ۰/۷۵ ، ۰/۹ ، ۰/۹۹ ، ۰/۹۹۹ و ۰/۹۹۹۹ را بپذیرد، این عمل به این معناست که x را با مقادیر کمتر از ۱ به سمت ۱ نزدیک کرده‌ایم. مقادیر $f(x)$ را برای مقادیر فوق و در جدول صفحه بعد نشان می‌دهیم :

x	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۷۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹
f(x)	۱/۷۵	۲/۵	۳/۲۵	۳/۷	۳/۹۷	۳/۹۹۷	۳/۹۹۹۷

به‌طوری که جدول نشان می‌دهد، وقتی x، با مقادیر کمتر از ۱ به سمت عدد ۱ میل می‌کند، $f(x)$ به طور مرتب به عدد ۴ نزدیک و نزدیکتر می‌شود.

ب: فرض کنیم x مقادیر ۱/۷۵ ، ۱/۵۰ ، ۱/۲۵ ، ۱/۱ ، ۱/۰۱ ، ۱/۰۰۱ و ۱/۰۰۰۱ را بپذیرد، این عمل به این معناست که x را با مقادیر بزرگتر از ۱ به سمت ۱ نزدیک کرده‌ایم، مقادیر $f(x)$ را برای این مقادیر x در جدول زیر نشان می‌دهیم :

x	۱/۷۵	۱/۵۰	۱/۲۵	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱
f(x)	۶/۲۵	۵/۵	۴/۷۵	۴/۳	۴/۰۳	۴/۰۰۳	۴/۰۰۰۳

با ملاحظهٔ دقیق، به دو جدول بالا نتیجه می‌گیریم که، وقتی x به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر می‌شود، $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک و نزدیکتر می‌شود و هرچه x به عدد ۱ نزدیکتر شود، $f(x)$ به عدد ۴ نزدیکتر می‌شود.

از جدولهای قبل نتایج زیر به‌دست می‌آید :

وقتی $\begin{cases} x=۰/۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۱ \end{cases}$ ، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۳ \end{cases}$ ؛ یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، $f(x)$ به اندازهٔ ۰/۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است.

وقتی $\begin{cases} x=۰/۹۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۰۱ \end{cases}$ ، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۹۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۰۳ \end{cases}$ ؛ یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۰۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، $f(x)$ به اندازهٔ ۰/۰۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است.

همچنین وقتی $\begin{cases} x=۰/۹۹۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۰۰۱ \end{cases}$ ، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۹۹۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۰۰۳ \end{cases}$ ؛ یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۰۰۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، $f(x)$ به اندازهٔ ۰/۰۰۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است و بالاخره وقتی $\begin{cases} x=۰/۹۹۹۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۰۰۰۱ \end{cases}$ ، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۹۹۹۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۰۰۰۳ \end{cases}$ ؛ یعنی وقتی x به‌اندازهٔ ۰/۰۰۰۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، $f(x)$ به اندازهٔ ۰/۰۰۰۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است.

این نتایج را می‌توان به صورتهای زیر نشان داد :

$$|x-۱|<۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۳$$

$$|x-۱|<۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۰۳$$

$$|x-۱|<۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۰۰۳$$

$$|x-۱|<۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۰۰۰۳$$

اکنون برای بررسی این وضعیت، از دیدی دیگر، ابتدا مقادیر $f(x)$ را درنظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که اگر x را به اندازهٔ کافی به عدد ۱ نزدیک کنیم، می‌توانیم $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه که بخواهیم، به عدد ۴ نزدیک کنیم ؛ به بیان دیگر : می‌توانیم $|f(x)-۴|$ را به هر اندازه که بخواهیم، کوچک کنیم ؛ به شرطی که x را به اندازهٔ کافی به عدد ۱ نزدیک کنیم ؛ یعنی $|x-۱|$ را به اندازهٔ کافی کوچک کنیم. به صورت کلّی‌تر می‌تواند $|f(x)-۴|$ از هر عدد مثبت مفروض ε کوچکتر شود ؛ به شرطی که $|x-۱|$ از عدد مثبتی مانند δ که به طور مناسب اختیار می‌شود، کوچکتر باشد.

در نابرابریهای بالا، نتایج زیر برای ε و δ وجود دارد.

اگر $\varepsilon=۰/۳$ ، آن‌گاه $\delta=۰/۱$

اگر $\varepsilon=۰/۰۳$ ، آن‌گاه $\delta=۰/۰۱$

اگر $\varepsilon=۰/۰۰۳$ ، آن‌گاه $\delta=۰/۰۰۱$

اگر $\varepsilon=۰/۰۰۰۳$ ، آن‌گاه $\delta=۰/۰۰۰۱$

پس برای هر $\varepsilon>۰$ (ε به قدر کافی کوچک) دلخواه، δ ی مناسبی یافت می‌شود.

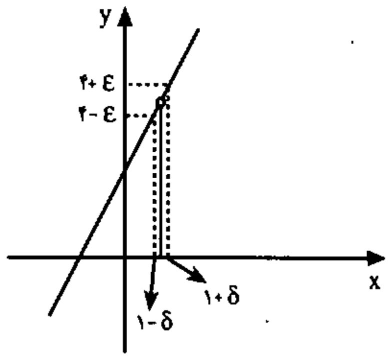
تعبیر هندسی این بحث چنین است :

$$f(x)=\frac{۳x^۲-۲x-۱}{x-۱}=\frac{(۳x+۱)(x-۱)}{x-۱}=۳x+۱ \ ,\ x\neq ۱$$

نمودار $f(x)=۳x+۱$ را با شرط $x\neq ۱$ رسم می‌کنیم.

$x=۰ \Rightarrow f(۰)=۱$

$x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=-۲$



به طور خلاصه می‌توان گفت که مقدار δ به ε بستگی دارد و هر چه‌قدر ε را کوچکتر اختیار کنیم، δ نیز کوچکتر خواهد شد.
بنابراین، در مورد تابع f می‌توان نوشت :
$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۴$ ؛ زیرا برای هر $\varepsilon>۰$ هرقدر کوچک یک $\delta>۰$ ی وجود دارد که

$$۰<|x-۱|<\delta \Rightarrow |f(x)-۴|<\varepsilon$$

حال، این آمادگی را داریم که حدّ تابع را در حالت کلّی تعریف کنیم.

۱ـ تعریف:

فرض کنید f تابعی باشد، در تمام نقاط بازهٔ I که شامل عدد حقیقی a است (بجز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. حدّ تابع f(x) وقتی x به سمت a میل می‌کند، برابر عدد حقیقی L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. اگر برای هر $\varepsilon>۰$ هر چه‌قدر کوچک، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد که :

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

یا بنویسیم :

$$\forall\varepsilon>۰ \quad \exists\delta>۰ \quad \ni |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

برای اثبات رابطهٔ فوق، چنین عمل می‌کنیم :
$|f(x)-L|<\varepsilon$ را با جایگذاری عبارت f(x) در آن حل می‌کنیم تا به رابطهٔ $|x-a|<\delta$ برسیم.
در حقیقت باید δ را بر حسب ε پیدا کنیم و توجه داشته باشیم که، باید برای δ ی به‌دست آمده بتوان از نابرابری $|x-a|<\delta$ به نابرابری $|f(x)-L|<\varepsilon$ رسید.

مثال: در تابع به معادلهٔ $f(x)=۳x-۱$ ، داریم

$$\left\{\lim_{x\to ۳} f(x)=۸\right.$$

نخست: δ ای برای $\varepsilon=۰/۰۰۱$ بیابید.
دوم: مسأله را در حالت کلّی حل کنید.

حل نخست: $|f(x)-۸|<۰/۰۰۱$

$$\Rightarrow |۳x-۱-۸|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow |۳x-۹|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow |۳(x-۳)|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow ۳|x-۳|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow |x-۳|<\frac{۱}{۳۰۰۰} \Rightarrow \delta=\frac{۱}{۳۰۰۰}$$

توجّه: $\delta\le\frac{۱}{۳۰۰۰}$ نیز درست است ؛ زیرا :

$$|x-۳|<\delta\le\frac{۱}{۳۰۰۰} \Rightarrow |x-۳|<\frac{۱}{۳۰۰۰}$$

$$\Rightarrow ۳|x-۳|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow |۳(x-۳)|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow |۳x-۹|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow |۳x-۱-۸|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow |f(x)-۸|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

حل دوم: ثابت می‌کنیم که برای هر $\varepsilon>۰$ هر چه‌قدر کوچک، عدد مثبتی مانند δ وجود دارد که

$$۰<|x-۳|<\delta \Rightarrow |f(x)-۸|<\varepsilon$$

$$|f(x)-۸|<\varepsilon \Rightarrow |۳x-۱-۸|<\varepsilon \Rightarrow |۳x-۹|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |۳(x-۳)|<\varepsilon \Rightarrow ۳|x-۳|<\varepsilon \Rightarrow |x-۳|<\frac{\varepsilon}{۳}$$

$$\Rightarrow \delta\le\frac{\varepsilon}{۳}$$

مسألهٔ (۱): با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید $\left\{\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۴)=-۴\right.$.

حل: ثابت می‌کنیم :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)+4| < \varepsilon$$

$$|f(x)+4| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 4x + 4| < \varepsilon \Rightarrow |(x-2)^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \delta \leq \sqrt{\varepsilon}$$

مسألهٔ (۲): با استفاده ازتعریف حدّ تابع، ثابت کنید

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 5x) = -4$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)+4| < \varepsilon$$

$$|f(x)+4| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 5x + 4| < \varepsilon \Rightarrow |(x-1)(x-4)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-1| \times |x-4| < \varepsilon$$

در این‌جا از همسایگی متقارن محذوف عدد ۱ استفاده می‌کنیم با شعاع $r = 1$:

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

در بازهٔ $0 < x < 2$ ، یک کران بالای $|x-4|$ را پیدا می‌کنیم، ابتدا، $x-4$ را می‌سازیم، سپس $|x-4|$ را می‌سازیم ؛ آن‌گاه یک کران بالای آن را پیدا می‌کنیم :

$$0 < x < 2 \Rightarrow 0-4 < x-4 < 2-4$$

$$\Rightarrow -4 < x-4 < -2 \Rightarrow 2 < |x-4| < 4$$

اگر $0 < x < 2$ ، یک کران بالای $|x-4|$ عدد ۴ است، می‌نویسیم :

$$\underbrace{|x-1| \times 4}_{(1)} < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x-1| \times |x-4|}_{(2)} < \varepsilon \quad \text{اگر}$$

زیرا عبارت (۱) بزرگتر از عبارت (۲) است. اگر عبارت بزرگتر، کوچکتر از ε باشد، آن‌گاه عبارت کوچکتر هم، کوچکتر از ε می‌شود. در نتیجه :

$$|x-1| \times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \delta \leq \operatorname{Min}\left\{r, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

$$\delta \leq \operatorname{Min}\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\} \quad \text{یا}$$

می‌توان نشان داد برای δ ی به‌دست آمده از نابرابری $0 < |x-1| < \delta$ به نابرابری $|f(x)+4| < \varepsilon$ خواهیم رسید.

مسألهٔ (۳): با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x-4} = -1$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$$

$$|f(x)+1| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x-2}{x-4} + 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x-2+x-4}{x-4}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x-6}{x-4}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2(x-3)}{x-4}\right| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| \times \frac{2}{|x-4|} < \varepsilon$$

در این‌جا یک همسایگی متقارن محذوف برای عدد ۳ درنظر می‌گیریم با شعاع $r = \frac{1}{2}$:

$$0 < |x-3| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$$

حال یک کران پایین $|x-4|$ را در این بازه پیدا می‌کنیم :

$$\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} - 4 < x-4 < \frac{7}{2} - 4$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x-4 < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < |x-4| < \frac{3}{2}$$

یک کران پایین $|x-4|$، $\frac{1}{2}$ است .

می‌نویسیم :

$$\underbrace{|x-3| \times \frac{2}{\frac{1}{2}}}_{(1)} < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x-3| \times \frac{2}{|x-4|}}_{(2)} < \varepsilon \quad \text{اگر}$$

زیرا عبارت (۱) از عبارت (۲) بزرگتر است، اگر عبارت بزرگتر از ε کوچکتر باشد ؛ آن‌گاه عبارت کوچکتر هم از ε کوچکتر خواهد شد.

$$\Rightarrow |x-3| \times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \delta \leq \operatorname{Min}\left\{r, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

$$\delta \leq \operatorname{Min}\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

مسألهٔ (۴): با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2}{x-2} = 7$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \ni |x-3|<\delta \Rightarrow |f(x)-7|<\varepsilon$$

$$|f(x)-7|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-2}{x-2}-7\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-7x+12}{x-2}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(x-3)(x-4)}{x-2}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-3|\times\frac{|x-4|}{|x-2|}<\varepsilon$$

حال یک همسایگی متقارن محذوف برای عدد (۳) انتخاب می کنیم با شعاع $r=\frac{1}{2}$:

$$|x-3|<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<x-3<\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$$

حال وقتی $\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$ یک کران بالایی برای $|x-4|$ و یک کران پایینی برای $|x-2|$ پیدا می کنیم.

$$\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}-4<x-4<\frac{7}{2}-4$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}<x-4<-\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{2}<|x-4|<\frac{3}{2}$$

کران بالا $(\frac{3}{2})$ است.

$$\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}\Rightarrow \frac{5}{2}-2<x-2<\frac{7}{2}-2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}<x-2<\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<|x-2|<\frac{3}{2}$$

کران پایین $(\frac{1}{2})$ است.

می نویسیم :

اگر $$\underbrace{|x-3|\times\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}}_{(1)}<\varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x-3|\times\frac{|x-4|}{|x-2|}}_{(2)}<\varepsilon$$

عبارت (۱) بزرگتر از عبارت (۲) است، اگر عبارت بزرگتر، کوچکتر از ε باشد ؛ آن‌گاه عبارت کوچکتر، کوچکتر از ε خواهد شد.

$$|x-3|\times 3<\varepsilon\Rightarrow|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}\Rightarrow\delta\le \operatorname{Min}\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

تمرین: با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید :

۱) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{5x-8}=3$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x^2-3x+3}=1$$

۲ـ حدّ چپ و حدّ راست:

تعریف: فرض کنیم تابع f در یک بازهٔ باز (a,b) تعریف شده باشد، می‌گویند تابع f در a، حد راست برابر L دارد و می‌نویسند $\lim_{x\to a^+}f(x)=L$ هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ هر چه‌قدر کوچک، عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد که اگر $0<x-a<\delta$ ؛ آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$ یا :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\ni 0<x-a<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$$

تعریف: فرض می کنیم تابع f در یک بازهٔ باز (c,a) تعریف شده باشد، می‌گویند تابع f در a حدّ چپ برابر L دارد و می‌نویسند $\lim_{x\to a^-}f(x)=L$ ، هرگاه : برای هر $\varepsilon>0$ هر چه‌قدر کوچک، عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد که اگر $0<a-x<\delta$ ؛ آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$ یا :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\ni 0<a-x<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$$

مسألهٔ (۵): با استفاده از تعریف، ثابت کنید :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{|x-1|}=3 \; .$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\ni 0<a-1<\delta\Rightarrow\left|\frac{x^3-1}{|x-1|}-3\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^3-1}{|x-1|}-3\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{+(x-1)}-3\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow|x^2+x+1-3|<\varepsilon\Rightarrow|x^2+x-2|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow|(x-1)(x+2)|<\varepsilon\Rightarrow|x-1|\times|x+2|<\varepsilon$$

حال یک همسایگی محذوف یکطرفه برای عدد ۱ درنظر می‌گیریم با شعاع $r=1$:

$$\begin{cases} x\to 1^+ \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow 1<x<2$$

سپس کران بالایی برای $|x+2|$ پیدا می‌کنیم :

$$1<x<2 \Rightarrow 3<x+2<4 \Rightarrow 3<|x+2|<4$$

عدد (۴) یک کران بالای $|x+2|$ در بازهٔ $1<x<2$ می‌باشد.

اگر $|x-1|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-1|\times 4<\varepsilon \Rightarrow \underset{x\to 1^+}{|x-1|}<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 0<x-1<\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \delta\le \mathrm{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

مسألهٔ (۶): با استفاده از تعریف، ثابت کنید :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{|x-1|}=-3$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \ni 0<1-x<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^3-1}{|x-1|}+3\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{-\cancel{(x-1)}}+3\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|-(x^2+x+1)+3\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|x^2+x+1-3\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|x^2+x-2\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|(x-1)(x+2)\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$$

حال یک همسایگی محذوف یکطرفه برای عدد ۱ در نظر می‌گیریم $r=1$:

$$\begin{cases} x\to 1^- \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow 0<x<1 \Rightarrow 2<x+2<3$$

$$\Rightarrow 2<|x+2|<3$$

یک کران بالای $|x+2|$ برابر ۳ است.

اگر $|x-1|\times 3<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-1|\times 3<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \delta\le \mathrm{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

تمرین: با استفاده از تعریف، ثابت کنید :

۱) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-8}{|x-2|}=12$ ۲) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{|x-2|}=-12$

قضیه: تابع f در نقطهٔ a حد دارد ؛ اگر و تنها اگر حدّ راست و حدّ چپ در نقطهٔ a موجود و با هم برابر باشند.

تمرین: با استفاده از تعریف، ثابت کنید :

۱) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x+4}{\lfloor -x\rfloor-3}=-1$ ۲) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{5x-3}=\frac{3}{2}$

۳) $\displaystyle\lim_{x\to 3}(x^2-10x)=-21$ ۴) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-3x+4}=\sqrt{2}$

۵) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$ ۶) $\displaystyle\lim_{x\to 5^-}\sqrt{5-x}=0$

یادداشتها :

۱ـ کلیّهٔ عددها و بازه‌های مورد بحث، حقیقی‌اند.

۲ـ عدد N حرف اوّل کلمهٔ Neighbourhood است که به معنای همسایگی است.