توابع گزاره‌ای و سورها

غلامرضا یاسی‌پور

ادامهٔ شمارهٔ قبل

اوّلین آنها، یعنی قضیّهٔ A ، را می‌توان متوالیاً به صورت زیر تفسیر:

با معلوم بودن هر شیء فردی، اگر این (شیء) انسان باشد در این صورت میراست.

با معلوم بودن هر x ، اگر x انسان باشد در این صورت x میراست.

با معلوم بودن هر x، x انسان است $\supset$ x میراست

و بالاخره به صورت:

$$(x) [Hx \supset Mx]$$

علامتی کرد.

تنظیم علامتی قضیّهٔ A مان تسویر عمومی تابع گزاره‌ای مختلط «$Hx \supset Mx$»ی است که به عنوان مثالهای جانشینش نه قضایای فردی بلکه قضایای شرطی‌ای که مقدم و تالیشان قضایای فردی‌ای هستند که موضوعات یکسانی دارند را داراست. در میان مثالهای جانشین تابع گزاره‌ای «$Hx \supset Mx$» شرطیهای «$Ha \supset Ma$»، «$Hb \supset Mb$»، «$Hc \supset Mc$» و غیره قرار دارند. در علامتی کردن قضیهٔ A از کروشه‌ها به عنوان علامات جداسازی، برای دلالت کردن به این‌که سور عمومی «(x)» در مورد تمام تابع گزاره‌ای مختلط «$Hx \supset Mx$» به کار می‌رود یا تمام این تابع را در قلمرو خود دارد، استفاده می‌شود. علامت قلمرو یک سور بسیار مهم است، چه تفاوت در قلمرو متناظر با تفاوت در معنی است. عبارت «$(x) [Hx \supset Mx]$» قضیه‌ای است که ادعا می‌کند تمام مثالهای جانشین تابع گزاره‌ای «$Hx \supset Mx$» راست‌اند. در صورتی که عبارت «$(x) Hx \supset Mx$» تابع گزاره‌ای‌ای است که در مثالهای جانشینش «$(x) Hx \supset Ma$»، «$(x) Hx \supset Mb$»، «$(x) Hx \supset Mc$» و غیره می‌باشد[1].

قضیّه E یعنی «هیچ انسانی میرا نیست» را می‌توان به همین ترتیب و متوالیاً به صورت زیر تفسیر:

با معلوم بودن هر شیء فردی، اگر آن (شیء) انسان است در این صورت میرا نیست.

با معلوم بودن هر x ، اگر x انسان‌است در این صورت x میرا نیست.

با معلوم بودن هر x، x انسان است $\supset$ x میرا نیست.

و سپس به صورت:

$$(x) [Hx \supset \sim Mx]$$

علامتی کرد. به همین ترتیب، قضیّهٔ I یعنی «بعضی انسانها میرا هستند» را می‌توان به صورت زیر تفسیر:

حداقل یک شیء وجود دارد که انسان و میراست.

حداقل یک شیء وجود دارد به‌طوری که آن (شیء) انسان و میراست.

حداقل یک x وجود دارد به‌طوری که آن x انسان و میراست.

حداقل یک x وجود دارد به طوری که x انسان است $\wedge$ x میراست.

و به‌طور کامل به صورت:

$$(\exists x) [Hx \wedge Mx]$$

علامتی کرد. بالاخره، قضیّهٔ O یعنی «بعضی انسانها میرا نیستند» به

صورت:

حداقل یک شیء وجود دارد که انسان است اما میرا نیست.

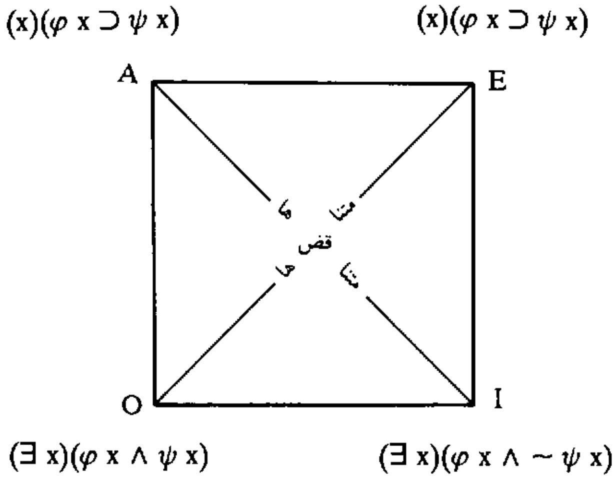
حداقل یک شیء وجود دارد به طوری که آن (شیء) انسان است اما میرا نیست.

حداقل یک x وجود دارد به‌طوری که آن x انسان است و میرا نیست.

در می‌آید و سپس به صورت تسویر وجودی تابع مختلط:

$$(\exists x)[\,Ex \wedge \sim Mx\,]$$

علامتی می‌شود. چون حروف یونانی فی و پسی را برای نمایش هر علائم صفتی‌ای به‌کار بریم، چهار قضیهٔ موضوع محمولی عمومی منطق قدیم را می‌توان با جدول مربع شکل زیر نمایش داد.



از این چهار، A و O متناقض، و E و I نیز متناقضند. اما هیچ یک از روابط دیگری که در رابطه با جدول مربع شکل واقع در شمارهٔ قبل مورد بحث قرار گرفت، حتی زمانی‌که فرض کنیم حداقل یک فرد در عالم موجود است، در مورد قضایای A، E، I، و O قدیم برقرار نیست. زمانی که « $\varphi\, x$ » تابع گزاره‌ای که مثالهای جانشین راست ندارد باشد، در این صورت بی‌توجه به‌این‌که چه صفتی توسط «φ» علامتی شده، توابع گزاره‌ای « $\varphi\, x \supset \psi\, x$ » و « $\varphi\, x \supset \sim \psi\, x$ » تنها مثالهای جانشین راست دارند، زیراتمام مثالهای جانشینشان گزاره‌های شرطی با مقدمهای دروغند. در چنین حالاتی، قضایای A و E که تسویرات عمومی این توابع گزاره‌ای مختلطند، راستند، بنابراین، قضایای A و E متضادنیستند. بار دیگر، وقتی «$\varphi\, x$» تابع گزاره‌ای‌ای که مثالهای جانشین راست ندارد باشد، در این صورت بی‌توجه به این‌که «$\varphi\, x$» چیست، توابع گزاره‌ای « $\varphi\, x \wedge \psi\, x$ » و « $\psi\, x \wedge \sim \psi\, x$ » تنها مثالهای جانشین دروغ دارند، زیرا مثالهای جانشینشان گزاره‌های عطفی‌ای هستند که منعطف اوّلشان دروغ است. در چنین حالاتی قضایای I و O که تسویرات وجودی این توابع گزاره‌ای مختلطند دروغند، و بنابراین، قضایای I و O تحت متضاد نیستند. در تمام چنین حالاتی، از آن‌جاکه قضایای A و E راست و قضایای I و O دروغند، راستی یک کلیه مستلزم راستی جزئیهٔ متناظرش نیست، و رابطهٔ استلزامی‌ای بین آنها برقرار نمی‌باشد.

اگر این فرض را داشته باشیم که حداقل یک فرد موجود است، در این صورت « $(x)[\varphi\, x \supset \psi\, x]$ » مستلزم « $(\exists x)[\varphi\, x \supset \psi\, x]$ » است. اما گزارهٔ اخیر قضیهٔ I نیست. قضیهٔ I به‌شکل «بعضی φها ψ هستند» به صورت « $(\exists x)[\varphi\, x \wedge \psi\, x]$ »، که ادعا می‌کند حداقل یک شیء موجود است که هر دو صفت φ و ψ را داراست، علامتی می‌شود. اما قضیهٔ « $(\exists x)[\varphi\, x \supset \psi\, x]$ » تنها ادعا می‌کند که حداقل یک شیء که یا صفت ψ را دارد یا صفت φ را ندارد موجود است که ادعایی بسیار متفاوت و ضعیفتر از اوّلی است.

چهار صورت موضوع محمولی سنتی A، E، I و O تنها صورتهای قضایای عمومی نیستند، و قضایای عمومی دیگری که شامل تسویر توابع گزاره‌ای پیچیده‌تری هستند نیز وجود دارند. به این ترتیب قضیهٔ عمومی «تمام اعضا یا ولی یا معلم هستند» که به همان معنی «تمام اعضا ولی هستند یا تمام اعضا معلمند» نیست، به صورت « $(x)[Mx \supset (Px \vee Tx)]$ » علامتی می‌شود. و قضیهٔ عمومی «بعضی سناتورها یا خائن‌اند یا فریب خورده» به صورت « $(\exists x)[Sx \wedge (Dx \vee Mx)]$ » علامتی می‌شود. باید توجه کرد که قضیه‌ای چون «سیب و موز مغذی است» را می‌توان یا به‌صورت ترکیب عطفی دو قضیهٔ A، « $\{(x)[Ax \supset Nx]\} \wedge \{(x)[Bx \supset Nx]\}$ »، یا به‌صورت یک قضیهٔ عمومی نامرکب واحد

«$(x)[(Ax \vee Bx) \supset Nx]$» علامتی کرد، در حالی که نباید آن‌را به صورت:

«$(x)[(Ax \wedge Bx) \supset Nx]$» علامتی کرد، زیرا گفتن این‌که «سیب و موزمغذی است» مساوی این است که بگوییم چیزی مغذی است که یا سیب یا موز باشد، نه این‌که مساوی این است که بگوییم چیز (هر چه که باشد) مغذی است که هم سیب هم موز باشد. باید تأکید شود که هیچ قاعدهٔ مکانیکی‌ای که گزاره‌ها را از زبان طبیعی به علائم منطقیمان ترجمه کند موجود نیست، و در هر حالت شخص باید معنی جملهٔ زبان طبیعی را بداند، و بعد این معنی را برحسب توابع گزاره‌ای و سورها بیان کند.

یادداشتها

۱ ـ در این مورد همان قرارداد علامتی را که برای نقیض به کار می‌بردیم (هم در مورد سور عمومی هم در مورد سور وجودی) داریم، یعنی سور در مورد کوچکترین ترکیب کننده‌ای که جداسازی اجازه می‌دهد به کار می‌رود یا آن‌را در قلمرو دارد.

مرجع:

Symbolic Logic
Irving M. Copi

پاسخ معماهای فیثاغورس

۱ـ پاسخهای من به مسأله‌های پیشنهادی فیثاغورس به شرح زیر است:

الف: به نظر من سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه نخست او ۹۱، ۸۴ و ۳۵ واحد بود.

ب: سه ضلع مثلث مختلف‌الاضلاع پیشنهادی پسر بزرگ احتمالاً ۹۵، ۷۹ و ۳٦ واحد بود.

ج: سه ضلع مثلث مختلف‌الاضلاع پیشنهادی پسر دوّم تقریباً به‌طور حتم ۱۰۰، ۷۱ و ۳۹ واحد بود.

۲ـ الف: سه ضلع مثلثِ «شوخی‌آمیز» پیشنهادیِ پسر کوچک ۴۹، ۵٦ و ۱۰۵ واحد بود.

ب: سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه کوچکی که او از سَرِ طنز فکر کرده بود ۵، ۱۲ و ۱۳ واحد بود و همچنین ضلعهای مثلث مختلف‌الاضلاع او ۷، ۸ و ۱۵ واحد طول داشت!

۳ـ الف: نخستین راه‌حل جدی پیشنهادی پسر کوچک، مثلثی با ضلعهای ۱۰۱، ٦۹ و ۴۰ واحد بود. دومین راه‌حل او مثلثی بود به ضلعهای ۱۰۴، ٦۱ و ۴۵ واحد. احتمال می‌رود که راه حل پسر بزرگ برای دوّمین معمای فیثاغورس عبارت بود از:

ـ مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ٦۵، ۵٦ و ۳۳ واحد.

ـ مثلث مختلف‌الاضلاع به اضلاع ٦۸، ۵۱ و ۳۵ واحد.

ب: و اما راه حل پسر دوّم:

ـ احتمالاً مثلث قائم‌الزاویه او دارای ضلعهای ۵۳، ۴۵ و ۲۸ و مثلث مختلف‌الاضلاع وی به ضلعهای ۵٦، ۳۹ و ۳۱ واحد بود.

ـ راه‌حل نادرستِ پسرِ کوچک ممکن است چنین بوده باشد:

مثلث قائم‌الزاویه با ضلعهای ۳۵، ۲۸ و ۲۱ واحد.

مثلث مختلف‌الاضلاع با ضعلهای ۳٦، ۲۵ و ۳۵ واحد.

دومین راه‌حل (که او آن را از نظر دور داشت)، مثلثی است مختلف‌الاضلاع با ضلعهای ۳۳، ۳۱ و ۲۰ واحد.

۴ـ من مطمئن نیستم که فیثاغورس با طرح مسألهٔ آخر قصد آن داشت که سربه سرِ فرزندان خویش بگذارد، بلکه به شخصه آن رایک مسألهٔ تفکربرانگیز می‌دانم. بهترین راه‌حلی که می‌توانم برای آن ارائه دهم، معادله‌ای است که در پی می‌آید:

$$(۲۷x^۲ + ۳٦٦x + ۱۱۲۰)^۲ + (۳٦x^۲ + ٦۷۸x + ۳۱۰۲)^۲ + (۴۵x^۲ + ۷٦۲x + ۳۲۹۸)^۲ = (۲۷x^۲ + ۳۵۸x + ۱۰۷۰)^۲ + (۳٦x^۲ + ٦۱۴x + ۲۷۰۲)^۲ + (۴۵x^۲ + ۸۱۸x + ۳٦۴۸)^۲$$

که در آن $x \geq ۰$ است.

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که فیثاغورس، به یک تعبیر، نیّت سَربه‌سَر گذاشتنِ آنها را داشت. امّا هیچ لازم نبود که من یک چنین راه‌حل پیچیده‌ای برای مسألهٔ آخر فیثاغورس ارائه دهم. در واقع کوچکترین (؟) راه حل که عملاً در محدودهٔ اشتباه و لغزش پسر کوچک قرار می‌گیرد، از این قرار است:

$$۳۵^۲ + ۲۸^۲ + ۲۱^۲ = ۲۰^۲ + ۲۳^۲ + ۳۹^۲$$