توزیع های گسسته - تابع متغیر تصادفی

● حمیدرضا امیری

پیشنیاز

اگر بتوانیم اعضای مجموعه‌ای را که با آن سر و کار داریم، شمارش کنیم، این مجموعه به اصطلاح، یک **مجموعهٔ گسسته** نامیده می‌شود، حال اگر یک پدیدهٔ تصادفی رخ دهد؛ به طوری که همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن این پدیده، مجموعه‌ای گسسته تشکیل دهد، (اعضای آن قابل شمارش باشند) این مجموعه را **فضای نمونه‌ای گسسته** می‌نامیم و آن را بیشتر با S نمایش می‌دهیم. برای مثال، وقتی یک تاس را می‌اندازیم، همهٔ حالت‌های ممکن، عبارت است از ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶؛ پس $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ ، یا وقتی دو تاس را با هم می‌اندازیم (یا تاسی را دو بار می‌اندازیم)، اگر هر حالت ممکن را به صورت زوج مرتّب (a , b) و نمایش دهیم که $۱ \le a \le ۶$ و $۱ \le b \le ۶$، در این صورت، S دارای ۳۶ عضو به شکل (a , b) بوده و در واقع $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \times \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$.

حال اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد، هر زیرمجموعهٔ S مانند A، یک **پیشامد تصادفی از فضای** نمونه‌ای S نامیده شده است که احتمال به وقوع پیوستن A یا احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و از رابطهٔ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می‌کنیم. توجه دارید که **تابع احتمال**، تابعی است که دامنهٔ تعریف آن، مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S است که البته خود S را نیز شامل می‌شود. به‌عنوان مثال، وقتی یک تاس را می‌ریزیم ، S دارای ۶ عضو بوده و $P(S)$ یعنی مجموعهٔ زیرمجموعه‌های S دارای $۶۴ = ۲^۶$ عضو است؛ یعنی برای این پدیده، تابع احتمال P می‌تواند روی ۶۴ عضو اثر کند. به مثالهای زیر توجه کنید:

$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$

I) $A = \{۱,۲\} \subseteq S$ یا $A \in P(S)$

$$P(A) = P(\{۱\}) + P(\{۲\}) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۶}$$

$$II)\ B = \{x \in S \mid (x-۲)(x-۵)(x-۶) = ۰\} = \{۲,۵,۶\}$$

$$P(B) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۳}{۶} \text{ یا } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶}$$

لازم است به این نکته توجه کنید که متغیرهای تابع احتمال P، یعنی اعضای P(S) که تعداد آنها ۶۴ است، **متغیرهایی قطعی** محسوب می‌شوند؛ یعنی برای مثال، $A = \{۱,۲\}$ قطعاً زیر مجموعهٔ S است و تابع احتمال P، قطعاً روی A اثر کرده و حاصل تأثیر P روی A، یعنی P(A) همان $\frac{۲}{۶}$ است.

حال اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده بوده و تابعی چون X را از خود S به IR تعریف کنیم؛ یعنی $X : S \to \mathbb{R}$، در این صورت، دامنهٔ متغیر برای تابع X مجموعهٔ S بوده و متغیرهای این تابع، یعنی اعضای S، به شکل تصادفی به‌دست می‌آیند. برای مثال، اگر S را فضای نمونه‌ای ریختن یک تاس در نظر بگیریم، در این صورت، وقتی تاس را می‌ریزیم، در نهایت، یکی از اعضای S آن هم به شکل تصادفی رخ خواهد داد. پس این متغیرها تصادفی به دست می‌آیند و به همین دلیل، X را **تابع متغیر تصادفی** می‌نامیم.

در یک تابع متغیر تصادفی مانند X، تأثیر X روی هر یک از متغیرها قطعی نبوده و به صورت تصادفی رخ می‌دهد. بنابراین اعضای مجموعهٔ برد تابع X نیز به شکلی تصادفی و هر یک با احتمالی تولید خواهند شد. به مثال زیر دقت کنید:

فرض کنیم $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ فضای نمونه‌ای ریختن یک تاس باشد و تابع متغیر تصادفیِ X را با چند ضابطه، به صورت $X(۱) = X(۲) = ۰$ ، $X(۳) = ۱$ ، $X(۴) = ۲$ و $X(۵) = X(۶) = ۳$ تعریف کرده باشیم. در این صورت، اگر از ما سؤال شود که آیا قطعاً تابع X روی عدد ۱ اثر می‌کند، جواب خواهیم داد خیر. اگر تاس ۱ بیاید، تابع X روی آن اثر می‌کند. پس در واقع، $\frac{۱}{۶}$ احتمال دارد تابع X روی ۱ اثر کند و نیز $\frac{۱}{۶}$ احتمال دارد روی عدد ۲ اثر کند. پس می‌توان گفت $\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۶}$. احتمال دارد عدد صفر در بُرد تابع X تولید شود یا $\frac{۱}{۶}$ احتمال دارد عدد ۱ در برد تابع X تولید شود؛ بنابراین اگر جدولی شامل دو سطر تشکیل دهیم که سطر اوّل آن، مربوط به مقادیر بُرد تابع (x_iها) و سطر دوم آن، مربوط به احتمال‌های به‌وجود آمدن هر یک از آن مقادیر (p_iها) باشد، به چنین جدولی، جدول توزیع احتمال گفته می‌شود، که برای مثال قبل خواهیم داشت:

x_i	۰	۱	۲	۳
p_i	$\frac{۲}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۲}{۶}$

تذکر مهم

همواره حاصل جمع p_iها برابر ۱ است؛ یعنی $\sum_{i=۱}^{n} p_i = ۱$

که در این مثال، $\sum_{i=۱}^{۴} p_i = \frac{۲}{۶} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} + \frac{۲}{۶} = ۱$

حال سعی می‌کنم با ذکر مثال‌های متنوع، مفهوم تابع متغیر تصادفی و مفهوم تابع توزیع احتمال را بیشتر بسط داده و سپس به برخی کاربردهای آن بپردازم.

مثال (۱): یک سکّهٔ سالم را ۴ بار پرتاب می‌کنیم. روی فضای نمونه‌ای حاصل مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد رو شدنهای H در این ۴ بار پرتاب تعریف می‌کنیم:

$$S = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \{H,T\}\}$$

$$X : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X(a,b,c,d) = K$$

(که K تعداد H در ۴ بار پرتاب است.)

واضح است که K می‌تواند مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را اختیار کند؛ یعنی در ۴ بار پرتاب، یا اصلاً H نداریم یا یک H یا دو H یا سه H و یا چهار H داریم. برای مثال داریم:

$$X(T,T,T,T) = ۰ \quad , \quad X(H,T,T,T) = ۱$$

$$X(H,T,H,T) = X(H,H,T,T) = ۲$$

بنابراین، جدول توزیع احتمال برای این مثال، به شکل زیر است:

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
p_i	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$

$$۴ = \binom{۴}{۱} = \text{تعداد حالت‌های یک H در ۴ پرتاب}$$

$$۶ = \binom{۴}{۲} = \text{تعداد حالت‌های دو H در ۴ پرتاب}$$

$$۴ = \binom{۴}{۳} = \text{تعداد حالت‌های سه H در ۴ پرتاب}$$

مثال (۲): یک جفت تاس را با هم می‌ریزیم و روی فضای نمونه‌ای حاصل تابع متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. جدول توزیع احتمال را برای این تابع رسم کنید:

$$S=\{(a,b)\mid ۱\le a\le ۶\,,\,۱\le a\le ۶\}$$

$$X:S\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X(a,b)=a+b$$

برای مثال:

$$X(۲,۳)=X(۳,۲)=۵\,,\,X(۱,۱)=۲\,,\,X(۶,۶)=۱۲,\ldots$$

بدیهی است که تابع X، می‌تواند مقادیر ۲، ۳، ... و ۱۲ را تولید کند.

x_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
p_i	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

مثال (۳): در مثال (۲) مطلوب است محاسبهٔ $P(۲\le x<۵)$.

منظور از $P(x=۲)$ احتمال تولید عدد ۲ در برد تابع X است. پس:

$$P(۲\le x\le ۵)=P(x=۲)+P(x=۳)+P(x=۴)$$
$$=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۲}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}=\frac{۶}{۳۶}$$

مثال (۴): در مثال (۲) تابع متغیر تصادفی Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. جدول توزیع احتمال را برای این تابع رسم کنید.

$$Y:S\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Y(a,b)=\mathrm{Max}\,\{a,b\}$$

برای مثال:

$$Y(۲,۳)=\mathrm{Max}\,\{۲,۳\}=۳$$

$$Y(۱,۶)=\mathrm{Max}\,\{۱,۶\}=۶$$

$$Y(۱,۱)=\mathrm{Max}\,\{۱,۱\}=\mathrm{Max}\,\{۱\}=۱$$

همان طور که مشاهده می‌کنید، تابع Y می‌تواند مقادیر ۱، ۲،... و ۶ را تولید کند و برای مثال داریم:

$$P(Y=۲)=P\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}=\frac{۳}{۳۶}$$

پس جدول توزیع احتمال این تابع، به شکل زیر است:

y_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
p_i	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۷}{۳۶}$	$\frac{۹}{۳۶}$	$\frac{۱۱}{۳۶}$

مثال (۵): در یک جعبه، ۷ سیب موجود است، که ۳ تای آنها خرابند. اگر از این جعبه ۳ سیب را تصادفی خارج کنیم و روی فضای نمونه‌ای حاصل مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد سیب‌های خراب در برداشت ۳ سیب تعریف کنیم، جدول توزیع احتمال و ضابطهٔ تابع توزیع احتمال را بنویسید.

واضح است که تعداد سیب‌های خراب در برداشت ۳ سیب، یا صفر است یا ۱ یا ۲ و یا ۳. پس مقادیر برد تابع X، اعداد صفر تا ۳ است.

$$P(X=x_i)=\frac{\binom{۳}{x_i}\times\binom{۴}{۳-x_i}}{\binom{۷}{۳}}\quad \text{(ضابطهٔ تابع توزیع احتمال)}$$

$$\Rightarrow P(X=۰)=\frac{\binom{۳}{۰}\times\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۴}{۳۵}\,,$$

$$P(X=۱)=\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۱۸}{۳۵}\,,$$

$$P(X=۲)=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۱۲}{۳۵}\,,$$

$$P(X=۳)=\frac{\binom{۳}{۳}\times\binom{۴}{۰}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۱}{۳۵}\,,$$

x_i	۰	۱	۲	۳
p_i	$\frac{۴}{۳۵}$	$\frac{۱۸}{۳۵}$	$\frac{۱۲}{۳۵}$	$\frac{۱}{۳۵}$

مثال (۶): سکّه‌ای طوری ساخته شده است که در آن $P(H)=\frac{۳}{۵}$ است. اگر این سکّه را به دفعات دلخواه پرتاب کرده و مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌ها تعریف کنیم تا اوّلین T ظاهر شود، در این صورت، مقادیر بُرد تابع و سپس جدول توزیع احتمال را برای آن رسم کنید.

با توجه به تعریف تابع X داریم:

$$X(T)=۱\;,\;\;X(H,T)=۲\;,\;\;X(H,H,T)=۳,$$

$$X(H,H,H,T)=۴\;,\;\;\ldots$$

بنابراین برد تابع، مجموعهٔ اعداد طبیعی بوده که مجموعه‌ای نامتناهی است.

وقتی مقدار X برابر با ۳ می‌شود؛ یعنی در پرتاب سوّم T ظاهر شده، پس باید در دو پرتاب قبل، سکّه H آمده باشد.

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	...
p_i	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵}$	$\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲}\times\frac{۲}{۵}$	$\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۳}\times\frac{۲}{۵}$	$\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۴}\times\frac{۲}{۵}$	

$$\left(\Sigma p_i=\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵}+\cdots=\frac{\text{جمله‌اول}}{\text{۱−قدرنسبت}}=\frac{\frac{۲}{۵}}{۱-\frac{۳}{۵}}=\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۲}{۵}}=۱\right)$$

مثال (۷): بهزاد و مهرداد، به ترتیب تاسی را می‌ریزند و با هم قرار می‌گذارند که هر کس برای اوّلین بار ۶ آورد، برنده است. اگر اوّل بهزاد بازی را شروع کند، احتمال برنده شدن مهرداد را محاسبه کنید.

برای حلّ این مسأله، فرض می‌کنیم که تاسی را به دفعات دلخواه پرتاب کرده و روی فضای نمونه‌ای حاصل، مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌ها تعریف می‌کنیم تا اوّلین ۶ ظاهر شود. در این صورت، مقدار X می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ یا... باشد، که به ترتیب نشان دهندهٔ آن است که در پرتاب اوّل ۶ آمده یا در پرتاب دوم ۶ آمده (در پرتاب اول ۶ نیامده و در بار دوم ۶ آمده) یا در پرتاب سوم ۶ آمده (در دو پرتاب اول و دوم ۶ نیامده و در پرتاپ سوم ۶ آمده) یا... .

بنابراین مقادیر برد تابع (x_iها) عبارتند از ۱، ۲، ۳ و... .

حال با رسم جدول توزیع احتمال و مدل‌سازی مسأله روی جدول، می‌توان به راحتی مسأله را حل کرد:

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
p_i	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}$	$\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۲}\times\frac{۱}{۶}$	$\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳}\times\frac{۱}{۶}$	$\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴}\times\frac{۱}{۶}$	$\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۵}\times\frac{۱}{۶}$	...

واضح است که مکان‌های فرد در x_iها متعلق بـه بـهزاد و مکان‌های زوج، به مهرداد تعلّق دارد؛ یعنی مهرداد می‌تواند در بار دوم پرتاب تاس یا بار چهارم یا... برنده شود. پس احتمال برنده شدن مهرداد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(\text{برنده شدن مهرداد})=P(x=۲)+P(x=۴)+P(x=۶)+\ldots$$

$$=\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}+\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳}\times\frac{۱}{۶}+\ldots=\frac{\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}}{۱-\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۲}}=\frac{\frac{۵}{۳۶}}{\frac{۱۱}{۳۶}}=\frac{۵}{۱۱}$$

(همان‌طور که مشاهده کردید، احتمال برنده شدنِ مهرداد $\frac{۵}{۱۱}$ بوده و احتمال برنده شدن بهزاد $۱-\frac{۵}{۱۱}=\frac{۶}{۱۱}$ است و دلیل بیشتر بودن احتمال برنده شدن بهزاد، این است که او بازی را شروع کرده!)

مثال(۷): روی دو وجه یک تاس، عدد ۱، روی دو وجه دیگر آن، عدد ۲ و روی دو وجه دیگر آن، عدد ۳ را نوشته و آن را سه بار می‌ریزیم، اگر مقدار تـابع مـتغیر تـصادفی X را مجموع سه عدد رو شده در سه پرتاب تعریف کنیم، مقادیر برد تابع X و جدول توزیع احتمال را برای آن تشکیل دهید.

با توجه به تعریف تابع X داریم:

$$X(۲,۱,۱)=۲+۱+۱=۴$$

$$X(۱,۱,۱)=۱+۱+۱=۳\quad,\quad X(۳,۳,۳)=۹$$

بـنابرایـن بـرد تـابع X، عـبارت است از مـجموعهٔ $\{۳,۴,\ldots,۹\}$، و جدول توزیع احتمال آن، به شکل زیر حاصل می‌شود:

x_i	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
p_i	$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۳}{۲۷}$	$\frac{۶}{۲۷}$	$\frac{۷}{۲۷}$	$\frac{۶}{۲۷}$	$\frac{۳}{۲۷}$	$\frac{۱}{۲۷}$

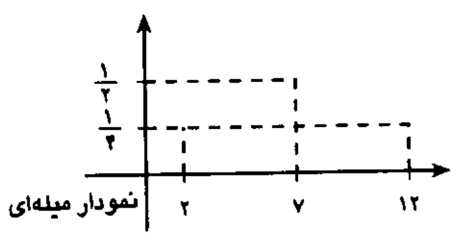
(واضح است که تاس مورد نظر، فضای نمونه‌ای به شکل $S=\{۱,۲,۳\}$ داشته، که چون سه بار ریخته شـده است، فضای نمونه‌ای حاصل دارای $۲۷=۳\times۳\times۳$ عضو است.

مثال (۸): روی یک طرف سکه‌ای عدد ۱ و طرف دیگر آن عدد ۶ را نوشته‌ایم. اگر این سکّه را دوبار پرتاب و مقدار تابع متغیر تصادفی X را مجموعه اعداد ظاهر شده در این ۲ پرتاب تعریف کنیم، مقادیر برد X را به دست آورده و جدول توزیع احتمال را برای آن تشکیل دهید و نمودار میله‌ای آن را رسم کنید.

با توجه به تعریف تابع X داریم:

$$X(۱,۱)=۲\quad,\quad X(۶,۶)=۱۲\quad,\quad X(۱,۶)=X(۶,۱)=۷$$

x_i	۲	۷	۱۲
p_i	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$



تمرین

در مثال قبل، اگر سکّه را سه بار پرتاب می‌کردیم، مقادیر برد تابع X و جدول توزیع احتمال آن، به چه صورتی تغییر می‌کرد؟