جزء صحیح X

$\lfloor X \rfloor$

بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی X را جزء صحیح X گوییم و آن را با نماد $\lfloor x \rfloor$ نشان می‌دهیم. یعنی می‌توان نوشت:

$$\forall x \in R\ ,\ n \in z\ ;\ n \le x < n+1 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = n$$

مثال:

$$2 \le x < 3 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 2$$
$$\lfloor x \rfloor = -1 \Leftrightarrow -1 \le x < 0$$
$$-4 \le x < -3 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = -4$$
$$2 < x < 2/3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2$$
$$x = \sqrt{2} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1$$

سؤال ۱. اگر $2\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor - 3\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = 2$، آن‌گاه حدود X کدام است؟

۱) $-1 \le x < 1$ ۲) $-2 \le x < 0$
۳) $-3 \le x < -1$ ۴) $-4 \le x < -2$

حل: گزینهٔ (۳)

$$2\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor - 3\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = 2 \Rightarrow$$
$$-\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = -2 \Rightarrow -2 \le \frac{x-1}{2} < -1 \Rightarrow$$
$$-4 \le x-1 < -2 \Rightarrow -3 \le x < -1$$

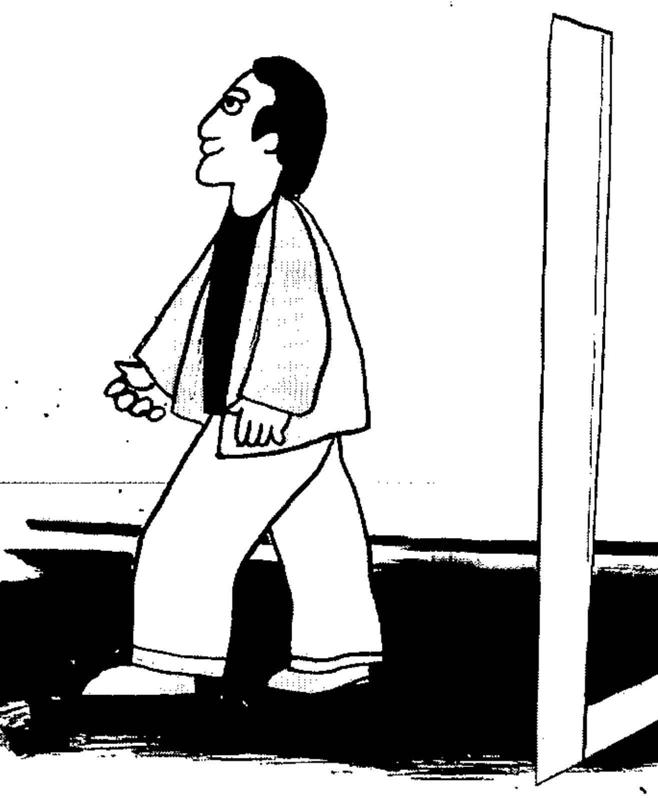
خاصیت (۱) $\forall n \in z\ ;\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

مثال:

$$\lfloor x+5 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 5$$
$$\lfloor x-2 \rfloor = \lfloor x \rfloor - 2$$
$$\lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$$

سؤال ۲. جواب معادلهٔ $\lfloor 3(\lfloor x \rfloor + 2) + \lfloor x \rfloor \rfloor = 22$ کدام است؟

۱) $4 \le x < 5$ ۲) $3 \le x < 4$
۳) $2 \le x < 3$ ۴) $1 \le x < 2$



احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی

حل: گزینهٔ (۱)

$\lfloor ۳\lfloor x\rfloor+۶+\lfloor x\rfloor\rfloor=۲۲\Rightarrow ۳\lfloor x\rfloor+۶+\lfloor x\rfloor=۲۲\Rightarrow$

$۴\lfloor x\rfloor=۱۶\Rightarrow\lfloor x\rfloor=۴\Rightarrow ۴\le x<۵$

سؤال ۳. جواب معادلهٔ

$۳\left\lfloor\frac{x+۵}{۲}\right\rfloor+۲\left\lfloor\frac{x+۷}{۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+۹}{۲}\right\rfloor=۲۲$ کدام است؟

۱) $۲\le x<۴$ ۲) $۲\le x<۳$

۳) $۱\le x<۲$ ۴) $۱\le x<۳$

حل: گزینهٔ (۴)

$۳\left\lfloor\frac{(x+۱)+۴}{۲}\right\rfloor+۲\left\lfloor\frac{(x+۱)+۶}{۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{(x+۱)+۸}{۲}\right\rfloor=۲۲$

$\Rightarrow ۳\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}+۲\right\rfloor+۲\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}+۳\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}+۴\right\rfloor=۲۲\Rightarrow$

$۳\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor+۶+۲\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor+۶+\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor+۴=۲۲\Rightarrow$

$۶\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor=۶\Rightarrow\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor=۱\Rightarrow ۱\le\frac{x+۱}{۲}<۲\Rightarrow$

$۲\le x+۱<۴\Rightarrow ۱\le x<۳$

سؤال ۴. اگر $x=\sqrt{۲}+۱$ و $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ و داشته باشیم، $\lfloor x^۳\rfloor+\lfloor x^۲\rfloor+\lfloor x\rfloor=\left\lfloor\frac{۲y-۱}{۲}\right\rfloor$ ، آن‌گاه حدود y کدام است؟

۱) $\frac{۴۱}{۲}\le y<۲۱$ ۲) $\frac{۴۱}{۲}\le y<\frac{۴۳}{۲}$

۳) $\frac{۳۹}{۲}\le y<\frac{۴۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۲}\le y<۲۰$

حل: گزینهٔ (۲)

$x=\sqrt{۲}+۱\simeq ۱/۴+۱=۲/۴\Rightarrow\lfloor x\rfloor=۲$

$x^۲\simeq(۲/۴)^۲=۵/۸\Rightarrow\lfloor x^۲\rfloor=۵$

$x^۳\simeq x(x^۲)=۲/۶(۵/۸)=۱۳/۸\Rightarrow\lfloor x^۳\rfloor=۱۳$

$\Rightarrow \left\lfloor \frac{۲y-۱}{۲} \right\rfloor = ۲+۵+۱۳ \Rightarrow \left\lfloor \frac{۲y-۱}{۲} \right\rfloor = ۲۰ \Rightarrow$

$۲۰ \le \frac{۲y-۱}{۲} < ۲۱ \Rightarrow ۴۰ \le ۲y-۱ < ۴۲ \Rightarrow ۴۱ < ۲y < ۴۳$

$\Rightarrow \frac{۴۱}{۲} \le y < \frac{۴۳}{۲}$

سؤال ۵ .
اگر، $\lfloor x \rfloor = \lfloor \log ۱ \rfloor + \lfloor \log ۲ \rfloor + \lfloor \log ۳ \rfloor + \cdots \lfloor \log ۱۰۰ \rfloor$، آن گاه حدود x کدام است؟

۱) $۱۰۰ \le x < ۱۰۱$ ۲) $۹۳ \le x < ۹۴$

۳) $۹۲ \le x < ۹۳$ ۴) $۹۱ \le x < ۹۲$

حل: گزینهٔ (۳)

$\lfloor \log ۱ \rfloor = \lfloor \log_{۲} \rfloor ۲ = \lfloor \log ۳ \rfloor = \cdots = \lfloor \log ۹ \rfloor = ۰$

$\underbrace{\lfloor \log ۱۰ \rfloor = \lfloor \log ۱۱ \rfloor = \lfloor \log ۱۲ \rfloor = \cdots = \lfloor \log ۹۹ \rfloor = ۱}_{\text{تعداد آن‌ها } (۹۹-۱۰+۱)=۹۰}$

$\lfloor \log_{۱۰۰} \rfloor = ۲$

$\lfloor x \rfloor = ۹۰ + ۲ = ۹۲ \Rightarrow ۹۲ \le x < ۹۳$

سؤال ۶ . معادلهٔ $(\lfloor x \rfloor - ۳)! = ۱$ چند جواب عضو z دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) بی‌شمار

حل: گزینهٔ (۲)

می‌دانیم: $۰! = ۱$ و $۱! = ۱$ در نتیجه:

الف) $\lfloor x \rfloor - ۳ = ۰ \Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۳ \Rightarrow ۳ \le x < ۴, x \in z \Rightarrow x = ۳$

ب) $\lfloor x \rfloor - ۳ = ۱ \Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۴ \Rightarrow ۴ \le x < ۵, x \in z \Rightarrow x = ۴$

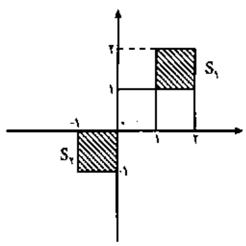
سؤال ۷ . اندازهٔ مساحت محدود به نمودار $\lfloor x \rfloor . \lfloor y \rfloor = ۱$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینهٔ (۲)

$\lfloor x \rfloor . \lfloor y \rfloor = (۱)(۱) = (-۱).(-۱)$



الف) $\begin{cases} \lfloor x \rfloor = ۱ \Rightarrow ۱ \le x < ۲ \\ \lfloor y \rfloor = ۱ \Rightarrow ۱ \le y < ۲ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \lfloor x \rfloor = -۱ \Rightarrow -۱ \le x < ۰ \\ \lfloor y \rfloor = -۱ \Rightarrow -۱ \le y < ۰ \end{cases}$

$S = S_۱ + S_۲ = ۱ + ۱ = ۲$

مسأله: ثابت کنید: $\lfloor ۲x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$

حل: $x = n + p \ , \ n \in z \ , \ ۰ < p < ۱ \Rightarrow \lfloor x \rfloor = n$

$\lfloor ۲x \rfloor = \lfloor ۲n + ۲p \rfloor = ۲n + \lfloor ۲p \rfloor$

$\left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor = \left\lfloor n + p + \frac{۱}{۲} \right\rfloor = n + \left\lfloor p + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$

$\lfloor ۲x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$

می‌خواهیم ثابت کنیم:

$۲n + \lfloor ۲p \rfloor = n + n + \left\lfloor p + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$

باید ثابت کنیم:

$۲n + \lfloor ۲p \rfloor = ۲n + \left\lfloor p + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$

حال باید ثابت کنیم:

$\lfloor ۲p \rfloor = \left\lfloor p + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$

الف) $۰ \le p \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۰ \le ۲p < ۱ \Rightarrow \lfloor ۲p \rfloor = ۰ \\ \frac{۱}{۲} \le p + \frac{۱}{۲} < ۱ \Rightarrow \left\lfloor p + \frac{۱}{۲} \right\rfloor = ۰ \end{cases}$

$\Rightarrow \lfloor ۲p \rfloor = \left\lfloor p + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$

ب)

$\frac{۱}{۲} \le p < ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۱ \le ۲p < ۲ \Rightarrow \lfloor ۲p \rfloor = ۱ \\ ۱ \le p + \frac{۱}{۲} \le (\frac{۳}{۲} \Rightarrow \left\lfloor p + \frac{۱}{۲} \right\rfloor = ۱ => \end{cases}$

$\lfloor ۲p \rfloor = \left\lfloor p + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$

خاصیت (۲): $\lfloor ۲x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$

سؤال ۸ . جواب معادلهٔ $\lfloor 2x\rfloor-\lfloor x\rfloor=-1$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}\le x<-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}\le x<\frac{5}{2}$

حل: گزینهٔ (۱): در مسأله قبل، ثابت شد

$$\lfloor 2x\rfloor=\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

پس: $\lfloor 2x\rfloor-\lfloor x\rfloor=-1\Rightarrow\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor-\lfloor x\rfloor=-1\Rightarrow$

$$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=-1\Rightarrow-1\le x+\frac{1}{2}<0\Rightarrow-\frac{3}{2}\le x<-\frac{1}{2}$$

سؤال ۹ . جواب معادلهٔ $2\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor x-\frac{1}{2}\right\rfloor=2$ کدام است؟

۱) $2\le x<3$ ۲) $1\le x<2$

۳) $\frac{3}{2}\le x<\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$

حل: گزینهٔ (۴)

$$\left\lfloor x-\frac{1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor (x+\frac{1}{2})-1\right\rfloor=\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor-1$$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$2\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor-1=2\Rightarrow$$
$$3\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=3\Rightarrow$$
$$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=1\Rightarrow 1\le x+\frac{1}{2}<2$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$$

خاصیت(۳) $\forall x\in R$ ؛ $0\le x-\lfloor x\rfloor<1$ ، $x-1<\lfloor x\rfloor\le x$

سؤال ۱۰ . اگر $x=4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+k$ ، آن‌گاه حدود k کدام است؟

۱) $-4\le k<0$ ۲) $-3\le k<1$

۳) $0\le k<4$ ۴) $0\le k<8$

حل: گزینهٔ (۳)؛ دو طرف را بر ۴ تقسیم می‌کنیم.

$$x=4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+k$$
$$\frac{x}{4}=\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+\frac{k}{4}\Rightarrow\frac{x}{4}-\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+\frac{k}{4}$$

بنا به خاصیت (۳)؛ داریم: $0\le\frac{x}{4}-\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor<1$

پس: $0\le\frac{k}{4}<1\Rightarrow 0\le k<4$

سؤال ۱۱ . اگر $\frac{x}{2}=\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor$ ، آن‌گاه معادله چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

حل: گزینهٔ (۲):

$$\frac{x}{2}=k,k\in z\Rightarrow x=2k$$
$$\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor=k\Rightarrow k\le\frac{x}{3}<k+1\Rightarrow 3k\le x<3k+3,x=2k$$
$$\Rightarrow 3k\le 2k<3k+3\Rightarrow\begin{cases}3k\le 2k\Rightarrow k\le 0\\ 3k+3>2k\Rightarrow k>-3\end{cases}$$
$$\Rightarrow-3<k\le 0\Rightarrow k=-2,-1,0$$
$$x=2k\Rightarrow x=-4,-2,0$$

سؤال ۱۲ . معادلهٔ $x^2+3=4\lfloor x\rfloor$ چند جواب دارد:

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

حل: گزینهٔ (۲)

$$x^2+3>0\Rightarrow 4\lfloor x\rfloor>0\Rightarrow x>0$$
$$\lfloor x\rfloor=k,k\in z^+\Rightarrow k\le x<k+1\Rightarrow$$
$$k^2\le x^2<(k+1)^2\Rightarrow k^2+3\le x^2+3<(k+1)^2+3$$

داشتیم: $x^۲+۳=۴k$

$$\Rightarrow k^۲+۳\le ۴k < k+۲k+۴ \Rightarrow \begin{cases} k^۲-۲k+۴>۰ \\ k^۲-۴k+۳\le ۰\end{cases}$$

همواره برقرار است. زیرا $\Delta<۰, a>۰$

$$k^۲-۴k+۳=۰\Rightarrow k=۱,۳,\ k^۲-۴k+۳\le ۰\Rightarrow ۱\le k\le ۳$$

$$\xrightarrow{k\in z} k=۱,۲,۳$$

$$x^۲+۳=۴k \xrightarrow{k=۱} x^۲=۱\Rightarrow x=۱$$

$$x^۲+۳=۴k \xrightarrow{k=۲} x^۲=۵\Rightarrow x=\sqrt{۵}$$

$$x^۲+۳=۴k \xrightarrow{k=۳} x^۲=۹\Rightarrow x=۳$$

خاصیت (۴) $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases} ۰ & , x\in z \\ -۱ & , x\in (R-z)\end{cases}$

سؤال ۱۳. مجموعهٔ جواب معادلهٔ $۲\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=۵$ کدام است؟

۱) $(۴,۵)\cup\{۶\}$ ۲) $(۶,۷)\cup\{۴\}$

۳) $(۳,۴)\cup\{۵\}$ ۴) $(۶,۷)\cup\{۵\}$

حل: گزینهٔ (۴)

الف) $x\in z$ ؛ $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=۰\Rightarrow \lfloor -x\rfloor=-\lfloor x\rfloor$ ؛

در معادله قرار می‌دهیم:

ب) $۲\lfloor x\rfloor-\lfloor x\rfloor=۵\Rightarrow \lfloor x\rfloor=۵\Rightarrow ۵\le x<۶, x\in z\Rightarrow x=۵$ ؛

$\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=-۱\Rightarrow \lfloor -x\rfloor=-۱-\lfloor x\rfloor$ ؛

$x\in (R-z)$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$۲\lfloor x\rfloor-۱-\lfloor x\rfloor=۵\Rightarrow \lfloor x\rfloor=۶\Rightarrow ۶\le x<۷, x\in (R-z)$$
$$\Rightarrow ۶<x<۷$$

مجموعهٔ جواب معادله: $(۶,۷)\cup\{۵\}$

سؤال ۱۴. اگر $k\in z^+, A=\left\{(x,y)|x,y\in R, \lfloor x^۲+y^۲\rfloor=k\right\}$ آن‌گاه مساحت شکل حاصل کدام است؟

۱) $k\pi$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}$

۳) $\frac{k\pi}{۴}$ ۴) π

حل: گزینهٔ (۴) $\lfloor x^۲+y^۲\rfloor=k\Rightarrow k\le x^۲+y^۲<k+۱$

دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $R=\sqrt{k}$

$x^۲+y^۲=k$

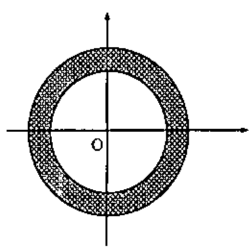
دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاعِ

$R'=\sqrt{k+۱}$

$x^۲+y^۲=k+۱$

مساحت مورد نظر، سطح بین دو دایره است.

$$A=S_۱-S_۲=\pi R'^۲-\pi R^۲=(k+۱)\pi-k\pi=\pi$$



سؤال ۱۵. دنبالهٔ $\left\{\frac{\lfloor\sqrt{k}n\rfloor}{n}\right\}$ به کدام عدد زیر همگرا است؟ $(k>۰)$

۱) $\sqrt{k}$ ۲) $\sqrt{k-۱}$

۳) $\lfloor\sqrt{k}\rfloor-۱$ ۴) $\lfloor k\rfloor+۱$

حل: گزینهٔ (۱) بنا به خاصیت ۳ داریم: $x-۱<\lfloor x\rfloor\le x$

پس می‌توان نوشت: $\sqrt{k}n-۱<\lfloor\sqrt{k}n\rfloor\le\sqrt{k}n$

نامساوی را بر $n\in N$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{k}n}{n}-\frac{۱}{n}<\frac{\lfloor\sqrt{k}n\rfloor}{n}\le\frac{\sqrt{k}n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k}n}{n}-\frac{۱}{n}\right)<\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{k}n\rfloor}{n}\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{k}\Rightarrow$$

$$\sqrt{k}<\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{k}n\rfloor}{n}\le\sqrt{k}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{k}n\rfloor}{n}=\sqrt{k}$$