دو مدل احتمالاتی برای طرحهای هرمی و نامه‌های زنجیره‌ای•

جی. ال. گست‌ورث، پی. کِی. باتاچاریا*
ترجمهٔ نسا نعمتی، هادی پورمحمدی

انواع مختلفی از طرحهای هرمی و نامه‌های زنجیره‌ای در کشورهای مختلف به عموم مردم عرضه می‌شود و این روند، علی‌رغم مشکلاتی که به‌بار می‌آورد، همچنان ادامه دارد. نمونهٔ معروف این نوع برنامه‌ها در ایران، طرحهای شرکت «گولدکوییست» بود که اتهامات فراوانی به آن وارد شد. این مقاله به بررسی دو مدل احتمالاتی می‌پردازد که در پاسخ به درخواست وکلای شاکیان شرکتهای هرمی در آمریکا طراحی شده است.

بر اساس این دو مدل، درآمدی که فرد شرکت‌کننده در یک طرح هرمی می‌تواند از این راه داشته باشد ارتباط مستقیمی با زمان ورود فرد به این فرایند دارد، و تنها درصد کمی از شرکت‌کنندگان (افرادی که در همان مراحل ابتدایی طرح وارد فرایند شده‌اند) پولی به‌دست خواهند آورد و بیشتر آنها زیان خواهند دید، به‌طوری که می‌توان گفت سرمایه‌گذاران طرحهای هرمی، در مجموع، مغبون می‌شوند.

مقدمه

هر چند بر اساس قوانین ایالتی و فدرال [آمریکا] مبادرت به فعالیتهای تجاری فریبنده که با ارائهٔ وعدهٔ کاذب و ایجاد تصویر غلط همراه باشد غیرقانونی است، انواع نامه‌های زنجیره‌ای و طرحهای هرمی همچنان به مردم عرضه می‌شوند. این مقاله به مرور دو مدل احتمالاتی مطرح برای این طرحها می‌پردازد که توسط نویسندگان این مقاله ([۴] و [۷]) در پاسخ به درخواست وکلایی که به پیگرد قانونیِ مسؤولان این‌گونه فعالیتهای غیرقانونی می‌پردازند طراحی شده است.

نامهٔ زنجیره‌ای معمولاً شامل ۶ نام است و خریدار چنین نامه‌ای $2x$ دلار برای این کار سرمایه‌گذاری می‌کند و x دلار را به فروشندهٔ نامه و x دلار را به شخصی که نام او در بالای همهٔ نامها در نامه آمده است پرداخت می‌کند. پس از آن خریدار نام نفر اول را حذف کرده نام خود را به انتهای فهرست اضافه می‌کند و با فروش نامه به متقاضیان جدید، این روند را ادامه می‌دهد. ترتیب‌دهندگان چنین برنامه‌هایی نشان می‌دهند که اگر خریدار تنها دو نامه بفروشد و هر یک از دو خریدار جدید (دو عضو جدید زنجیره) نیز تنها دو نامه بفروشند و این روند به همین ترتیب ادامه پیدا کند، در نهایت ۳۲ نفر خواهند بود که ۶۴ نامه را که نام خریدار اول در صدر فهرست قرار دارد، می‌فروشند. از این‌رو خریدار اول می‌تواند انتظار دریافت $64x$ دلار را داشته باشد که مبلغ زیادی خواهد بود.

سازمان‌دهندگان طرحهای هرمی در واقع یک کسب و کار قانونی، مانند نمایندگی فروش و دلالی را با فعالیت هرمی (سلسله‌ای از عضوگیری‌های جدید) خلط می‌کنند. فریب اساسی که هم در طرحهای هرمی و هم در نامه‌های زنجیره‌ای وجود دارد آن است که بسیاری از عضوشدگان نمی‌توانند برای جبران سرمایهٔ اولیهٔ خود به اندازهٔ کافی عضو جدید جذب کنند چه برسد به اینکه سودی ببرند زیرا مجموعهٔ اعضای جدیدِ بالقوه به سرعت به پایان می‌رسد. راهی برای اثبات این مطلب، استفاده از «تصاعد هندسی» به منظور نشان دادن این حقیقت است که حتی اگر کل جمعیت ایالات متحدهٔ آمریکا در این طرح شرکت کنند، با این فرض که هر عضو در هر ماه دو نفر را به عضویت در آورد، کل جمعیت در کمتر از ۲ سال به عضویت این طرح در می‌آید. هر چند این استدلال در بعضی از موارد با موفقیت روبه‌رو بوده است یک دادگاه فرجام که در این مورد در آمریکا برگزار شد این نوع استدلال را رد کرد و آن را خیلی دور از حقایق موجود در دنیای واقعی دانست [۸] زیرا یک شرکت فعال در این زمینه تنها توانسته بود چند هزار نفر را در مدت ۹ سال فعالیت خود جذب کند.

نقش مدلهای ریاضی در اقامهٔ دعوا علیه این‌گونه فعالیتها این است که به دادگاه ثابت کنند وعده‌هایی که سازمان‌دهندگان چنین برنامه‌هایی می‌دهند ذاتاً فریبکارانه است و از لحاظ ریاضی، کسب پولهای هنگفتی که در بروشورهای تبلیغاتی وعده داده شده است برای اکثر شرکت‌کنندگان در طرح امکان‌پذیر نیست، و در واقع بیشتر آنها تمام یا قسمتی از سرمایهٔ اولیهٔ خود را از دست می‌دهند.

دو مدلی که در این مقاله به توصیف آنها می‌پردازیم برای اثبات فریبکاریِ نهفته در یک طرح هرمی سهمیه‌ای (که در آن برای تعداد افراد عضوشونده کران بالایی وجود دارد) و یک نامهٔ زنجیره‌ای که در آن هر عضو می‌تواند حداکثر دو نامه بفروشد (مگر اینکه بیش از یک نامه خریداری کند)، طراحی شده است. این دو مدل نشان می‌دهد که درآمد بالقوهٔ فرد شرکت‌کننده در این طرح وابسته به زمان عضو شدن آن فرد در این فرایند است و علاوه بر این نشان می‌دهد که هر چند درصد کمی از اعضا (افرادی که در همان مراحل ابتدایی طرح به عضویت درآمده‌اند) پولی به‌دست خواهند آورد، بیشتر اعضا سرمایهٔ اولیه خود را از دست خواهند داد. بنابراین، سرمایه‌گذاران طرح هرمی، در مجموع، مغبون می‌شوند. اهمیت اثبات این مطلب در آن است که ترتیب‌دهندگان این برنامه‌ها در جریان محاکمه یا دادرسی وجود همان برندگان معدود را برای اثبات ادعای خود مطرح می‌کنند. از آنجایی که استدلالهای ریاضی در این زمینه در جای دیگر([۴] و [۷]) ارائه شده است، ما به توصیف مدلها و نتایج مهمی که اتهام فریبکاری را ثابت می‌کنند می‌پردازیم.

۱. طرح هرمی سهمیه‌ای

یک دعوای حقوقی در ایالت کنتیکات[۱۳] حاکی از یک طرح هرمی سهمیه‌ای است. نمایندگی فروش یک «کتاب طلایی اعتبارات»[1] به مبلغ ۲۵۰۰ دلار به مردم عرضه شد. نمایندگان قرار بود به‌ازای درج هر آگهی به مبلغ ۱۹۵ دلار به هر بازرگان، نیمی از آن را به‌عنوان کمیسیون دریافت کنند. هر آگهی‌دهنده قرار بود کالا یا خدمتی را با تخفیف عرضه کند، به‌طوری که در نهایت کتابی دربرگیرندهٔ ۵۰ تا ۱۰۰ کوپن تخفیف، به قیمت هر کتاب ۱۵ دلار، به عموم عرضه شود که از این مبلغ، ۱۲ دلار نصیب نماینده می‌شد. به‌علاوه، هر نماینده این حق را داشت که نمایندگان دیگر را به کار جلب کند و به‌ازای جذب هر نمایندهٔ جدید ۹۰۰ دلار دریافت دارد. به‌وضوح، سودآورترین جنبهٔ این تجارت، جذب نمایندگان دیگر بود. علاوه بر این، در بروشورهای تبلیغاتی قید شده بود که هر فروشنده باید بتواند در هر ماه دو نفر دیگر را به عضویت طرح درآورد، و از این راه در طول یک‌سال مبلغ ۲۱۶۰۰ دلار عاید فروشنده می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که اکثر شرکت‌کنندگان در این طرح توانایی جذب ۳ عضو جدید، به‌منظور جبران سرمایهٔ اولیه خود یعنی ۲۵۰۰ دلار را نخواهند داشت چه رسد به اینکه سودی ببرند. به‌منظور مدل‌بندی تعداد اعضای جدیدی که امکان جذب آنها توسط هر یک از شرکت‌کنندگان وجود دارد، kامین فرد واردشونده به طرح و شانس او برای جذب عضو جدید یعنی $(k+1)$امین واردشونده را در نظر بگیرید. با فرض آنکه همهٔ k شرکت‌کننده شانس برابر دارند، kامین واردشونده با احتمال $1/k$، $(k+1)$امین عضو جدید را جذب گروه می‌کند. با استدلال مشابهی می‌توان گفت که kامین واردشونده با احتمال $1/i$، $(i+1)$امین عضو جدید را که $i = k, \ldots, N-1$، جذب می‌کند که N حد سهمیه‌ای است. بنابراین، تعداد اعضای جدیدی که kامین شرکت‌کننده جذب می‌کند از طریق فرمول

$$S_k = \sum_{i=k}^{N-1} X_i \qquad (1)$$

به‌دست می‌آید که در آن X_iها متغیرهای تصادفی برنولی هستند که با احتمالهای $1/i$ و $1-\frac{1}{i}$ به‌ترتیب مقادیر ۱ و ۰ را می‌گیرند. بنابر (۱)، تعداد مورد انتظار اعضای جدیدی که kامین شرکت‌کننده جذب می‌کند، از فرمول $\sum_{i=k}^{N-1} i^{-1} \simeq \ln[(N-1/2)/(k-1/2)]$ به‌دست می‌آید و از این‌رو زمانی‌که $k \geq N/e \simeq 0{,}37N$ برقرار باشد، kامین شرکت‌کننده نمی‌تواند انتظار جذب بیش از یک نفر را داشته باشد. به‌طور مشابه، موقعیت ورودی (k) برای اینکه شخص بتواند انتظار داشته باشد اعضای جدیدی به تعدادکافی جذب کند تا مبلغ ورودی‌اش را باز یابد چنین به‌دست می‌آید: $E(S_k) = 25/9$ یا $k \simeq N/16{,}08$. بنابراین، تنها ۱/۱۶ از کل شرکت‌کنندگان قبل از این مرحلهٔ «سربه‌سر» به عضویت در می‌آیند.

روشی دیگر برای نشان دادن اینکه فردی که بعد از مرحلهٔ $k \geq N/16{,}08$ عضو زنجیره می‌شود شانس کمی برای جذب اعضای جدید به‌منظور جبران سرمایهٔ اولیه خود دارد، محاسبهٔ $P(S_k \geq 3)$ است. با فرض مستقل بودن X_iها در فرمول (۱) (یعنی اینکه موفقیت یا شکست در یک عضوگیری جدید، تأثیری در عضوگیری بعدی نداشته باشد)، S_k مجموع متغیرهای تصادفی برنولی مستقلی است که با احتمال $1/i$ به سمت صفر میل می‌کنند و از این‌رو S_k را می‌توان به‌طور تقریبی توسط قانون پواسون[۵] توصیف کرد. کار قبلی ما[۷] بر اساس تقریبهای پواسون[۵] برای محاسبهٔ $P(S_k \geq r)$ و به‌دست آوردن کران بالایی([۹] و [۱۵]) برای این احتمالها بود. ولی توزیع دقیق S_k از طریق روشهای مطرح‌شده در[۱۴] به‌دست می‌آید. به‌خصوص، احتمالهای ذکرشده در زیر از اهمیت خاصی برخوردارند:

$$P(S_k = 0) = (k-1)/(N-1) \qquad \text{(۲الف)}$$

$$P(S_k = 1) = (k-1)(N-1)^{-1} \sum_{i=k-1}^{N-2} i^{-1} \qquad \text{(۲ب)}$$

$$P(S_k = 2) = [(k-1)(N-1)^{-1}] \left\{ \left(\sum_{i=k-1}^{N-2} i^{-1} \right)^2 - \sum_{i=k-1}^{N-2} i^{-2} \right\} / 2 \qquad \text{(۲پ)}$$

$$P(S_k = 3) = [(k-1)(N-1)^{-1}] \left\{ \left(\sum_{i=k-1}^{N-2} i^{-1} \right)^3 - 3 \left(\sum_{i=k-1}^{N-2} i^{-1} \right) \left(\sum_{i=k-1}^{N-2} i^{-2} \right) + 2 \sum_{i=k-1}^{N-2} i^{-3} \right\} / 3!. \qquad \text{(۲ت)}$$

این احتمالات که در جدول ۱ داده شده‌اند حاکی از آن هستند که $P(S_k \geq 3)$

1. Golden Book of Values

جدول ۱ تعداد مورد انتظار افرادی که هر شرکت‌کننده به عضویت در می‌آورد و احتمال به عضویت درآوردنِ دستکم ۲ یا ۳ فرد جدید ($N = ۲۷۰$).

موقعیت ورودی (k)	تعداد مورد انتظار عضوشوندگان	احتمال جذب دستکم r عضو	
		$r = ۲$	$r = ۳$
۱۰	۳٫۳۹۸	۰٫۸۵۱۰	۰٫۶۵۳۶
۳۰	۲٫۲۲۷	۰٫۶۵۰۴	۰٫۳۸۰۹
۶۰	۱٫۵۱۷	۰٫۴۴۶۵	۰٫۱۹۳۳
۹۰	۱٫۱۰۶	۰٫۳۰۱۹	۰٫۰۹۹۴
۱۳۵	۰٫۶۹۷	۰٫۱۵۳۸	۰٫۰۳۳۱
۱۸۰	۰٫۴۰۷	۰٫۰۶۲۹	۰٫۰۰۸۱

یعنی احتمال جبران سرمایهٔ یک عضو با چه سرعتی با افزایش k تنزل می‌یابد. به‌خصوص وقتی که هرم به یک‌سوم حد خود می‌رسد، شخص واردشونده طی این فرایند، با احتمال کمتر از ۱۰٪ توانایی جبران سرمایه اولیهٔ خود را دارد. با مشخص بودن $P_k(۰)$ در (۲الف) که بیانگر احتمال عدم جذب حتی یک نفر توسط واردشوندهٔ kام است، نسبت تعداد شرکت‌کنندگانی که کل سرمایهٔ اولیه خود را از دست می‌دهند کسر

$$N^{-۱}\sum_{k=۲}^{N}(k-۱)(N-۱)^{-۱} = ۱/۲$$

است. همین‌طور، نسبت تعداد شرکت‌کنندگانی که حداکثر ۱ یا ۲ نفر را جذب می‌کنند، از رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آید. گستورث نشان داده است که به‌ازای مقادیر بزرگ N، نسبت مورد انتظار تعداد شرکت‌کنندگانی که حداقل r را جذب زنجیره می‌کنند، ۲^{-r} است (برای اثباتی مبتنی بر نظریهٔ گرافها، مراجعه شود به[۱]). نتایج فوق نشان می‌دهند که سرمایه‌گذاران، به‌عنوان یک گروه، مغبون می‌شوند زیرا تنها برای ۱/۸ از کل شرکت‌کنندگان انتظار بازیافتن سرمایه از طریق جذب ۳ یا بیشتر از ۳ عضو جدید وجود دارد، در حالی‌که ۱/۲ از آنها کسی را جذب نخواهند کرد.

این بخش را با بیان نتیجهٔ جدیدی که عملیات هرمی چند سطحی را تحلیل می‌کند، خاتمه می‌دهیم[۶]. این عملیات هر یک از اعضا را قادر می‌سازد که زیرشاخهٔ خود را تا زمانی که تعداد از پیش مشخصی خریدار جدید را جذب کند، اداره نماید. هر مدیر، حق کمیسیونی هم از فروش و هم از جذب اعضای جدید توسط «اخلاف»اش دریافت می‌دارد یعنی از اعضای جدیدی که خود جذب کرده و از اعضایی که بعدیها جذب می‌کنند. آن فرد، بسته به موفقیت اخلافش، (مثلاً بعضی از آنها ممکن است مدیر تراز اول شوند) می‌تواند به مدیریت تراز بالاتری ارتقا یابد که همواره با دریافت کمیسیونی از طریق فروشهای او و اعضای جدیدی که بعدیها جذب کرده‌اند همراه است. سیستم [۸] از این نوع بود.

فرض کنید $D_{k,n}$ بیانگر تعداد اخلافِ فرد واردشوندهٔ kام بعد از n عضو جدید باشد. هنگامی که kامین واردشونده، مبلغ ورودی خود را پرداخت می‌کند، $(k-۱)$ شرکت‌کننده برای جذب $(N-k)$ خریدار جدید باقیمانده، با هم رقابت می‌کنند. kامین شرکت‌کننده را یک توپ آبی در ظرفی که حاوی $(k-۱)$ توپ قرمز است در نظر بگیرید. در هر مرحله (جذب عضو جدید) یک توپ به‌طور تصادفی بیرون کشیده می‌شود و با قرار دادن مجدد آن در ظرف، توپ دیگری از همان رنگ (خریدار جدید) برداشته می‌شود. بعد از n برداشت (عضوگیری جدید) ترکیب محتویات ظرف (تعداد اخلاف فرد واردشوندهٔ kام برابر با تعداد توپهای آبی است) توسط توزیع پولیا_اگن برگر[۱۲]

$$P(D_{k,n} = j) = \binom{n}{j}\frac{۱^{[j]}(k-۱)^{[n-j]}}{k^{[n]}} \qquad (۳)$$

بیان می‌شود که در آن $x^{[r]} = x(x+۱)-(x+r-۱)$. با قرار دادن $n = N-k$ در عبارت (۳) توزیع D_k به‌دست می‌آید یعنی تعداد اخلاف kامین شرکت‌کننده وقتی حد n به N می‌رسد، یعنی

$$P(D_k = j) = (k-۱)(N-k-j)^{[j]}/(N-j-۱)(N-j)^{[j]}\,.$$

از این‌رو میانگین و واریانس D_k عبارت‌اند از

$$E(D_k = j) = k^{-۱}(N-k),$$
$$\mathrm{Var}(D_k) = k^{-۱}(N-k)\{۱+۲(k+۱)^{-۱}$$
$$(N-k-۱)-k^{-۱}(N-k)\}\,.$$

اطلاعات بیشتر راجع به توزیع D_k با در نظر گرفتن رفتار مجانبی آن وقتی $N\to\infty$ و k/N به γ، $۱ > \gamma > ۰$، میل می‌کند به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۱. توزیع تعداد اخلاف kامین فرد واردشونده به فرایند هرمی وقتی N شرکت‌کننده وجود دارد به سمت توزیع هندسی

$$P(D = j) = \gamma(۱-\gamma)^j, \quad j = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

میل می‌کند هنگامی که $N\to\infty$ و $k/N \to \gamma \in (۰, ۱)$.

از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که هرگاه یک داوطلب جدید در زمانی که تنها ۱/۳ ظرفیت نهایی هرم پر شده ($\gamma = ۱/۳$) به عضویت در آید، تقریباً ۳۰ درصد احتمال دارد که تعداد اخلافش ۳ یا بیشتر از ۳ شود (با تعداد خیلی کمتری عضوگیری جدید مستقیم).

۲. یک طرحِ نامهٔ زنجیره‌ای باقابلیت پذیرش مجدد ورودی

در سال ۱۹۷۹ یکی از نویسندگان این مقاله با دادستان ایالت ایلی‌نوی به بحث پرداخت تا ببینند که آیا مدل گستورث برای طرح هرمی که در بخش ۱ مورد بررسی قرار گرفت می‌تواند با نامه‌ای زنجیره‌ای که در آن زمان رواج داشت، سازگار باشد یا خیر.

این نامهٔ زنجیره‌ای تابع همان الگوی معمولی بود که در مقدمه بیان شد با این قید که هر یک از شرکت‌کنندگان می‌تواند تنها دو نامه بفروشد مگر اینکه نامهٔ جدیدی خریداری کند و دوباره وارد زنجیر شود. چون هر شرکت‌کننده

می‌توانست با فروش دو نامه، هرکدام به مبلغ x دلار، $۲x$ دلار سرمایهٔ اولیهٔ خود را جبران کند، سازمان‌دهندگان این برنامه مدعی بودند که بسیاری از شرکت‌کنندگان با خرید نامهٔ جدید به‌منظور کسب سود بیشتر دوباره وارد زنجیره می‌شوند و این حقیقت ساده را که مجموعهٔ شرکت‌کنندگان متناهی خواهد بود، نادیده می‌گرفتند.

اکنون برای این طرح، مدل مارکوف ناهمگنی را توصیف می‌کنیم و آن را وقتی n (تعداد شرکت‌کنندگان) بزرگ است، به کمک یک فرایند پخش تقریب می‌زنیم. در هر مرحله، اعضای زنجیره برحسب تعداد نامه‌هایی که فروخته‌اند به سه دستهٔ ۰، ۱، و ۲ تقسیم می‌شوند. فرض کنید U_k، V_k، و W_k نشان‌دهندهٔ تعداد اعضا در این سه دسته در kامین مرحله هستند که الحاق‌شوندگانِ مجدد به‌ازای هر ورودی جداگانه شمرده می‌شوند. تصور کنید به‌ازای $c \geq ۱$، $(U_۰, V_۰, W_۰) = (c, ۰, ۰)$ تعداد فعالانی باشد که کار فروش را آغاز کرده‌اند. به دو نکتهٔ زیر توجه کنید. هنگامی که نامه‌ای فروخته می‌شود:

(i) تعداد کل شرکت‌کنندگان، $U_k + V_k + W_k$، به اندازهٔ ۱ واحد افزایش می‌یابد.

(ii) داریم $U_{k+۱} - U_k = W_{k+۱} - W_k = ۱$ اگر شخصی که در دستهٔ ۱ قرار دارد نامه بعدی را بفروشد (فروشندهٔ نامه جزو دستهٔ ۲ می‌شود و خریدار جدید در دستهٔ ۰ قرار می‌گیرد) یا $U_{k+۱}-U_k = W_{k+۱}-W_k = ۰$ اگر شخصی از دستهٔ ۰ نامهٔ بعدی را بفروشد (فروشنده جزو دستهٔ ۱ می‌شود اما تعداد افراد دستهٔ ۰ با خریدار جدید تغییر نمی‌کند).

V_k و W_k برحسب U_k در فرمولهای زیر بیان شده‌اند

$$V_k = k + ۲c - U_k, \qquad W_k = U_k - c. \tag{۴}$$

در kامین مرحله، $U_k + V_k$ شرکت‌کننده برای فروش نامهٔ بعدی به رقابت می‌پردازند و فرض ما بر این است که همگی آنها شانس موفقیت یکسانی دارند. از این‌رو $\{U_k, k = ۰, ۱, ۲, \dots\}$ زنجیرهٔ مارکوفی است که با $U_۰ = c$ شروع می‌شود و احتمالهای تغییر وضعیت به‌صورت زیرند

$$\begin{aligned} P[U_{k+۱} = u \mid U_k = u] &= ۱ \\ - P[U_{k+۱} = u+۱ \mid U_k = u] &= u/(k+۲c-u) \end{aligned} \tag{۵}$$

زیرا $U_{k+۱} - U_k$ به‌ترتیب با احتمالهای شرطی $U_k/(U_k+V_k)$ و $V_k/(U_k+V_k)$ یا ۰ است یا ۱، و بنابه (۴)، $U_k + V_k = k + ۲c - U_k$.

این فرایند تنها تا زمانی ادامه دارد که تعداد فروشندگان، $U_k + V_k$، کوچک‌تر از n باشد و $V_k \geq ۰$. بنابه رابطهٔ (۴) باید

$$k - n + ۲c < U_k \leq (k/۲) + c \tag{۶}$$

برقرار باشد تا زنجیر ادامه یابد. این نتیجه نشان می‌دهد که چنین فرایندی نمی‌تواند بیش از $۲n - ۲c$ مرحله ادامه یابد. در نتیجه، حداکثر $۲n/۶۴$ از nشرکت‌کننده می‌توانند با قرارگرفتن در بالای فهرست ۶۴ نامهٔ فروخته‌شده، به بیشترین سود دست یابند. پایان فرایند به محض نقض اولین نابرابری در (۶)، رخ می‌دهد. این شرط زمان توقف را چنین توضیح می‌کند

$$K_n = \min\{k \mid U_k \leq k - n + ۲c\}$$

که K_n تعداد کل نامه‌های فروخته‌شده در پایان فرایند است. این تعداد و کسر U_{k_n}/K_n ازکل خریدارهایی که تمام سرمایهٔ اولیه خود را از دست می‌دهند اهمیت آشکاری دارند.

اکنون به مطالعهٔ همگرایی ضعیفی از نوعی $\{U_k\}$ که به طرز مناسبی نرمال‌شده می‌پردازیم تا نتایجی مجانبی در ارتباط با K_n و U_{K_n} وقتی n بزرگ است به‌دست آوریم. ابتدا روند بلندمدت در $\{U_k\}$ را در نظر بگیرید. چون احتمال اینکه $U_k - U_{k-۱} = ۱$، برابر $U_k/(U_k+V_k)$ است، اگر قرار بود که فرایند به تعادل برسد، وقتی $k \to \infty$، $U_k/(U_k+V_k)$ به ثابتی، مثلاً α، میل می‌کرد. همچنین U_k/k نسبت نمونه‌ای $\{U_۱ - U_{i-۱}, i \leq k\}$ است که برابر ۱ است. با برابر قرار دادن U_k/k با احتمال بلند مدت (۵)،

$$\begin{aligned} \alpha \simeq E[U_{k+۱} - U_k \mid U_k] &= (k+۲c-۲U_k)/(k+۲c-U_k) \\ &\simeq (۱-۲U_k/k)/(۱-U_k/k) \simeq (۱-۲\alpha)/(۱-\alpha) \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. بنابراین α باید در

$$(۱-۲\alpha)/(۱-\alpha) = \alpha \quad \text{یا} \quad \alpha = (۳-\sqrt{۵})/۲ = ۰٫۳۸۲ \tag{۷}$$

صدق کند. برای به‌دست آوردن فرایند حدی، فرض می‌کنیم $X_k = U_k - c - k\alpha$ و $\{\xi_n(t), ۰ \leq t \leq ۲\}$ را با توسیع

$$\xi_n(k/n) = X_k/\sqrt{n}, \quad k = ۰, ۱, \dots, ۲n$$

با درونیابی خطی تعریف می‌کنیم. به‌طورکلی، به‌ازای $۰ \leq t \leq ۲$، با تلقی nt به‌عنوان عدد صحیح، داریم

$$\xi_n(t) = X_{nt}/\sqrt{n} = (U_{nt} - c - n\alpha t)/\sqrt{n}, \quad ۰ \leq t \leq ۲. \tag{۸}$$

رفتار حدی $\{\xi_n(t)\}$ وقتی $n \to \infty$ برحسب میانگین و واریانس شرطی آهنگ تغییر آن از زمان t تا $t + (۱/n)$ قابل درک است. با استفاده از (۵) و (۸)، این نتایج را به‌صورت

$$\left.\begin{aligned} m_n(t,x) &= nE[\xi_n(t+(۱/n)) - x \mid \xi_n(t) = x] \\ &= \sqrt{n}h_{nt}(\sqrt{n}x) \\ v_n(t,x) &= n\mathrm{Var}[\xi_n(t+(۱/n)) - x \mid \xi_n(t) = x] \\ &= \alpha(۱-\alpha) + (۱-۲\alpha)h_{nt}(\sqrt{n}x) \end{aligned}\right\} \tag{۹}$$

به‌دست می‌آوریم که در آن به‌ازای nهای بزرگ و با استفاده از (۷)،

$$\begin{aligned} h_{nt}(\sqrt{n}x) &= [(۲-\alpha)\sqrt{n}x + c\alpha]/[\sqrt{n}x - \{nt(۱-\alpha) + c\}] \\ &= n^{-۱/۲}[-((۲-\alpha)/(۱-\alpha)) \cdot (x/t) + o(۱)] \end{aligned}$$

بنابراین (۹) به‌صورت

$$m_n(t,x) \simeq -((۲-\alpha)/(۱-\alpha))(x/t), \qquad v_n(t,x) \simeq \alpha(۱-\alpha)$$

تقریب زده می‌شود. از این نتیجه چنین مستفاد می‌شود که $\{\xi_n(t)\}$ به یک فرایند پخش با این ویژگیهای بینهایت‌کوچکی میل می‌کند. بر مشکل آشکاری که در نزدیکی $t = 0$ وجود دارد با در نظر گرفتن توزیع شرطی $\{\xi_n(t), \epsilon \le t \le 2\}$ به شرط $\xi_n(\epsilon) = x$ می‌توان فائق آمد که شکل حدی آن به توسط باتاچاریا و گستورث با استفاده از قضیه‌ای از استروک و وارادان [۱۶] به‌دست آمده است که در زیر آن را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۲. به‌ازای $\epsilon > 0$، فرایند شرطی $\{\xi_n(t), \epsilon \le t \le 2\}$ به شرط $\xi_n(\epsilon) = x$ به‌طور ضعیف به یک فرایند پخش‌مانند $\{\xi(t), \epsilon \le t \le 2\}$ همگراست که به توسط معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی

$$d\xi(t) = -(\beta_1/t)\xi(t)dt + \sqrt{\beta_2}dW(t), \quad \epsilon \le t \le 2 \qquad (10)$$

توصیف می‌شود که در $\xi(\epsilon) = x$ آغاز می‌شود و در آن

$$\beta_1 = (2-\alpha)/(1-\alpha), \quad \beta_2 = \alpha(1-\alpha)$$

و $W(t)$ فرایند وینر استاندارد است. این همگرایی برای xهای واقع در بازه‌های کراندار، یکنواخت است. به‌علاوه، دنبالهٔ تنگ[1] است.

بنابر نتیجه‌ای از آرنولد [۲]، معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (۱۰) دارای جواب

$$\xi(t) = (\epsilon/t)^{\beta_1}x + \sqrt{\beta_2}\int_\epsilon^t (s/t)^{\beta_1} dW(s)$$

است. بنابر قضیهٔ ۲، $\xi_n(t)$ به شرط $\xi_n(\epsilon) = x$ به توزیعی نرمال با میانگین $(\epsilon/t)^{\beta_1}x$ و واریانس $\beta_2 t(2\beta_1+1)^{-1}\{1-(\epsilon/t)^{2\beta_1+1}\}$ میل می‌کند. با فرض $\epsilon \to 0$، به کمک استدلالهایی متعارف نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۳. وقتی $n \to \infty$، $\xi_n(t)$ مجانباً نرمال با میانگین ۰ و واریانس $\beta_2 t/(2\beta_1+1)$ است.

این نتیجه نشان می‌دهد که به‌ازای kهای بزرگ، کسر $k^{-1}U_k$ مربوط به شرکت‌کنندگانی که هیچ نامه‌ای نفروخته‌اند، تقریباً نرمال است با میانگین $\alpha = 0.382$ و انحراف استاندارد $0.195/\sqrt{k} = (\beta_2(2\beta_1+1)^{-1}/k)^{1/2}$.

برای بررسی وضعیت فرایند در موقع توقف (در لحظهٔ K_n)، به خاطر بیاورید که $U_k \simeq k\alpha$ به‌طوری که با احتمال زیاد، $K_n \simeq n(1-\alpha)^{-1}$. این استدلال در[۴] به‌صورت دقیق درآمده است که در آن روشهای انسکامب [۱] و باتاچاریا و مالليک [۳] برای اثبات نتیجهٔ زیر به‌کار گرفته شده‌اند.

قضیهٔ ۴. وقتی $n \to \infty$،

(الف) $n^{-1/2}X_{K_n}$ مجانباً نرمال است با میانگین ۰ و واریانس $\beta_2(2\beta_1+1)^{-1}(1-\alpha)^{-1}$، و

(ب) $n^{-1/2}[K_n - n(1-\alpha)^{-1}]$ مجانباً نرمال است با میانگین ۰ و واریانس $\beta_2(2\beta_1+1)^{-1}(1-\alpha)^{-3}$.

قضیهٔ ۴ نشان می‌دهد که اگر تعداد شرکت‌کنندگان بالقوه n باشد (n بزرگ)، آنگاه به احتمال زیاد، فرایند وقتی تقریباً $1.62n$را نامه فروخته شده

1. tight

جدول ۲ کرانهایی برای احتمالهای فزون‌شدِ تعداد اخلاف ξ_kی kامین شرکت‌کننده

$\beta(1-\alpha) \simeq k/K_n$	$P(\xi_k \ge 7)$	$P(\xi_k \ge 126)$
۰٫۱۰۰	۱	۰٫۱۴۳
۰٫۲۰۰	۱	۰٫۰۶۳
۰٫۳۳۳	۰٫۵۷۱	۰٫۰۳۲
۰٫۵۰۰	۰٫۰۶۷	۰٫۰۰۴

باشد، خاتمه می‌یابد اگر همهٔ کسانی که ۲ نامهٔ خود را فروخته‌اند، مجدداً ملحق شوند. به‌علاوه در هنگام خاتمهٔ فرایند تقریباً ۶۱٫۸٪ از بین n فرد در تلاش خواهندبود که ۲ نامهٔ خود را بفروشند و $2x$ دلارکسری خواهند داشت، و ۳۸٫۲٪ از آنها در تلاش خواهند بود که ۱ نامه بفروشند و x دلار کسری خواهند داشت.

از آنجا که عایدی شرکت‌کننده وابسته به تعداد عضوهای جدیدی که او می‌گیرد و تعداد عضوهای جدید بعدی است که دستهٔ اخیر می‌گیرند، ξ_k یعنی تعداد همهٔ اخلاف kامین عضو جدید، مورد توجه است. آشکار است که حداقل ۷ خلف لازم است تا سودی عاید شود و ۱۲۶ خلف لازم است تا از ۶۴ نفر واردشونده آتی پولی دریافت شود. در[۴]، کران بالایی برای $E(\xi_k)$ ارائه کرده‌ایم که از روی آن بنابه نابرابری مارکوف کرانهای بالایی برای $P(\xi_k \ge 7)$ و $P(\xi_k \ge 126)$ به‌دست می‌آیند. جدول۲ برخی نتایج عددی را ارائه می‌دهد. در تفسیر این عددها، توجه کنید که برای kامین واردشونده، احتمال گرفتن پول از ۶۴ نفر از $P(\xi_k \ge 126)$ کمتر و احتمال بردن سود از $P(\xi_k \ge 7)$ کمتر است.

نتایج یک بررسی شبیه‌سازی با $n = 500$ و $n = 200$ شرکت‌کننده نشان داد که احتمالهای پیشامدهای بالا حتی نومیدکننده‌ترند. شرکت‌کنندگانی که وقتی این زنجیره ۱۰٪ اندازهٔ نهایی‌اش را داشت، وارد آن شدند تنها در ۶٪ موارد پول زیادی (۵۰۰۰ دلار یا بیشتر) به‌دست آوردند و در حدود نصف موارد، هیچگونه دریافتی نداشتند. با این حال، این بررسی شبیه‌سازی نشان داد که نتایج مجانبی قضیه‌های ۳ و ۴ وقتی $n = 500$، کاملاً پرمعنی هستند.

نکتهٔ آخر

اخیراً دادگاه فرجام ایلینوی[1] [۱۰] در رأی خود، ترتیب‌دهندگان [این نوع زنجیره‌ها] را بر اساس «قانون اعمال تجاری متقلبانه و فریبکارانه»[2] در مورد مصرف‌کنندگان متخلف شناخت و متذکر شد که «فریب از آنجا ناشی می‌شود که زنجیرهٔ ظاهراً پایان‌ناپذیر باید پایانی داشته باشد».

مراجع

1. ANSCOMBE, F. J. 1952. Large-Sample Theory of Sequential Estimation. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **48**, 600-607.

2. ARNOLD, L. 1974. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications.* John Wiley & Sons, New York.

1. Illinois Appellate Court
2. Consumer Fraud and Deceptive Business Practices Act

3. BHATTACHARYA, P. K., and A. MALLIK. 1973. Asymptotic Normality of Stopping Times of Some Sequential Procedures. *Ann. Statist.* **1**, 1203-1209.

4. BHATTACHARYA, P. K., and J. L. GASTWIRTH. 1983. A Nonhomogeneous Markov Model of a Chain-Letter Scheme. In *Recent Advances in Statistics: Papers in Honor of Herman Chernoff*, M. H. Rizvi, J. S. Rustagi and D. Siegmund (eds.) Academic Press, New York.

5. FELLER, W. 1966. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II.* John Wiley & Sons, New York.

6. FEORE, J. 1974. Pyramid Scheme: Dare to Be Regulated. *Georgetown Law J.* 1257-1293.

7. GASTWIRTH, J. L. 1977. A probability model of a pyramid scheme. *Am. Statist.* **31**, 79-82.

8. *Ger-ro-Mar, Inc.* v. *FTC* 1975. 518 F 2d 33.

9. HODGES, J. L., JR., and L. LE CAM. 1960. The Poisson Approximation to the Poisson Binomial Distribution. *Ann. Math. Statist.* **31**, 737-740.

10. HOLPF, 1984. Memorandum of Decision: *State of Illinois* v. *Walsh and Woolbright*. Docket No. 82-1044 (2nd District).

11. MEIR, A., and J. W. MOON. 1978. Path Edge-Covering Constants for Certain Families of Trees. *Util. Math.* **14**, 313-333.

12. JOHNSON, N., and S. KOTZ. 1977. *Urn Models and Their Application: An Approach to Modern Discrete Probability Theory.* John Wiley & Sons, New York.

13. NARUK, H. 1975. *Memorandum of Decision: State of Connecticut vs. Bull Investment Group.* 32 Conn. Sup. 279.

14. PERCUS, O. E. 1983. Forthcoming Technical Report, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.

15. SERFLING, R. J. 1978. Some Elementary Results on Poisson Approximation in a Sequence of Bernoulli Trials. *SIAM Rev.* **20**, 567-579.

16. STROOK, D. W., and S. R. S. VARADHAN. 1969. Diffusion Processes with Continuous Coefficients II. *Comm. Pure Appl. Math.* **22**, 479-530.

* * * * * *

• J. L. Gastwirth, P. K. Bhattacharya, "Two probability models of pyramid or chain letter schemes demonstrating that their promotional claims are unreliable", *Operations Research* (3) **32** (1984) 527-536.

* جی. ال. گستورث، دانشگاه جورج واشنگتن، آمریکا
پی. کی. باچاتاریا، دانشگاه کالیفرنیا، دیویس، آمریکا