جان کلام در نظریهٔ انـدازه*

جوزف کوپکا*

I. ریشه‌ها

۱. نظریهٔ ریاضی اندازه چیست؟

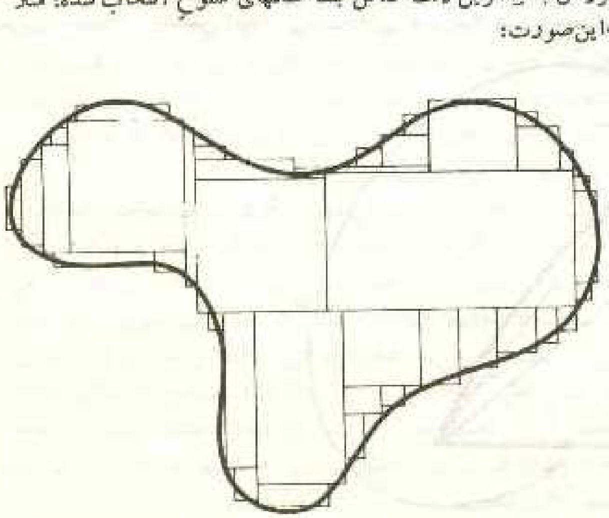
فن و دانش اندازه‌گیری ــ که همانا به‌کارگیری عدد برای توصیف میزان یك‌صفت یا کیفیت دریك شیء است ــ یکی از ستونهای اصلی علم جدید، و شاید هرجامعهٔ متمدن را تشکیل می‌دهد. طول، سطح، و حجم از جملهٔ اولین کیفیتهایی هستند که به‌طور اصولی مورد اندازه‌گیری قرار می‌گرفته‌اند. دانستن مساحت یك قطعه زمین به پیش‌بینی میزان محصول آن و یا تخمین نیروهای دشمنی که برروی آن اردو زده است، کمك می‌کند.

اغلب تمدنهای قدیم به‌مفهوم اساسی واحدهای اندازه‌گیری دست‌یافته بودند. مثلاً، واحد طول مصریها ذراع نامیده می‌شد. مصریها در سرزمینهای وسیع نسبتاً همواری می‌زیستند، و به‌نظر می‌رسد که اکثرآزمینهای‌خود را به‌قطعات مستطیل‌شکلی تقسیم می‌کردند که مساحتهایشان اعداد صحیحی برحسب ذراع مربع بود. برخلاف آنان، یونانیان قدیم ساکن نواحی تپه‌ای بودند و زمینهای هموار اندکی برای کشاورزی دراختیار داشتند. آنها نیاز داشتند که مساحت زمینهای جوراجوری را که از قبل شکل گرفته بودند تعیین و آنهارا باهم مقایسه کنند. این وضعیت جغرافیایی توأم با تهدیدنظامی مستمر اقوام پارسی از مشرق، علت عمدهٔ پیچیدگی بسیار زیاد ریاضیات یونانی نسبت به ریاضیات مصری به‌شمار می‌آید؛ و اندازه‌گیری، نه به‌مفهوم امروزی آن‌که انتساب یك عدد به‌یك شیء باشد، بلکه به‌مفهوم ایجاد روابط دقیق بین کمیتهای گوناگون (عمدتاً طول و سطح)، یکی‌از وجوه اساسی ریاضیات آنهاست. شاید دراین زمینه، رابطهٔ $a^{2}+b^{2}=c^{2}$ درقضیهٔ فیثاغورث مشهورترین مثال باشد. یونانیها به‌این رابطه به‌عنوان تساوی دو مساحت می‌نگریستند.

نظریهٔ ریاضی‌اندازه، شاخه‌ای است از ریاضیات جدید، راجع به‌قواعد اصولی اندازه‌گیری اشیاء پیچیده یا نامنظم، درحالتی که نحوهٔ اندازه‌گیری اشیاء ساده ازقبل معلوم باشد. ایدهٔ اصلی نهفته درآن، ریشهٔ عمیق تاریخی دارد که به‌یك روش ابداعی یونانیان برمی‌گردد.

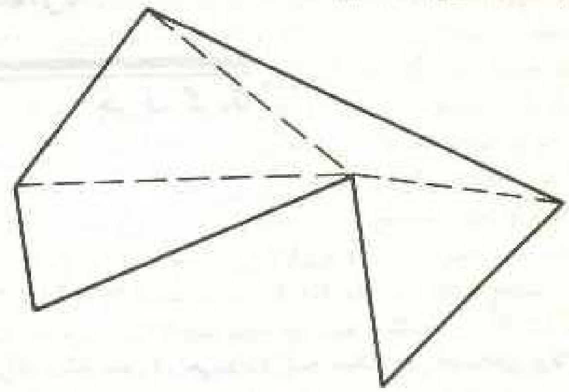
۲. از اقلیدس تا ارشمیدس: روش سنگفرشی

اصول هندسهٔ‌اقلیدس، اولین‌اثربزرگ ریاضی، حدود ۳۰۰سال‌قبل‌از میلاد نوشته شد. این کتاب حاوی نتایج بسیاری دربارهٔ مساحت مستطیل و مثلث (یا به‌زبان دقیقتر، دربارهٔ نواحی محصور به‌این شکلها) است. اینها «اشیاء سادهٔ» مبحث اندازه‌گیری مساحت‌محسوب می‌شدند. ریاضیدانان یونانی برای تعیین مساحت نواحی پیچیده‌تر تعمیمی ماهرانه و طبیعی از یك روش قدیمی را به‌کار گرفتند که به طولها یا فواصل، مقادیر صحیحی از واحدهای (گوناگون) طول را نسبت می‌داد (همانند یك «مسافت پنج ذراعی» یا یك «مسافت بیست فرسنگی»). ایدهٔ آنها، که ما آن‌را «روش سنگفرشی» می‌نامیم، عبارت بود از قرار دادن اشیاء ساده به‌جای واحدها، به‌کار گرفتن اشیاء مزبور به‌عنوان «سنگهای سنگفرش»، و نتیجتاً فرش کردن ناحیهٔ مفروض با بیشترین دقت ممکن با سنگهای متنوع انتخاب شده؛ مثلاً* به‌این‌صورت:



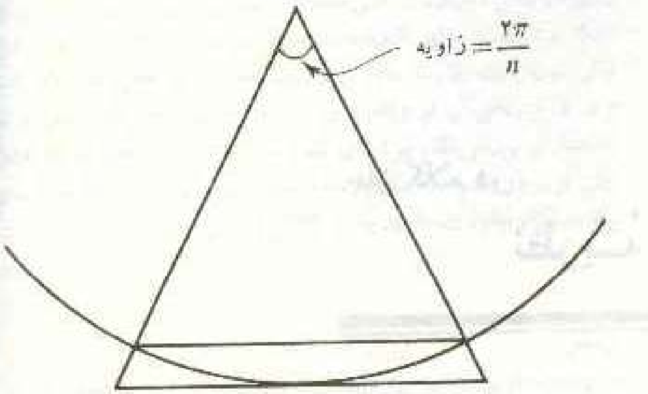
بنابراین، مساحت مجهول تقریباً با مساحت مفروش، یعنی مساحتی که واقعاً با سنگها پوشیده شده، برابر است. تساوی کل با مجموع اجزاء خود، یکی از خصلتهای ذاتی مساحت محسوب می‌شده (و می‌شود)، و بنابراین مساحت فرش شده به‌نوبهٔ خود با مجموع مساحتهای معلوم تک‌تک سنگها (که باهم اشتراک ندارند) مساوی است.

مسلماً ممکن بود که دقت چنین تقریبانی را به‌حدی برسانند که جوابگوی نیازهای عملی زمان باشد. پیچیدگی بیشتر ریاضیات یونانی از تمایل آنان به‌دقت کامل ناشی می‌شد. بنابراین مثلث، به‌عنوان سنگ سنگفرش، بیشتر از مستطیل موردتوجه قرار گرفت زیرا هر ناحیهٔ محصور به‌خطوط مستقیم را همواره می‌توانستند با تعدادی متناهی از مثلثها دقیقاً فرش کنند، مثلاً:



نبوغ واقعی یونانیان در استخراج اطلاعات دقیق در مورد نواحی محصور به خطوط خمیده بود. این نواحی را نمی‌توانستند با سنگهایی که اضلاع مستقیم داشتند، دقیقاً بپوشانند. لذا یک «روش افنا» ابداع کردند که مساحت دقیق را از تعداد زیادی سنگفرش غیردقیق استخراج می‌کرد. این روش آنها معادل «استدلال به روش حد» امروزه است. در کتاب دوازدهم اقلیدس از روش مزبور برای کشف این واقعیت استفاده شده‌است که نسبت مساحت هردایره به‌مساحت مربع ایجاد شده روی شعاع آن دایره، ثابت است. این نسبت مشهور را (که می‌دانیم عدد π است) بعدها ارشمیدس کمتر از ۲۲/۷ و بیشتر از ۲۲۳/۷۱ تقریب زد؛ و ما امروز می‌دانیم که عدد π گنگ است.

برای اینکه ببینیم چگونه می‌توان اندازهٔ دقیق مساحت را از سنگفرشهای غیردقیق استخراج کرد، به‌محاسبهٔ دوگانه‌ای از مساحت یک دایره، A، برحسب شعاع آن، r، دست می‌زنیم. دراین محاسبه، مثلث‌بندی (یعنی فرش کردن با سنگهای مثلثی شکل) دقیقاً به‌همان صورتی است که اقلیدس انجام می‌داد، ولی نمادگذاری و استدلال به روش حد، کاملاً جدید است. نکتهٔ اصلی، تجزیهٔ دایره به تعداد دلخواه n قطاع مساوی است. به‌هرقطاع، مثلثهای محاطی و محیطی معمول را متناظر می‌سازیم؛ به‌این‌صورت:



مثلث محاطی دارای قاعدهٔ $2r\sin(\pi/n)$، ارتفاع $r\cos(\pi/n)$ و نتیجتاً مساحت $r^2\sin(\pi/n)\cos(\pi/n)$ است. n مثلث محاطی را به عنوان یک سنگفرش (یک مثلث‌بندی غیردقیق از دایره) درنظر می‌گیریم. از اینجا، مساحت کل فرش شده برابر با

$$l_n = n r^2 \sin(\pi/n)\cos(\pi/n)$$

است؛ وچون ناحیهٔ سنگفرش‌شده کاملاً در درون دایره قرار می‌گیرد، بنابراین $A \geqslant l_n$. پس درحد:

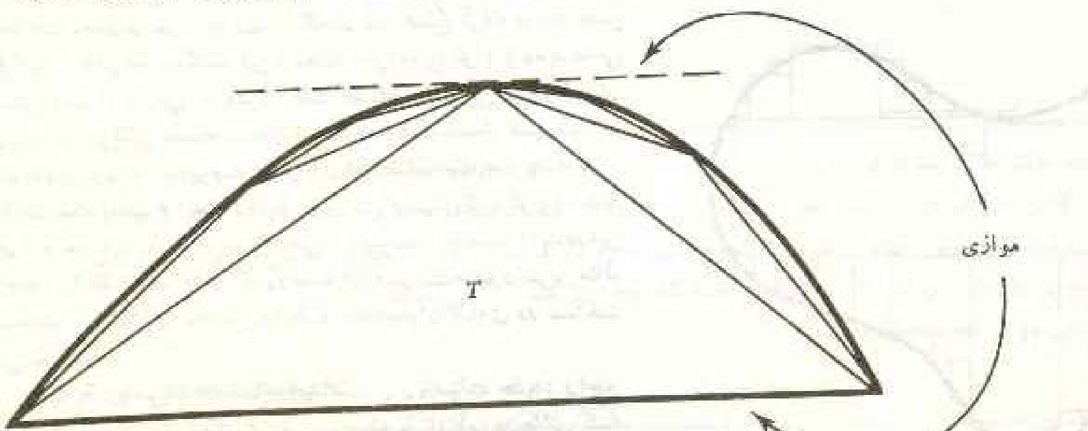
$$A \geqslant \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \pi r^2 \left(\frac{\sin \pi/n}{\pi/n}\right)\cos(\pi/n) = \pi r^2$$

مثلث محیطی دارای قاعدهٔ $2r\tan(\pi/n)$، ارتفاع r، ونتیجتاً مساحت $r^2\tan(\pi/n)$ است. n مثلث محیطی، ناحیه‌ای به مساحت کل $u_n = n r^2 \tan(\pi/n)$ را فرش می‌کنند که ناحیهٔ داخل دایره را کاملاً می‌پوشانند، و از آنجا $A \leqslant u_n$. پس، مثل قبل:

$$A \leqslant \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \pi r^2 \left(\frac{\sin \pi/n}{\pi/n}\right)\frac{1}{\cos(\pi/n)} = \pi r^2$$

اینک استدلال کامل است. ما همهٔ اعدادی را که می‌توانستند مقدار واقعی A باشند رد کرده‌ایم مگر یک و فقط یک عدد را: $A = \pi r^2$. توجه کنید که برای نیل به‌این نتیجهٔ دقیق به بینهایت مثلث‌بندی نیاز داشتیم.

ارشمیدس، در استدلالی که از این هم ماهرانه‌تر است، مساحت یک قطعهٔ سهموی را با ملاحظهٔ مثلث‌بندیهایی به‌شکل زیر کشف کرد

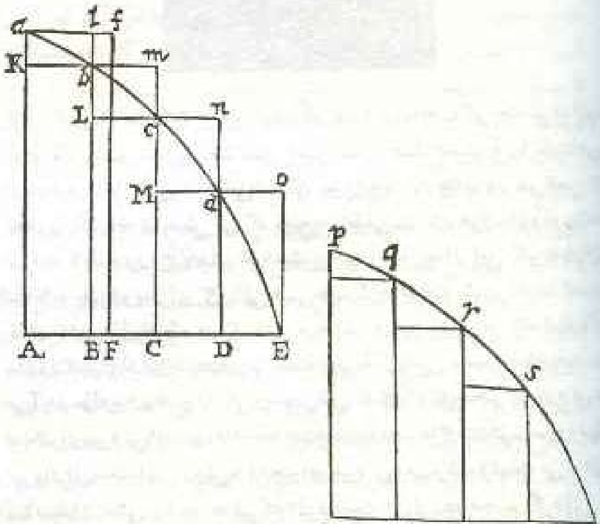


رأس بالایی مثلثی که نام T بر آن گذاشته شده، در نقطه‌ای قرار دارد که مماس بر سهمی، با قاعدهٔ قطعه موازی است. ارشمیدس نشان داد که مساحت قطعه دقیقاً ۴/۳ مساحت T است.

مرگ تأسف‌بار ارشمیدس درسال ۲۱۴ قبل‌از میلاد به‌دست یك سرباز رومی، نشانهٔ مرحلهٔ نهایی پیروزی روم بر یونان بود. گرچه بعدها کوششهای بسیار زیادی در زمینهٔ تقریبات انجام شد، ولی می‌بایست حدود دو هزار سال بگذرد تا بسیاری از نتایج دقیقی که قبلاً بر یونانیها نامعلوم بود کشف شوند. شاید دوچیز لازم بود تا پیشرفت دیگری ممکن شود: (۱) مفهوم تکامل یافته‌تری از عدد، عدد برای اندازه‌گیری، مانند پول برای تجارت است؛ و به‌مثابهٔ «پول رایج» برای توصیف و مقایسهٔ مساحتها و سایر انواع اندازه به‌کار می‌رود، درحالی که «سیستم مبادلاتی» یونان فقط مقایسهٔ (مبادلهٔ) مستقیم یك‌مساحت بامساحت دیگر را اجازه می‌داد. (۲) کنارگذاشتن سنگفرشهای مثلثی. این روش موجب پیچیدگی زیاد محاسبات می‌شد و یافتن مثلث بندیهای مورد نیاز هرحالت خاص، مستلزم ابتکارات بسیار زیادی بود. بدون‌شك چنین اقدامی ازنظر روانی بسیار دشوار بود. کنار گذاشتن مثلث، ترك سنت یونانی بود.

۳. از نیوتن تا ریمان: قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

درهمان اوایل کتاب اصول ریاضی (۱۶۸۷) آیزك نیوتن به‌شکلهای زیر برمی‌خوریم



این شکلها نمایشگر یك موفقیت چشمگیر در کاربرد سنگفرش برای یافتن اندازهٔ عددی دقیق مساحت هستند. هیچ‌جا اثری از سنگفرش مثلثی به‌چشم نمی‌خورد. نیوتن مثلث را با مستطیل تعویض کرده است و مزید بر آن، اینك مستطیلهای باریك همچون کاغذ دیواری (یا کفپوشهای چوبی) ناحیهٔ مفروض را پوشانده‌اند. دراین‌روش، اگر سنگفرش‌دقیقتری لازم می‌شد مستطیلها را، بی آنکه به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کوتاه‌تر کنند، باریکتر می‌کردند. قسمت خمیدهٔ مرز ناحیه را دقیقاً بایك تابع ریاضی f بیان می‌کردند؛ مساحت‌ناحیه‌راصریحاً به‌صورت یك حد ریاضی از مساحتهای سنگفرش شده به‌دست می‌آوردند، وحد مزبور را انتگرال تابع f روی بازهٔ $[a, b]$ یا به‌اختصار $\int_a^b f(x)\,dx$ می‌نامیدند. از همه مهمتر، قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (در اکثر اوقات) امکان محاسبهٔ دقیق این انتگرال را فراهم می‌کرد وبه‌علاوه، دراین محاسبه توجه چندانی به سنگفرشها نمی‌شد. فقط کافی بود که یك تابع اولیهٔ F برای f به‌دست آید و آنگاه، مساحت مجهول دقیقاً $F(b)-F(a)$ بود. فقط درموارد نادری که F در دسترس‌نبود، ملاحظهٔ سنگفرشها(ونتیجتاً «انتگرالگیری‌عددی») لازم می‌شد. بدین‌ترتیب، روشهای «موردی» گذشته جای خود را به‌یك روش اصولی باقدرت و دامنهٔ گسترده داد.

همهٔ این ایده‌ها در آثار نیوتن نمایان هستند ولی تا شروع کار کوشی در دههٔ ۱۸۲۰ به‌صورت‌دقیقی بیان‌نشدند. این درواقع کوشی بود که، با پایه‌گذاری مفاهیم مشتق و انتگرال براساس ایدهٔ ریاضی حد، آن مفاهیم را روشن و عاری از ابهام ساخت. کار کوشی را ریمان در دههٔ ۱۸۵۰ بسط داد، و انتگرال حاصل‌نام ریمان‌را برخود دارد؛ این همان انتگرالی است که در هر کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال جدید ظاهر می‌شود.

گرچه انتگرال در بدو امر به‌عنوان وسیله‌ای برای محاسبهٔ مساحت شکل گرفت، ولی در دستان کوشی و ریمان بیشتر به فن مجردی برای‌محاسبه تبدیل‌شد. (دانشجوی حساب‌دیفرانسیل وانتگرال هنگام تقریب انتگرال با «مجموعهای ریمانی» متوجه می‌شود که «مساحت» برخی‌از مستطیلها منفی به‌حساب می‌آید.) این‌تجرید امکان می‌دهد که کاربردآن ازیك مورد فراتر رود. آن‌را می‌توان درمحاسبهٔ مساحت، حجم، طول قوس، و بسیاری دیگر از کمیتهای فیزیکی به‌کار برد. سرعت، انتگرال شتاب نسبت به‌زمان است؛ کار، انتگرال نیرو نسبت به مسافت است، و غیره. بااین‌حال، روح حاکم برهمهٔ این کاربردها همان روش سنگفرشی است. درواقع، ابتکار یونانیان باستان در به‌کار گرفتن واحدهای اندازه‌گیری کوچکتر و کوچکتر (چه‌سنگهای یك سنگفرش و چه درجات یك‌وسیلهٔ اندازه‌گیری) برای سنجیدن یك‌کمیت فیزیکی بادقت معین، عملاً اساس هرسنجش عددی در علم جدید را تشکیل می‌دهد.

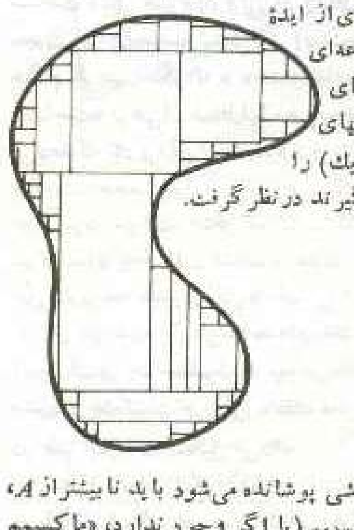
خود ریمان انتگرالگیری را به‌عنوان یك روش میانگین‌یابی در آنالیز ریاضی سریهای مثلثاتی به‌کار گرفت. این کار او شاید اولین صدایی‌بودکه ازریاضیات‌جدیدبه‌گوش رسید. ریاضیدان سنتی می‌گفت: «چیز جالبی می‌بینم. لازم است خاصیتهای آن‌را مطالعه کنم.» چیز جالبی که کوشی می‌دید تابع پیوسته بود. انتگرال آن، یکی‌از خاصیتهایش بود. ریاضیدان جدید می‌گوید: «خاصیت جالبی می‌بینم. لازم است همهٔ چیزهایی را که دارای این خاصیت هستند مطالعه کنم.» لذا یك «تابع انتگرالپذیر ریمانی»، صرفاً تابعی است ـ هرچند عجیب و نامأنوس ـ که انتگرال آن بنابه‌تعریف‌کوشی‌معنی داشته باشد. برخوردسنتی‌ها باتجددین دراین‌نوشتهٔ هرمیت ریاضیدان خلاصه می‌شود: «من از وحشت این بلای مصیبت‌بار که توابع بدون مشتق نام دارد، به‌خود می‌لرزم.»

دیدگاه جدید منشأ نوعی قهرمانیگری در ریاضیات شده است، نوعی صعود از کوه، زیرا هدف در ارتفاعات بالاست. ماحصل آن، ریاضیات مجردی است باعمومیت، عمق، زیبایی، وکاربردهای واقعی بسیار. دیدگاه جدید همچنین باعث رشد سرطانی تجرید شده است. این بیماری، مشهور به تجریدگرایی، نشانه‌اش مغلق‌نویسی عمدی، محرکش عطش نومیدانه به چاپ مقاله، و تداوم دهنده‌اش تعصب تخصص گرایی است. خوب یا بد، این دیدگاه‌جدید است که برتکامل مبحث اندازه‌گیری در ریاضیات سنتی به نظریهٔ اندازه در ریاضیات جدید حکمفرماست.

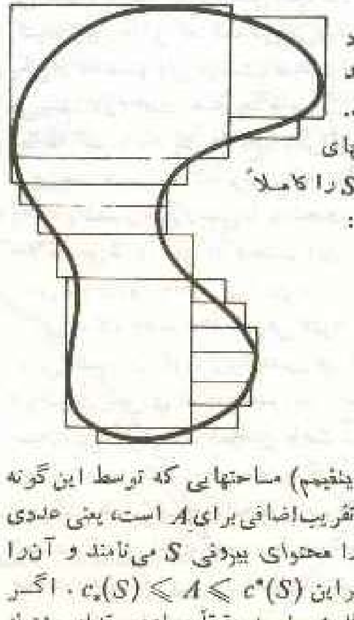
II. تولد

۴. از پئانو تا کاراتئودوری: ظهور اندازهٔ مجرد

مبادی جدید نظریهٔ ریاضی اندازه به آثار پئانو در دههٔ ۱۸۸۰ برمی‌گردد. تا آن‌هنگام ریاضیدانان تصور می‌کردند که مفهوم مساحت یک ناحیهٔ مسطح را درک می‌کنند. وانگهی، عموماً احساس می‌شد که در واقع هر زیرمجموعه‌ای از صفحه مساحت دارد. اگر زیرمجموعه «اهلی» بود، مساحتش فوراً از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال قابل حصول بود. درغیر این‌صورت، حداقل می‌شد مساحت را به‌نحوی با نواحی سنگفرش‌شده تقریب زد. ماهیت دقیق این تقریب درحالت کلی روشن نبود ولی به‌احتمال زیاد این‌مسأله چندان مورد توجه ریاضیدانان سنتی قرار نداشت. این تمایل جدید به مطالعهٔ «همهٔ چیزهای دارای یک خاصیت جالب» بود که پئانو را به ملاحظهٔ مساحت درجایگاه خود، جدا از انتگرال، رهنمون گردید. گرچه پئانو از «کاغذ دیواریهای» نیوتن (هم «درونی» و هم «بیرونی») و از آثار ریمان الهام گرفت ولی یقیناً یونانیها می‌توانسته‌اند ادعا کنند که تعریف پئانو از مساحت دقیقاً تجدید بیانی به‌زبان امروزی از ایدهٔ آنهاست. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از صفحه باشد. پئانو همهٔ سنگفرشهای مستطیلی روی S (ونه فقط سنگفرشهای متشکل از نوارهای دراز و باریک) را که کاملاً در درون S قرار می‌گیرند در نظر گرفت. مثلاً به‌این‌صورت:

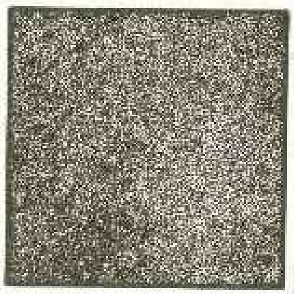


مساحتی که توسط چنین سنگفرشی پوشانده می‌شود باید نابیشتر از A، مساحت S، باشد. در نتیجه ماکسیمم (یا اگر وجود ندارد، «ماکسیمم تعمیم یافته» یا سوپریمم) همهٔ این مساحتهای سنگفرش شده یک تقریب نقصانی برای A است، یعنی عددی است نابیشتر از A. عدد مزبور را محتوای درونی S می‌نامند و آن را با $c_*(S)$ نمایش می‌دهند. درعین‌حال، پئانو همهٔ سنگفرشهای مستطیلی را درنظر گرفت که S را کاملاً می‌پوشانند؛ مثلاً به‌این‌صورت:



مینیمم (یا اگر وجود ندارد، اینفیمم) مساحتهایی که توسط این‌گونه سنگفرشها پوشانده می‌شود، یک تقریب اضافی برای A است، یعنی عددی است ناکمتر از A. این عدد را محتوای بیرونی S می‌نامند و آن را با $c^*(S)$ نمایش می‌دهند. بنابراین $c_*(S) \leqslant A \leqslant c^*(S)$. اگر اتفاقاً $c^*(S) = c_*(S)$، آنگاه A باید دقیقاً مساوی مقدار مشترک $c^*(S)$ و $c_*(S)$ شود. این تعریف پئانو از A، مساحت S، بود که آن را محتوای S نیز می‌نامند و با $c(S)$ نمایش می‌دهند. اگر اتفاقاً $c_*(S) < c^*(S)$، آنگاه، تا جایی که مورد نظر پئانو بود مجموعهٔ S دارای مساحت نبود. چنین مجموعه‌ای اندازه‌پذیر نبود. دستاورد پئانو مجدداً توسط ژوردان به‌طور مستقل در دههٔ ۱۸۹۰ کشف و (به‌ویژه به‌تعریف متناظری از حجم) تعمیم داده شد، و امروزه مفاهیم عام محتوا نام ژوردان را برخود دارند.

اگر هر مجموعه‌ای چون S به‌مفهوم مورد نظر پئانو یا ژوردان دارای محتوا بود، ماجرا با کار آنها به‌پایان می‌رسید. ولی به‌آسانی می‌توان مجموعه‌ای تعریف کرد که درمورد آن $c_*(S) < c^*(S)$، و با این‌حال، احساس عمومی این باشد که باید مساحتش موجود باشد. گردایه یا خانواده‌ای از اشیاء، چون O، را شمارا گوییم هرگاه بتوان آن اشیاء را با اعداد طبیعی اندیس گذاری کرد: یعنی O_1، O_2، O_3، و ... (دو شیء مختلف دو اندیس مختلف می‌گیرند.) لذا هر گردایهٔ متناهی از اشیاء، شماراست و برخی از گردایه‌های نامتناهی نیز شمارا هستند. حال فرض کنیم که مثلاً S مربعی است با مساحت ۱ که گلوله‌باران شده است؛ به‌این‌صورت:



فرض کنید که سوراخ ناشی از هر گلوله را فوق‌العاده کوچک گرفته‌ایم، در واقع به‌صورت یک تک‌نقطه. اما تصور کنید تعداد آنها نامتناهی شماراست. با کمی دقت می‌توان سوراخها را چنان در سرتاسر S به‌طور یکنواخت پخش کرد که هیچ مستطیلی در S، هر اندازه کوچک، نتواند فاقد سوراخ باشد. خواهید پرسید: آیا بعد از این گلوله‌باران سفاکانه چیزی برای S باقی می‌ماند؟ جواب مثبت است: تعداد ناشمارایی از نقاط، در S باقی می‌ماند. این نتیجه از یک استدلال مشهور کانتور، اولین متخصص برجستهٔ نظریهٔ ریاضی مجموعه‌ها، به‌دست می‌آید. حال بدون هیچ مشکلی دیده می‌شود که S دارای محتوای درونی ۰ و محتوای بیرونی ۱ و نتیجتاً فاقد مساحت است، مجموعهٔ B متشکل از سوراخها نیز دارای محتوای درونی ۰ و محتوای بیرونی ۱ می‌باشد (اینک می‌توان ریاضیدان سنتی را در حالی که از وحشت می‌لرزد، مجسم کرد).

اما اکنون B مجموعه‌ای شماراست. خیلیها احساس می‌کنند که هر مجموعهٔ شمارا باید دارای مساحت باشد و این مساحت هم باید صفر باشد. می‌توان نشان داد که اگر مستطیلی به تعداد شمارایی از مستطیلهای کوچکتر تجزیه شود، مساحت آن همواره با مجموع مساحتهای مستطیلهای کوچکتر برابر است ولو آنکه تعداد مستطیلهای کوچکتر نامتناهی باشد. (این واقعیت را بعداً شمارا ـ جمعی بودن اندازهٔ مساحت خواهیم نامید.) به‌همین‌ترتیب، مجموعهٔ B را نیز می‌توان به‌تعداد شمارایی از تک نقطه‌ها تجزیه کرد. یک تک‌نقطه، بنا به هر تعریفی، مساحت صفر دارد. بنابراین، مساحت B هم باید صفر باشد و نتیجتاً مربع گلوله باران شده باید مساحتی برابر با ۱ داشته باشد. ازاین‌رو، احساس شهودی ریاضیدانان تعمیمی از تعریف مساحت پئانو ـ ژوردان را می‌طلبید. ولی چگونگی کار به‌آن زودی روشن نبود،

جرقهٔ الهام در ذهن امیل بورل در حوالی شروع این قرن زده شد:

در سنگفرش، بینهایت سنگ به‌کار ببرید!

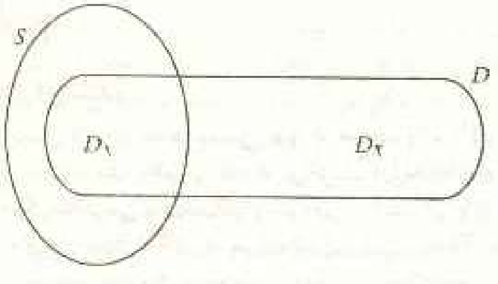
به‌بیان دقیقتر، یک مجموعهٔ دلخواه S را با تعداد بینهایت مستطیل بدون اشتراک بپوشانید، نه با تعدادی متناهی آن‌سان که پئانو و ژوردان عمل کرده بودند (البته بینهایت مزبور، به علت اینکه مستطیلها باهم اشتراک ندارند، باید شمارا باشد). بینهایت سنگ، اغلبشان بسیار ریز، بدون شک بهتر می‌توانند گوشه‌ها، درزها، سوراخها، و یا سایر ناهمواریهای موجود درشکل S را بپوشانند. درنتیجه، برازش بهتری بین S و ناحیهٔ سنگفرش شده ممکن خواهد بود.

اندیشهٔ بورل را شاگردش هنری لبگ به‌خوبی دریافت و او آن‌را به‌یک نظریهٔ ریاضی به‌معنای واقعی تبدیل کرد. تعریف $m^*(S)$، اندازهٔ بیرونی لبگ متعلق به مجموعهٔ مسطح S، دقیقاً مشابه محتوای بیرونی S ارائه می‌شود بجز اینکه علاوه بر سنگفرشهای متناهی از سنگفرشهای نامتناهی‌هم استفاده می‌شود. بدین‌ترتیب، تعداد نواحی سنگفرش شدهٔ تحت‌بررسی افزایش می‌یابد و نتیجتاً مینیمم (یا اینفیمم) مساحتهای متناظر کوچکتر می‌شود، یعنی $m^*(S) \leqslant c^*(S)$.

لبگ امیدوار بود که $m^*(S)$ نمایانگر اندازهٔ «واقعی» مساحت S باشد. اما این امید احتیاج به‌توجیه منطقی داشت، چه‌درغیراین‌صورت $m^*(S)$ چیزی جز یک «تجرید بی‌معنی» باجازه‌ای زودگذر نمی‌بود. شواهد اولیه دلگرم کننده بود. اگر S، بنا به هریک از تعاریف قبلی دارای مساحت A می‌بود، درهمهٔ حالات ثابت می‌شد که $A = m^*(S)$. این تساوی، حالت یک مجموعهٔ بیکران S را نیز شامل می‌شد: مجموعه‌ای که «تا بینهایت گسترده است» ولذا بنا به‌تعریف، نمی‌توان آن‌را با تعدادی متناهی مستطیل پوشاند. اغلب این‌گونه مجموعه‌ها، ازجمله خودصفحه، دارای مساحتی (واندازهٔ بیرونیی) برابر با $+\infty$ هستند. اما به‌برخی از آنها، باکمک انتگرالهای به‌اصطلاح ناسرهٔ ریمان، مساحتهایی متناهی نسبت داده می‌شد. در این حالات نیز A مساوی اندازهٔ بیرونی مجموعه بود. وانگهی، همان‌گونه که به‌طور شهودی انتظار می‌رفت، اندازهٔ بیرونی مربع گلوله‌باران شده ۱ و اندازهٔ بیرونی مجموعهٔ B، متشکل از سوراخها، ۰ بود.

اما یک مسألهٔ کوچک باقی بود. درمورد اندازهٔ بیرونی لبگ نه واضح بود و نه‌صحیح، که کل همواره مساوی مجموع اجزاء خود باشد. لبگ این معضل را به‌همان شیوهٔ پئانو و ژوردان حل کرد. وی مفهوم جدید اندازهٔ درونی $m_*(S)$ را (مفهومی که مشابه با محتوای درونی $c_*(S)$ نیست و حال متروک است) ابداع کرد؛ مجموعهٔ S را به‌شرط $m_*(S) = m^*(S)$ اندازه‌پذیر (لبگی) اعلام، و برای یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر S مقدار مشترک $m_*(S)$ و $m^*(S)$ را به‌عنوان اندازهٔ (لبگی) آن، $m(S)$، تعریف کرد. او همچنین شمارا‌جمعی بودن اندازهٔ بیرونی روی مجموعه‌های اندازه‌پذیر را اثبات نمود ــ یعنی، نشان داد که اگر یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر S به تعداد شمارایی از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر بدون اشتراک تجزیه شود، آنگاه $m^*(S)$ دقیقاً مساوی مجموع اندازه‌های بیرونی آن زیرمجموعه‌هاست. یعنی برای مجموعه‌های اندازه‌پذیر، کل برابر با مجموع اجزاء است.

ایدهٔ اندازه‌پذیری لبگ را بعدها کاراتئودوری بدون استفاده از اندازهٔ درونی مجدداً صورتبندی کرد، واین روایت کاراتئودوری است که امروزه در کتب درسی نظریهٔ اندازه ظاهر می‌شود. روایت مزبور چنین است: همراه با مجموعهٔ مفروض S، مجموعهٔ دلخواه D را در نظر بگیرید. مجموعهٔ S را به‌مثابهٔ چاقویی بپندارید که برای بریدن D به‌دو قطعهٔ $D_1 = D \cap S$ و $D_2 = D \setminus S$ به‌کار می‌رود؛ به‌این‌صورت:



حال ممکن است تساوی $m^*(D) = m^*(D_1) + m^*(D_2)$ درست یا نادرست باشد. اگر تساوی درست باشد و، بلکه بیشتر، اگر تساوی صرفنظر از نحوهٔ انتخاب D همواره درست باشد، آنگاه S اندازه‌پذیر است. اگر تساوی حتی فقط به‌ازای یک مجموعهٔ D برقرار نباشد، آنگاه S اندازه‌پذیر نیست؛ واین تعریف کاراتئودوری از اندازه‌پذیری است. این تعریفی مجرد است و تنها با این هدف صریح ارائه شده است که کل را مجبور به‌برابری با مجموع اجزاء خود کند.

تجرید بیشتر نظریهٔ لبگ تا حدودی موجب دور شدن و بریدن آن نظریه از واقعیات شد. دانشمند علوم تجربی به‌راحتی می‌تواند $c^*(S)$ را وقتی که $c^*(S) = c_*(S)$، به عنوان مساحت S بپذیرد. اما آیا درصورت «اندازه‌پذیری» S، به‌این مفهوم بسیار تکنیکی، می‌توان حقیقتاً گفت که $m^*(S)$ مساحت واقعی S است؟ برخورد ریاضیدان به‌سؤال مزبور، برخورد توأم با آرامش کسی است که می‌داند دربحث برنده می‌شود؛ او می‌پرسد: «منظورتان از «مساحت واقعی» S چیست؟» دانشمند علوم تجربی نمی‌داند. ریاضیدان هم نمی‌داند. تنها کاری که ریاضیدان می‌تواند بکند این است که شواهدی به‌صورت قضایا و مثالهای ریاضی اقامه کند تا دانشمند علوم تجربی تشویق شود که اندازهٔ لبگ را به‌عنوان تعریف مساحت بپذیرد. شواهد مثبت (در این زمینه) قوی است. مساحت در مورد مستطیلها، شمارا‌جمعی است. این را می‌توان ثابت کرد. اگر دانشمند علوم تجربی براساس این اثبات ایمان بیاورد که مساحت در حالت کلی نیز شمارا‌جمعی خواهد بود، آنگاه می‌توان ثابت کرد که اندازهٔ لبگ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر، دقیقاً همان مساحت آن مجموعه است. هیچ قرینهٔ نفی‌کننده‌ای وجود ندارد. هیچ‌کس مثالی از یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر پیدا نکرده است که به‌طور شهودی بتوان به‌غیر از اندازهٔ لبگ آن، مساحتی برایش در نظر گرفت (و این حکم، همهٔ مجموعه‌هایی را هم که قبلاً برایشان مساحت تعریف شده بود دربر می‌گیرد). همچنین هیچ‌کس مثالی از یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر پیدا نکرده است که درمورد مساحتش هیچ تصور شهودی موجود باشد. به‌این نکته مجدداً باز خواهیم گشت.

به‌زودی معلوم شد که روش لبگ در ساختن اندازه به‌عنوان یک «تابع مجموعه‌ای شمارا‌جمعی» کلیت تام دارد. در حالت یک بعدی می‌توان بازه‌ها را به‌عنوان سنگها به‌کار گرفت ومفهوم تعمیم یافته‌ای از طول به‌دست آورد. (این اندازهٔ واقعی لبگ است، اندازه‌ای که‌خود او برای اولین بار به‌ساختنش اقدام کرد.) در حالت سه‌بعدی می‌توان مکعب مستطیلها را به‌عنوان سنگها به کار برد تا مفهوم تعمیم‌یافته‌ای از حجم به‌دست آید، وبه‌همین ترتیب نتایجی مشابه در ابعاد بالاتر. در واقع، همان‌گونه که بعدها کاراتئودوری تبیین کرده می‌توان اشیائی را که طبیعت کاملاً مجردی دارند، به‌عنوان سنگهای سنگفرش به‌کار گرفت. باوضع چندشرط ساده می‌توان هر اندازه‌گیری (شمارا‌جمعی) روی این سنگهای مجرد را، به‌روش لبگ در ساختن اندازهٔ بیرونی، با استفاده از سنگفرشهای نامتناهی به‌انواع متعددی از اشیاء پیچیده‌تر تعمیم داد. بدین‌طریق نظریهٔ جدید اندازهٔ مجرد تولد یافت، نظریه‌ای که می‌رفت غنایی باورنکردنی از لحاظ کاربرد داشته باشد.

III. بلوغ

۵. انتگرال لبگ

انتگرال ریمان دارای همان نقائصی بود که تعریف پئانو-ژوردان از مساحت. حس شهودی حکم می‌کرد که برخی از توابع خاص، هرچند تعریف انتگرال کوشی - ریمان برایشان معنی ندارد ولی باید دارای نوعی انتگرال باشند. لبگ، همچون ریمان، بیشتر به انتگرالگیری علاقه‌مند بود تا به اندازه‌گیری، و چنین به‌نظر می‌رسد که هدف اصلی وی از ایجاد اندازهٔ اولیه، تعمیم تعریف قبلی انتگرال بود. او نهایتاً به‌نتایج بیشتری دست یافت: وی تصور جدیدی از مفهوم کلی انتگرال ارائه کرد. انتگرال او در واقع تعمیمی از انتگرال ریمان بود، ولی اثبات این نکته کار مشکلی است. از همه مهمتر، انتگرال لبگ (از یک تابع ریاضی) فقط به‌اندازهٔ مورد نظر بستگی داشت. لذا انتگرال مزبور را می‌شد در هر نهادکاملاً مجردی تعریف کرد و تنها شرط لازم برای این کار وجود یک اندازه (برای اشیاء مجرد آن نهاد) بود. در حالی که، مفهوم انتگرال ریمان نمی‌توانست خود را از محدودهٔ فضاهای سنتی اقلیدسی (خط، صفحه، و غیره) رها سازد.

باید اذعان کرد که انتگرال لبگ هیچ فرمول ساده و سحرآمیزی برای مساحت و حجم عرضه نمی‌کند که امکان حصول آن از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال وجود نداشته باشد. درواقع، لبگ نخست از ترس اینکه مبادا نظریهٔ جدیدش چیز فوق‌العاده‌عجیبی جلوه کند در انتشار آن تعلل می‌ورزید. نگرانی او بیمورد بود. نظریهٔ مجرد اندازه و انتگرال همان‌قدر در آنالیز ریاضی جدید فراگیر شده است که انتگرال ریمان در علوم تجربی جدید. حتی ریاضیدانان سنتی نیز وقتی دیدند که، علاوه بر تعمیم نظریهٔ قبلی، بسیاری از نکات آن ساده‌تر و واضحتر می‌شود (تاحدی) نظریهٔ جدید را پذیرفتند. به‌عنوان نمونه، یک تابع کراندار انتگرال ریمان دارد اگر و تنها اگر «تقریباً همه‌جا» پیوسته باشد. این حکم قبل از لبگ قابل اثبات نبود زیرا بدون نظریهٔ لبگ معنی ندارد. این مطلب به‌خوبی روشن می‌سازد که تعریف کوشی از انتگرال دقیقاً تا چه حد توسط ریمان تعمیم یافته بود. به‌عنوان مثالی دیگر: اثبات دقیق این مطلب که انتگرالهای به‌اصطلاح دوگانه و سه‌گانه را می‌توان درمحاسبهٔ برخی از مساحتها و حجمها به‌کار برد، با درنظر گرفتن انتگرالهای لبگ به‌جای انتگرالهای ریمان، بسیار آسان می‌شود.

آخرین تجلیل از نظریهٔ لبگ در دهه‌های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ به عمل آمد که حاکی از شیوع اندکی تجریدگرایی نیز بود. درنتیجهٔ آن یک «بلای مصیبت‌بار» (گرچه کوچک) از هیولاهای فوق مجردی که شبیه انتگرال بودند ظهور کرد که خوشبختانه امروزه اکثر آنها به‌محاق فراموشی سپرده شده‌اند.

در بخش بعد به‌بیان یکی از ماجراهای موفقیت‌آمیزی که از نظریهٔ لبگ به‌وجود آمده است اکتفا خواهد شد؛ نظریه‌ای که شکل مجرد آن را امروزه نظریهٔ اندازه می‌نامند.

۶. از لاپلاس تا کولموگوروف: اندازه و احتمال

نظریهٔ احتمال درقرن هفدهم با تعدادی مسألهٔ ریاضی ملهم از قماربازی پا به عرصهٔ وجود نهاد. کارهای اولیه را لاپلاس در اوایل قرن نوزدهم سازمان و گسترش داد؛ هم او نوشت: «نظریهٔ احتمال همان ادراک متعارف است که به‌صورت فرمول درآمده باشد.» به‌نظر می‌رسد که آن‌روزها احتمال‌را به‌عنوان یک شاخهٔ اصیل ریاضیات نمی‌پذیرفتند بلکه آن را رشتهٔ مجزایی می‌دانستند که ابزارهای ریاضی‌را به‌کار می‌گیرد. (شاید بی‌مهری نسبت به‌این رشته در آن زمان، ناشی از ارتباطش با قماربازی بوده باشد.) به‌هرحال، آنهایی که در احتمال کار می‌کردند تحت تأثیر بحرانی که در حوالی ۱۹۰۰ ریاضیات را فراگرفته بود، قرار نگرفتند. درآن زمان، توجه ریاضیدانان به کل همهٔ اشیاء دارای یک خاصیت معین، به پارادوکس (یا گزارهٔ ناقض خود) مشهوری دربارهٔ «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» منجر شده بود. از این پارادوکس ظهور «ریاضیات جدید» نتیجه شد، ریاضیاتی که کلاً مبتنی برنظریهٔ (بازنگری شدهٔ) مجموعه‌ها و برخوردار از استانداردهای سطح بالاتری از لحاظ صحت براهین منطقی بود. در مقابل همهٔ اینها، احتمال‌دانان می‌گفتند: «چنین چیزی برای ما اتفاق نمی‌افتد.» ولی اتفاق افتاد.

در دهۀ ۱۹۲۰ نظریهٔ احتمال با پارادوکسی در درون خویش مواجه شد که مشهور است به پارادوکس زمان انتظار. مسأله این بود: اتوبوسهایی در زمانهای تصادفی مختلف به‌یک ایستگاه وارد می‌شوند با این فرض که ورودهای آتی کاملاً مستقل از ورودها (یاعدم ورودها)ی قبلی هستند. هردو اتوبوس متوالی به‌طور متوسط به فاصلهٔ یک ساعت وارد می‌شوند. من رأس ساعت ۹ وارد ایستگاه می‌شوم. به‌طور متوسط چه مدت باید منتظر اولین اتوبوس باشم؟ یک راه استدلال بدین‌منوال بود که چون ورودهای قبلی بی‌تأثیرند، لذا به‌طور متوسط باید یک‌ساعت تمام منتظر بمانم. راه دوم استدلال این بود که چون من به‌طور متوسط دروسط فاصلهٔ زمانی بین دو اتوبوس متوالی وارد می‌شوم لذا می‌توانم امیدوار باشم که فقط نیم‌ساعت منتظر بمانم. این استدلالها متناقض یکدیگر بودند. پس حداقل یکی از آنها غلط بود، ولی اشتباه قابل ردیابی نبود. هر دو استدلال با موازین منطقی حاکم براحتمال در آن زمان درست بودند.

تأکید بر جدی بودن این وضع نباید اغراق‌آمیز به‌نظر برسد؛ زیرا با این وضع، چگونه می‌توانستند قضاوت کنند که در نظریهٔ احتمال استدلالی صحیح است یا نه؟ این فکر پیش آمد که چه بسا قرنها جستجوی پرتلاش برای دستیابی به‌حقایق احتمالاتی دربارهٔ دنیای ما که مملو از عدم حتمیت است، به‌چیزی جز یک مهمل فاحش منتهی نشده باشد.

نظریهٔ احتمال در دهۀ ۱۹۳۰ توسط آندری کولموگوروف نجات یافت. او یک‌تنه نظریهٔ احتمال را به‌شاخهٔ دقیقی از ریاضیات مبتنی برمفاهیم نظریهٔ اندازه تبدیل کرد. با این کار، وی چنان به‌مفاهیم این موضوع روشنی بخشید که هرگز سابقه نداشت. و بدین‌ترتیب، امکان آن به‌وجود آمد که اشتباه ظریف دراستدلال مسألهٔ زمان انتظار معلوم شود (استدلال اول درست بود)، و نظریهٔ احتمال درمسیر گسترش سریع به‌سوی کشفیات مهیجی کشانده شود، کشفیاتی که درتصور بنیادگذاران این نظریه هم نمی‌گنجید.

مفهوم اساسی درنظریهٔ سنتی احتمال پیشامد بود، حادثه‌ای در دنیای واقعی یا پیشامدی انتزاعی در یک الگوی فرضی از دنیای واقعی. بسیاری از پیشامدها قابل تصور هستند (مثلاً، اینکه شخصی ممکن‌است فردا بمیرد) ولی فقط برخی از آنها واقعاً اتفاق می‌افتند. لذا چنین فرض می‌شد که هر پیشامد E دارای کیفیت ظریفی است، چیزی ازقبیل امکان رخ دادن آن (دریک زمان معین)، که کمیت آن را می‌توان دقیقاً با $P(E)$ (عددی در $[0,1]$) بیان کرد. این عدد را احتمال می‌نامیدند. همانند اندازه‌گیری مساحت، درکلیهٔ محاسبات عددی احتمال چنین فرض می‌شد که احتمال برخی از پیشامدهای «اساسی» از قبل معلوم است. (دانشجویان احتمال اغلب به‌این نکتهٔ حیاتی توجه ندارند، مخصوصاً اگر در اشاره به احتمالهای معلوم، تنها «تصادفی‌بودن» پیشامد ذکر شود.) یک مشکل عمده در نظریهٔ اولیه این بود که، تقریباً درهیچ حالتی نمی‌شد احتمال یک پیشامد «اساسی» را، به‌همان سادگی که مساحت مستطیل محاسبه می‌شود، عملاً پیدا کرد. آن مشخصهٔ خاص E که قرار بود $P(E)$ مقدار دقیق آن باشد، علی‌رغم همهٔ تلاشهای

جدیی که قبلاً برای تثبیت مفهوم آن انجام گرفته بود، در پردهٔ ابهام باقی مانده بود. روایت نه‌چندان موثقی حاکی از آن است که در خلال بحران ناشی از پارادوکس زمان انتظار همواره می‌شد با این سؤال خونسردانه یک احتمال‌دان سنتی را به‌معنای واقعی تحریک کرد: «منظور شما از «احتمال» یک پیشامد چیست؟» احتمال‌دان قدیمی با حرکت شدید دستها و صورتی برافروخته شروع به‌ایراد سلسلهٔ بی‌پایانی از جملات قالبی می‌کرد: «شانس» است، «امید» است، «فراوانی نسبی در دراز مدت» است، «میزان اطمینان» است — و حتی ممکن بود در صورتی که به‌اندازهٔ کافی تهییج شود، به‌قلدری روشنفکرانه متوسل شود: «شما خودمی‌دانید منظور من چیست!» با دیدن این نمایش، شما باید حتماً می‌دانستید! اما حقیقت این بود که هیچ‌کس نمی‌دانست مگر دنباله‌روان متعصب.

کولموگوروف آن جنبه از احتمال را که واقعاً طبیعت ریاضی دارد آشکار ساخت، یعنی این نکته را که احتمال شکل اصیلی از اندازه‌گیری است و کل برابر با مجموع اجزاء خود است. اگر یک پیشامد کلی E به‌پیشامدهای ساده‌تر یا خاصتر E_1، E_2، ...، تجزیه شود و اگر این پیشامدهای ساده‌تر دو به دو ناسازگار باشند (یعنی امکان روی دادن همزمان هیچ دوتایی از آنها موجود نباشد)، آنگاه $P(E) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots$. نبوغ کولموگوروف در تشخیص این واقعیت بود که پیشامدهای اساسی را که احتمالهای آنها از قبل معلوم باشد می‌توان (در اغلب حالات) به‌عنوان «سنگهای سنگفرش» به‌کار گرفت. لذا می‌توان روش سنگفرشی اقلیدس - ارشمیدس - نیوتن - ریمان - پئانو - ژوردان - بورل - لبگ - کاراتئودوری را به‌همان شیوهٔ اندازهٔ بیرونی لبگ به‌کار برد و احتمالهای گردایهٔ وسیعتری از پیشامدهای «اندازه‌پذیر» را کاملاً تعیین کرد. احتمال به‌مثال ساده‌ای از اندازهٔ مجرد تبدیل شد.

یک مفهوم اساسی دیگر در نظریهٔ سنتی، متغیر تصادفی بود؛ در اوایل «متغیری بود که به‌طور تصادفی تغییر می‌کرد»، ولی بعدها به‌عنوان مثالی از یک تابع ریاضی شناخته شد. متغیرهای تصادفی به‌طور طبیعی از توصیف عددی جنبه‌های غیر احتمالاتی پیشامدها نشأت گرفتند (مثلاً تعداد شیرهایی که در ده مرتبه پرتاب یک سکه رو می‌شود). هر متغیر تصادفی، آرایه یا توزیعی از احتمال پیشامدهایی را که آن متغیر نمایندهٔ عددی آنها بود به‌همراه داشت (به‌عنوان مثال، این پیشامد که ۵ شیر در ده‌بار پرتاب سکه رو می‌شود). در حالات ساده می‌توانستند توصیف عددی را به‌طور طبیعی با آرایهٔ احتمالها ترکیب کنند و مفهومی از مقدار متوسط یا امید ریاضی متغیر تصادفی را پدید آورند. امید ریاضی یک متغیر تصادفی X را به‌صورت EX می‌نویسند. انگیزهٔ اولیهٔ تعریف EX از قماربازی آمده است: اگر X مقدار پولی باشد که من به‌طور بالقوه می‌توانم در یک بازی قمار ببرم، برای شرکت در آن بازی باید مقدار EX بپردازم تا بازی عادلانه باشد.

متغیرهای تصادفی در ابتدا در دو نوع متمایز «گسسته» و «پیوسته» ظاهر شدند. برای هر کدام نظریهٔ جداگانه‌ای وضع شد. احتمال‌دانان قدیمی به‌طور مبهمی از وجود نوعی متغیرهای تصادفی عجیب یا «تکین» آگاه بودند که در رسته‌های موجود نمی‌گنجید، ولی یقین داشتند که این استثنائات هرگز «در عمل پیش نخواهند آمد». (ولی پیش آمد.) کولموگوروف تشخیص داد که در کلیهٔ حالات بررسی‌شدهٔ قبلی، EX دقیقاً انتگرال لبگ مجرد تابع X نسبت به‌اندازهٔ احتمال P است. وی با توجیه شهودی قابل ملاحظه‌ای EX را در کلیهٔ حالات به‌عنوان همین انتگرال تعریف کرد. بدین طریق، او دو نظریهٔ جداگانه را یکپارچه ساخت و حوزهٔ متغیرهای تصادفی (از جمله متغیرهای تکین) را به‌طور وسیعی، تا آنجا که صحبت از EX (و نیز سایر «گشتاورهای» X مانند واریانس) معنی داشت، گسترش داد. از نظر تأثیر، تعمیم مزبور با تعمیم لبگ از انتگرال ریمان قابل مقایسه بود.

به‌این ترتیب، کولموگوروف فرهنگ کوچکی از اصطلاحات پدید آورد که در آن، مفاهیم ریاضی مجموعه، اندازه، تابع، و انتگرال به‌طور متقن به‌مفاهیم احتمالاتی پیشامد، احتمال، متغیر تصادفی، و امید ریاضی پیوند داده شده بود. این فرهنگ در حکم سنگ‌نبشتهٔ روزتا[1] برای نظریهٔ احتمال است. به‌کمک آن می‌توان آنچه را که واقعاً در نظریهٔ مزبور می‌گذرد به‌صورت جملات دقیق ریاضی استخراج کرد. نظریهٔ ریاضی جدید احتمال، استانداردهای منطقی آثار قبلی را ارتقاء داد (مثلاً در محاسبهٔ $P(E)$ وقتی که سنگفرش شامل بینهایت سنگ بود)، و همهٔ تصورات راجع به «طبیعت واقعی» احتمال را به‌حوزهٔ تأملات فلسفی انتقال داد. امروزه نتیجه‌ای که مبتنی بر چنین تصوراتی باشد فقط به‌عنوان یک حدس پذیرفته می‌شود که به‌اثبات دقیق نیاز دارد.

احتمال به‌عنوان یک ابزار اصلی در آمار ریاضی نقش دارد؛ هدف آمار ریاضی به‌دست آوردن اطلاعات دقیق دربارهٔ یک جامعه، پس از مشاهدهٔ نمونهٔ نسبتاً کوچکی از آن جامعه، می‌باشد. (معروفترین نمونه‌گیریها، نظرخواهی از افکار عمومی است.) بدین‌منظور آماردانان بر متغیرهای تصادفی خاصی تکیه می‌کنند که به آماره‌های آزمون مشهورند. برخی از آنها احتمالاً اطلاعاتی بیشتر از بقیه دربارهٔ جامعه به‌دست می‌دهند، و می‌توان این سؤال را مطرح کرد که آیا آمارهٔ آزمون خاصی وجود دارد که به بهترین‌وجه کار فوق را انجام دهد یا خیر. احتمال مبتنی بر نظریهٔ اندازه موارد زیر را تأمین می‌کند: (۱) حوزهٔ وسیعتری از متغیرهای تصادفی که «بهترین» آمارهٔ ممکن از بین آنها انتخاب شود، (۲) ابزارهای منطقی دقیقتر برای اینکه به‌طرز قانع کننده‌ای اثبات شود که یک آمارهٔ مفروض، بهترین آماره است، و (۳) چشم‌انداز تازه‌ای از برخی محکهای سنتی برای «نیکویی» یک آمارهٔ آزمون. به‌ویژه، معلوم شده است که مفهوم یک آمارهٔ بسنده را نمی‌توان بدون استفاده از زبان نظریهٔ اندازه به‌نحو شایسته‌ای فرمولبندی کرد.

تصادفی نیست که جرزی نیمن «پدر آمار جدید» رسالهٔ اولین شاگرد مهم خود را به‌تشریح انتگرال لبگ که در آن هنگام نوظهور بود اختصاص داد. او در ابتدا تصمیم داشت که زندگی علمی خود را وقف نظریهٔ مجرد اندازه کند، ولی سرنوشت او چنین بود که در عوض نقش برجسته‌ای در گسترش نظریهٔ ریاضی آزمون فرضهای آماری داشته باشد. این نظریه، نهایتاً امکان آن را فراهم ساخت که راهی معقول و تجربی (با به‌کار گرفتن آماره‌های آزمون) برای «اندازه‌گیری» احتمالها در دنیای واقعی به‌دست آید، لااقل به‌این مفهوم علمی و عملی که مقدار واقعی ایده‌آلی احتمالها براورد شود.

۷. مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر

آنهایی که با نظریهٔ اندازه سروکار دارند (به‌ویژه احتمال‌دانان) باید همواره مواظب مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر باشند. حتی امروزه در بسیاری از افراد جامعهٔ ریاضی آثار نوعی ترس غریزی از این موجودات دیده می‌شود. گویی آنان همچون گرگهای کمین کرده در جنگل، صبورانه منتظرند تا مسافر ماجراجو را در آرواره‌های پارادوکسی بیرحم خود به‌دام اندازند.

---

۱. روزتا نام شهری است در مصر که به‌عربی به‌آن رشید گویند و سنگ‌نبشتهٔ معروفی دارد که کاهنان بطلمیوس پنجم نوشته‌اند — این سنگ‌نبشته کلید فهم خط هیروگلیف مصری بوده است.—م.

باید فرض کرد که یک زیرمجموعهٔ اندازه‌ناپذیر در فضای اقلیدسی نوع پیچیده‌ای از مربع گلوله‌باران شده است. سرتاسر مجموعهٔ مزبور چنان سوراخ سوراخ، آبله‌رو، و یا «بید خورده»، شده است که حتی با تعداد بینهایتی از سنگهای متنوع نیز نمی‌توان به‌نحو مناسبی خلل و فرج آن را پوشاند. برخلاف مربع گلوله‌باران شدهٔ معمولی، هیچ‌گاه نمی‌توان چنین مجموعه‌ای را صریحاً توصیف کرد. اصولاً اثبات وجود آن فقط با کمک اصل موضوع انتخاب امکان دارد، اصلی که زمانی مورد مناقشه بوده ولی اکنون به‌عنوان یک اصل موضوع الحاقی به‌نظریهٔ اساسی مجموعه‌ها پذیرفته شده‌است. گفته می‌شود که لبگ تا واپسین‌دم هرگز اصل موضوع انتخاب را نپذیرفت. او می‌خواست براین باور بماند (و ظاهراً هم ماند) که هر زیرمجموعه‌ای از فضای اقلیدسی اندازه‌پذیر است.

ریشه‌های نارضایتی از اندازه‌ناپذیری را باید در تصورات شهودی نیرومند آن عصر جستجو کرد. اگر طول قد برای یک نفر معنی داشته باشد پس برای هر فرد دیگری نیز باید معنی داشته باشد. اگر یک پیشامد دارای احتمال باشد، هر پیشامد دیگری نیز باید چنین باشد. اگر یک قسمت از دنیای ما دارای حجم باشد، پس هر قسمت دیگر نیز باید دارای حجم باشد. برای اندازه‌گیری حجم یک مجموعهٔ سه‌بعدی از نقاط کافی است مجموعه را با آب پر کنید(؟)، آب را در یک لیوان مدرج خالی کنید و اندازهٔ حجم را بخوانید. این کار کاملاً ساده به‌نظر می‌رسد.

تصور اندازه‌ناپذیری، موجد شبحی از مجموعه یا شیء بس شگفت‌آوری شد که امکان وجود حجم برایش نیست. نه اینکه اندازه‌گیری حجم آن غیرممکن یا غیرعملی باشد، بلکه اصولاً حجمی در کار نیست. به‌این شبح، آلفرد تارسکی متخصص منطق ریاضی، موجودیت ملموس بخشید. وی با اثبات کاملاً دقیقی نشان داد که یک گوی صلب به‌شعاع ۱ را می‌توان به‌تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های بدون اشتراک تجزیه و سپس آنها را مانند معمای چینی چنان جابه‌جا کرد که یک گوی صلب به‌شعاع ۲ حاصل شود. به‌این ترتیب، زیرمجموعه‌ها در معرض هیچ گونه انبساط، انقباض، خمیدگی، پیچیدگی، و یا هیچ تغییر شکل دیگری قرار نگرفتند. فقط آنها را به‌طور صلب در فضا حرکت دادند تا به‌وضعیت جدید برسند. شهود ما ایجاب می‌کند که حجم یک شیء، هنگامی که به‌طور صلب در فضا جابه‌جا می‌شود نباید تغییر کند. همچنین شهود ما ایجاب می‌کند که در مورد اندازهٔ حجم، کل مساوی مجموع اجزاء خود باشد. با این‌حال، حجم گوی دوم هشت برابر حجم اولی است. این یک پارادوکس است، یک نوع عدم امکان منطقی است. ریاضیدانان برای حل پارادوکس «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» بالاخره به‌این توافق رسیدند که «ردهٔ» همهٔ مجموعه‌ها خود یک مجموعه نیست. ملهم از این تجربهٔ قبلی، در مورد پارادوکس جدید نیز به‌این توافق رسیدند که مجموعه‌ای بدون حجم وجود دارد. از نظر منطقی مسأله رفع می‌شود، ولی از نظر روانی پذیرش آن هنوز خیلی مشکل است.

نظریهٔ ریاضی اندازه رسماً در مورد وجود یا عدم وجود مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر اظهار بی‌اطلاعی می‌کند، درست همان‌طوری که در مورد «طبیعت واقعی» احتمال اظهار بی‌اطلاعی می‌کند. یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر چیزی نیست مگر مجموعه‌ای که دربارهٔ آن هیچ اطلاعی از به‌کار گرفتن سنگفرشها حاصل نمی‌شود. اگر به‌نحوی به‌یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر N اندازهٔ مستقلی نسبت داده شود و اگر اندازهٔ مزبور با سایر اندازه‌ها سازگار باشد (و به‌ویژه مقدار آن بین $m_*(N)$ و $m^*(N)$ قرار گیرد)، آنگاه نظریه این امکان را می‌دهد که، در هنگام ساختن اندازه، مجموعهٔ N نیز به‌سنگهای مورد استفاده در سنگفرش اضافه گردد. همهٔ سنگهای سنگفرش اندازه‌پذیرند (این یک قضیه در نظریهٔ اندازه است)، و لذا N نیز باید رسماً اندازه‌پذیر باشد. «کسی که قصد رام کردن این حیوان سرکش را دارد، نخست باید اندازهٔ واقعی آن را بیابد.» چنین به‌نظر می‌رسد که به‌خصوص احتمالدانان جدید همواره با کمبود پیشامدهای اندازه‌پذیر روبرو هستند، و تلاشهای قابل‌ملاحظه‌ای برای یافتن طرق معقول تعمیم برخی از اندازه‌های احتمال اولیهٔ کولموگوروف به‌عمل آورده‌اند. شاید روزی یک متخصص مشهور فیزیک ریاضی به‌فکر تعمیم مفیدی از مفهوم حجم بیفتد به‌طوری که یک شیء عجیب بتواند، در حین حرکت آرام خود در فضا، حجم خود را عملاً تغییر دهد.

۸. ختام

یکی از شخصیتهای نسبتاً مهم نظریهٔ احتمال در مقدمهٔ یک کتاب درسی چاپ ۱۹۶۵، که هنوز هم مورد استفاده است، چنین نوشت: «کار اصلی نظریهٔ اندازه . . . عبارت است از توجیه . . . حدگیریهایی که هیچگاه برای یک غیر ریاضیدان مورد سؤال نیست. لذا خوانندگانی که عمدتاً به‌نتایج عملی علاقه‌مندند هیچ نیازی به‌نظریهٔ اندازه احساس نخواهند کرد.» این گفته، منعکس کنندهٔ برخورد محتاطانهٔ ریاضیدان سنتی (و برخی از متخصصین امروزی ریاضیات کاربردی) با شاخه‌های مجردتر ریاضیات جدید است. شور و اشتیاق نسبت به این موضوع احتمالاً از دو طریق قوت می‌گیرد: (۱) از این طریق که استاد به‌استعانت نفوذ شخصی و درک عمیق خود از مطلب قادر باشد در رفتهای خود را تبلیغ کند و یا (۲) از این طریق که ریاضیات قبلی (که در مورد نظریهٔ اندازه شامل حساب دیفرانسیل و انتگرال و احتمال سنتی می‌شود) در حدی مطالعه شود که دانشجو بتواند به‌ارزشهای اصیل شیوهٔ اصلاحی نظریهٔ جدید بر قدیم پی‌ببرد. طریقهٔ دوم ممکن است مستلزم مطالعهٔ برخی از مطالب مهجور و منسوخ باشد، ولی در عوض دانشجو در موضع بهتری قرار می‌گیرد تا گوهرهای واقعی ریاضیات جدید را از جار و جنجال تب‌آلود تجریدهای پیشرفته تمیز دهد.

ترجمهٔ مهدی رجبعلی‌پور

مراجع

1. Bell E. T., *Men of Mathematics*, 2 vols, Penguin, London, 1953.
2. Cohn D. L., *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.
3. Davis P. J., and Hersh R., *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, 1981.
4. Halmos P. R., *Measure Theory*, D. Van Nostrand, Princeton, 1950.
5. Hawkins T., *Lebesgue's Theory of Integration*, Chelsea, NewYork, 1975.
6. Heath T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols, Cambridge, 1908.
7. Lebesgue H., *Oeuvres Scientifiques*, 5 vols, University of Geneva, 1972.
8. Newton I., *Mathematical Principles of Natural Philosophy* (Translated by A. Motte, revised by F. Cajori), University of California Press, 1934.
9. Wagon S., *The Banach- Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1985.

• Kupka J., "Measure theory: the heart of the matter", *The Mathematical Intelligencer*, (4)8(1986)47-56.

• جوزف کوپکا، دانشگاه موناش استرالیا