توابع پوشا و بررسی خاصیت پوشایی در انواع توابع

حمید رضا امیری

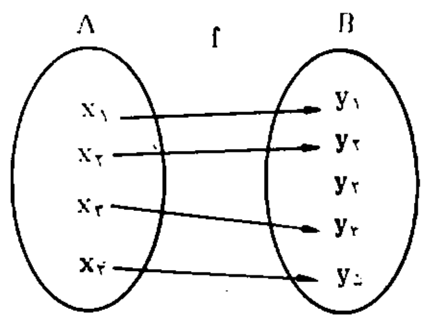
در مقاله‌ای تحت عنوان «تابع و بررسی خاصیت یك به یکی در انواع توابع» (برهان ۲ صفحهٔ ۲۲) با مفهوم تابع و خاصیت یك به یکی توابع آشنا شدیم. در این مقاله می‌خواهم توابع پوشا یا پوششی را مورد بحث و بررسی قرار دهم. ابتدا به تعریف چنین توابعی می‌پردازم:

هرگاه $f : A \to B$ تابعی مفروض باشد این تابع را پوششی یا پوشا می‌نامیم در صورتی که برد آن تمامی مجموعهٔ دوم یعنی B را بپوشاند یا به عبارت دیگر:

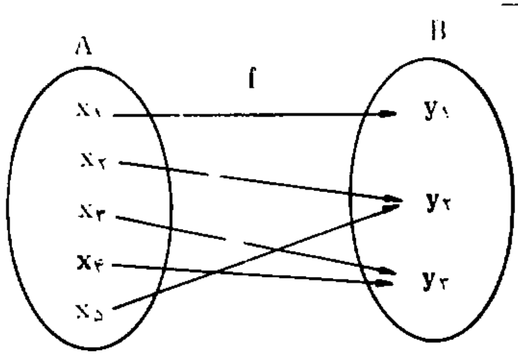
$R_f = B$ هرگاه تابع $f : A \to B$ پوشا است

در تعریف تابع دیدیم که در حالت کلی $R_f \subseteq B$، بنابراین در توابع پوشا که $R_f = B$، هیچ عضوی از مجموعهٔ دوم نمی‌توان یافت که توسط عضوی از دامنه پوشیده نشده باشد.

برای درك بهتر مطلب به بررسی وضعیت چند تابع به صورت نمودار پیکانی می‌پردازیم، دقت کنید:



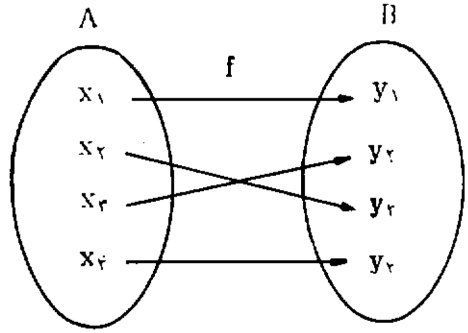
I) این تابع پوشا نیست زیرا $y_3 \in B$ و y_4 توسط هیچ یك از اعضای A پوشیده نشده است ولی تابع یك به یك است.



II) این تابع پوشا است زیرا:

$$R_f = \{y_1, y_2, y_3\} = B$$

و همان‌طور که مشاهده می‌کنید تابع در عین حال که پوششی است یك به یك نمی‌باشد.



III) این تابع هم یك‌به‌یك است وهم پوششی.

حال می‌خواهیم این مفهوم‌را به زبان ریاضی بیان کنیم، به عبارت زیر توجه کنید:

تابع $f : A \to B$ پوشا است $\Longleftrightarrow$

$$\forall y \in B \ \exists \ x \in D_f \ , \ f(x) = y$$

(به ازای هرعضو از مجموعهٔ دوم مانند y ، بـاید عضوی از دامنه، چون x وجود داشته‌باشد به قسمی که این x توسط تابع f (تأثیرتابع f) برابر با y باشد.)

بنابراین‌بررسی این‌که آیا تابع پوششی‌است یـا خیر، باتوجه به تعریف‌توابع پوشا، مستلزم این است‌که بردتابع را تعیین‌کرده وبررسی کنیم آیا با مجموعه دوم برابراست یاخیر؟

این مسأله گاهی با مشکلاتی مواجه می‌شود (مسألهٔتعیین برد تابع) وبرای رفع‌این مشکل به طریق زیرعمل‌می‌کنیم:

(اگربتوانیم به‌ازای yای دلخواه ازمجموعهٔدوم‌همواره xای از دامنهٔتابع‌بیابیم‌که $f(x) = y$ مشکل‌برطرف‌می‌شود.)

قدم اول: yای دلخواه از مجموعهٔ دوم انتخاب کرده و مساوی باضابطهٔ تابع‌قرار می‌دهیم.

قدم دوم: پس‌از مساوی قراردادن y باضابطهٔ تابع:

$$(y = f(x))$$

$\underline{x}$ را برحسب $\underline{y}$ بـه دست می‌آوریم $(x = f(y))$. این عمل امکان‌پذیراست‌که سعی می‌شود درحالتهای مختلف به چگونگی آن‌پرداخته شود.

قدم سوم: پس از مشخص‌کردن ضابطهٔ $\underline{x}$ برحسب y ، به بحث‌روی وجود x بـه ازای yهای واقع در مجموعهٔ دوم می‌پردازیم‌که نیازاست دوشرط زیربررسی شوند:

شرط اول– به ازای‌هر y در مجموعهٔ دوم ، x همواره تعریف‌شده باشد.

شرط دوم– $\underline{x}$ در دامنهٔ تعریف‌تابع باشد.

تذکر ۱ : نقض هریك‌از دوشرط بالا، پوشایی تابع را نقض می‌کند .

تذکر ۲ : اگر f^{-1} را وارون f فرض‌کنیم ، هرعضوی راکه f ازدامنه‌به‌بردش‌انتقال‌دهد f^{-1} آن‌عضورا مجدداً ازبرد به‌دامنه‌منتقل می‌کند درحقیقت‌همواره‌داریم:برد $f =$ دامنهٔ f^{-1} $(R_f = D_{f^{-1}})$ و $x = f(y)$ همان ضابطهٔ f^{-1} است کـه از روی‌ضابطهٔ تابع $(y = f(x))$ حاصل می‌شود و اگر به خاطر داشته‌باشید گفتیم‌که مسألهٔ اصلی در بررسی خاصیت پوشایی توابع تعیین‌برد آنها می‌باشد.

حال‌به بررسی چند مثال می‌پردازیم:

مثال ۱ – خاصیت پوشایی را برای تابع با ضابطهٔ

$$f : N \to IR$$
$$f(x) = ۲x - ۳$$

بررسی کنید .

فرض‌کنیم $y \in IR , y = ۲x - ۳ \Longrightarrow \boxed{x = \frac{y+۳}{۲}}$

همان‌طورکه‌مشاهده می‌شود به‌ازای‌هر y در IRهمواره $\underline{x}$ تعریف شده‌است وعددی‌است حقیقی اما لزوماً ممکن است در D_f یعنی N نباشد مثلاً اگـر قرار دهیم $y = ۲$ در ایـن صورت $x = \frac{۵}{۲}$ که $\frac{۵}{۲} \notin N$ لذا تابع‌پوشا نیست.

مثال ۲ – خاصیت‌پوشایی‌را برای‌تابع با ضابطهٔ:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{3x-4}{2}$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $y \in \mathbb{R}$, $y=\frac{3x-4}{2} \Longrightarrow$

$$2y = 3x-4 \Longrightarrow \boxed{x=\frac{2y+4}{3}}$$

واضح است که برای هر $y\in\mathbb{R}$ همواره x تعریف شده و عددی است حقیقی اما ممکن است در D_f یعنی $\mathbb{R}^+$ نباشد مثلاً اگر $\underline{y=-3}$ را از IR انتخاب کنیم در این صورت

$$x = \frac{-2}{3}$$

که $-\frac{2}{3} \notin \mathbb{R}^+$ لذا تابع پوششی نیست.

مثال ۳ - تابع با ضابطهٔ $f : \mathbb{R}-\{-2\} \to \mathbb{R}$ مفروض

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$$

است، آیا این تابع پوشا است؟

فرض کنیم $y\in\mathbb{R}$, $y=\frac{2x-1}{x+2} \Longrightarrow$

$$yx+2y=2x-1$$
$$\Longrightarrow yx-2x=1-2y \Longrightarrow$$
$$x(y-2)=1-2y \Longrightarrow \boxed{x=\frac{1-2y}{y-2}}$$

با توجه به ضابطهٔ اخیر (x برحسب y) واضح است که برای $\underline{y=2}$ ، x تعریف نشده و عددی حقیقی حاصل نمی‌شود پس تابع f پوشا نیست (عدد ۲ در IR توسط هیچ عضوی از دامنه پوشیده نمی‌شود)

تذکر: اگر مجموعهٔ دوم یا هم‌دامنهٔ تابع f را از IR به $\mathbb{R}-\{2\}$ تبدیل کنیم تابع پوشا خواهد شد زیرا دیگر $y=2$ در مجموعهٔ دوم وجود ندارد تا انتخاب شود و x ای به ازای آن تعریف نشود.

مثال ۴ - در تابع با ضابطهٔ $f : \mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$ ،

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

مجموعهٔ دوم را طوری تغییر دهید که تابع پوشا باشد.

اگر $y\in\mathbb{R}$, $y=\frac{ax+b}{cx+d} \longrightarrow$

$$cxy+dy=ax+b \Longrightarrow cxy-ax=b-dy$$
$$\Longrightarrow x=\frac{b-dy}{cy-a}$$

تنها عضوی از IR که به ازای آن x ای از دامنهٔ تابع تعریف نمی‌شود ریشهٔ مخرج یعنی $y=\frac{a}{c}$ است

پس اگر مجموعهٔ دوم را به $\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$ تغییر دهیم تابع پوششی خواهد شد.

طرح یک تست: تابع $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}\to\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ با کدام ضابطه می‌تواند پوشا باشد؟

۱) $f(x)=\frac{x+2}{2x-3}$

۲) $f(x)=\frac{4x-2}{2x-3}$

۳) $f(x)=\frac{2x+1}{4x-6}$

۴) $f(x)=\frac{1-2x}{4x-6}$

با توجه به مثال قبل واضح است که گزینهٔ (۴) جواب مورد نظر است.

مثال ۵ - تابع‌باضابطهٔ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ مفروض‌است.

$$f(x)=x^2$$

آیا این‌تابع پوشا است؟

اگر $y\in\mathbb{R}^+\ ,\ y=x^2 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{y}$

می‌بینیم‌که برای هر $y\in\mathbb{R}^+$ ، همواره x تعریف شده و در دامنهٔ f موجود است درحقیقت برای هر $y\in\mathbb{R}^+$ ، دو عدد حقیقی از دامنه وجود داردکه برروی y تصویر می‌شوند (هر عضو $\mathbb{R}^+$ توسط دو عضو دامنه پوشیده می‌شود). لذا تابع پوشا می‌باشد.

تذکر: اگر تابع تعریف شده در مثال ۵ را به صورت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف‌کنیم، دراین‌صورت پوششی نمی‌باشد

$$f(x)=x^2$$

(اعداد منفی پوشیده نمی‌شوند).

تذکر: چون همواره‌حاصل یک‌رادیکال با فرجهٔ زوج، مثبت می‌باشد پس توابع‌به صورت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ که $\underline{n}$

$$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$$

زوج است هیچگاه نمی‌توانند پوشا باشند. ($\mathbb{R}^-$ پوشیده نمی‌شود.)

مثال ۶ - آیا تابع با ضابطهٔ :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^-$$
$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$$

پوشا می‌باشد (چون‌درمعادلهٔ $x^2+x+1=0$ ، دلتاهمواره منفی و ضریب x^2 عددی است مثبت لذا همواره

$$x^2+x+1>0$$

پس دامنهٔ f ، $\mathbb{R}$ می‌باشد).

اگر $y\in\mathbb{R}^+\ ,\ y=\sqrt{x^2+x+1}$

$$\Longrightarrow y^2=x^2+x+1$$
$$\Longrightarrow x^2+x+1-y^2=0$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \nearrow a=1 \\ \rightarrow b=1 \\ \searrow c=(1-y^2) \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \Delta=1-4(1-y^2)$$

$$\Longrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1-y^2)}}{2}$$

$$\Longrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{4y^2-3}}{2}$$

$$\Longrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{4y^2-3}}{2}$$

یا

$$x=\frac{-1-\sqrt{4y^2-3}}{2}$$

با توجه به ضابطه‌های به دست‌آمده برای x برحسب y واضح است‌که اگر $-\frac{\sqrt{3}}{2}<y<\frac{\sqrt{3}}{2}$ در این صورت زیر رادیکال منفی و x تعریف نشده خواهد بود ، بنابراین تابع پوشا نمی‌باشد.

y	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$4y^2-3$	$+$	0	$-$	0	$+$

تذکر: در مثال (۶) اگردر $x^2+x+1-y^2$ ضریب x را بزرگتر یا مساوی‌با ۲ انتخاب‌کنیم دراین‌صورت $\Delta\geqslant 0$ بوده وهمواره برای‌هر y در $\mathbb{R}^+$ ، xای‌حقیقی‌دردامنه‌وجود دارد و تابع‌پوششی خواهد شد.

مثلاً در $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}$ داریم :

$$y=\sqrt{x^2+3x+1} \Longrightarrow y^2=x^2+3x+1$$
$$\Longrightarrow x^2+3x+1-y^2=0$$

$$\Delta=9-4(1-y^2) \implies \Delta=4y^2+5\geqslant 0$$

$$\implies x=\frac{-1\pm\sqrt{4y^2+5}}{2}\in IR$$

$$(\forall y\in IR^+)$$

مثال ۷ - اولاً نشان‌دهید که توابع:

$$f: IR\to IR \;,\; f: IR\to IR$$
$$f(x)=\cos x \qquad f(x)=\sin x$$

غیر پوشا و توابع

$$f: IR\to IR \;,\; f: IR\to IR$$
$$f(x)=\mathrm{cotg}\,x \qquad f(x)=\mathrm{tg}\,x$$

پوشا می‌باشند.

ثانیا دوتابع اول با چه قیدی پوششی خواهند بود؟

اولاً چون حدود تغییرات $\sin x$ و $\cos x$ اعداد حقیقی بین ۱ و ۱ — وخود ۱ و ۱ — است، یعنی:

$$-1\leqslant \cos x\leqslant 1 \;,\; -1\leqslant \sin x\leqslant 1$$

واضح است که yهای خارج از این محدوده توسط این توابع پوشیده نمی‌شوند ولی چون

$$-\infty<\mathrm{cotg}\,x<+\infty \;,\; -\infty<\mathrm{tg}\,x<+\infty$$

این دوتابع پوشا هستند. یعنی، اگر مثلاً:

$$y\in IR \;,\; y=\mathrm{tg}\,x \implies x=\mathrm{arctg}\,y$$

و برای‌هر y، xای در IR موجود است که $f(x)=y$. ثانیاً واضح است که اگر دوتابع اول رابه صورت زیر تعریف کنیم پوششی خواهند بود:

$$f: IR\to[-1\,,\,1] \;,\; f: IR\to[-1,1]$$
$$f(x)=\sin x \qquad f(x)=\cos x$$

مثال ۸ - پوشایی تابع با ضابطهٔ:

$$f: IR\to IR^+$$
$$f(x)=\sqrt{x-2}$$

را بررسی کنید.

$$\text{اگر } y\in IR^+ \;,\; y=\sqrt{x-2} \implies$$

$$y^2=x-2 \implies \boxed{x=y^2+2}$$

دامنهٔ تابع فوق عبارت است از:

$$D_f=\{x\in IR \mid x\geqslant 2\}$$

وهمان طورکه مشاهده می‌کنید برای هر $y\in IR^+$، همواره x تعریف‌شده وچون $y^2+2\geqslant 2$ پس‌در دامنهٔ‌تعریف f نیز واقع است بنابراین تابع‌پوشا می‌باشد.

تذکر: در توابع ثابت به شکل $f(x)=c$ که $c\in IR$ هرگاه مجموعهٔ‌دوم را به صورت $\{c\}$ معرفی‌کنیم تابع پوشا و درغیر این‌صورت تابع‌پوشا نخواهدبود.

بررسی خاصیت پوشایی در توابع از IR^2 به IR^2

کلیات بررسی خاصیت‌پوشایی در توابع‌از IR^2 به IR^2 هیچ گونه فرقی‌با توابع‌از IR به IR نداشته وفقط‌جزئیات آن کمی‌اختلاف دارد. به این‌شکل که اولاً عضوی‌که از مجموعهٔ دوم‌به صورت دلخواه درنظر می‌گیریم چون از IR^2 انتخاب می‌شود باید یك زوج مرتب مثلاً بـه شکل $(x_1\,,\,y_1)$ باشد. ثانیاً وقتی این عضورا مساوی باضابطهٔ تابع‌که آن‌هم به‌صورت زوج مرتب‌خواهد بـود، قرار می‌دهیم به یك دستگاه معادلات برخورد می‌کنیم‌که باید از این‌دستگاه x را برحسب x_1 و y را برحسب y_1 به دست‌آورده وهردوشرط ذکرشده در ابتدای مقاله را برای هردوضابطه‌بررسی کنیم.

مثال ۹ - تابع با ضابطهٔ

$$f: IR^2\to IR^2$$
$$f(x\,,\,y)=(2x-1\,,\,3y+2)$$

مفروض‌است. خاصیت پوشایی‌را دراین تابع بررسی‌کنید.

فرض کنیم $(x_1 , y_1) \in IR^2$.

$$(x_1 , y_1) = (2x-1 , 3y+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x-1 \\ y_1 = 3y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{x_1+1}{2} \\ y = \dfrac{y_1-2}{3} \end{matrix}$$

و مشاهده می‌کنید که به ازای هر $x_1\in IR$ همواره xای در IR و برای هر $y_1\in IR^2$ ؛ yای در IR یافت می‌شود و در کل برای هر $(x_1,y_1)\in IR^2$ همواره می‌توان (x,y)ای در IR^2 یافت که $f(x,y)=(x_1,y_1)$ زیرا :

$$f(x,y) = f(\frac{x_1+1}{2} , \frac{y_1-2}{3})$$

$$= (2(\frac{x_1+1}{2})-1 , 3(\frac{y_1-2}{3})+2) = (x_1 , y_1)$$

بنابراین تابع پوشا می‌باشد.

تذکر: بررسی اینکه پس از یافتن x و y برحسب x_1 و y_1 آیا $f(x,y)=(x_1,y_1)$ ضروری نیست.

مثال ۱۰ - خاصیت پوشایی‌را برای‌تابع با ضابطهٔ

$$f : IR^2 \to IR^2$$

$$f(x , y) = (2x+y , x-3y)$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $(x_1 , y_1) \in IR^2$,

$$(x_1 , y_1) = (2x+y , x-3y) \Rightarrow$$

$$3\begin{cases} x_1 = 2x+y & (1) \\ y_1 = x-3y & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 6x+\cancel{3y} \\ y_1 = x-\cancel{3y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7x = 3x_1+y_1$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{3x_1+y_1}{7}}$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} y_1 = \frac{3x_1+y_1}{7} - 3y \Rightarrow$$

$$3y = \frac{3x_1+y_1-7y_1}{7} \Rightarrow 3y = \frac{3x_1-6y_1}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x_1-2y_1}{7}}$$

وچون برای هر x_1 و y_1 همواره x و y تعریف شده و زوج مرتب (x,y) در D_f قرار دارد بنابراین تابع پوشا می‌باشد.

مثال ۱۱ - خاصیت پوشایی‌را برای تابع با ضابطهٔ

$$f : IR^2 \to IR^2$$

$$f(x,y) = (\frac{x-1}{2x+1} , y+5)$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $(x_1 , y_1) \in IR^2$:

$$(x_1 , y_1) = (\frac{x-1}{2x+1} , y+5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1} = x_1 \\ y+5 = y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-x_1-1}{2x_1-1} \\ y = y_1-5 \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود برای هر $y_1\in IR$ همواره $y\in IR$ تعریف می‌شود. اما برای $x_1=\frac{1}{2}$، x تعریف نشده‌و بنابراین با انتخاب هر زوج مرتب به شکل $(\frac{1}{2} , y_1)$ نمی‌توان زوج مرتبی از IR^2 مانند (x , y) یافت که

$$f(x , y) = (\frac{1}{2} , y_1)$$

پس تابع پوشا نیست. برای این که این تابع پوشا باشد باید کلیهٔ زوج مرتبهایی که مؤلفهٔ اول آنها $\frac{1}{2}$ است ازمجموعه‌دوم خارج

شوند پس تابع به شکل زیر می‌بایست تعریف شود:

$$f : IR^{۲} \rightarrow (IR - \{\frac{۱}{۲}\}) \times IR$$

$$f(x,y) = (\frac{x-۱}{۲x+۱}, y+۵)$$

مثال ۱۲- آیا تابع با ضابطهٔ

$$f : Z^{۲} \rightarrow IR^{۲}$$

$$f(x,y) = (۲x-۱, ۳y+۲)$$

پوششی است؟

فرض کنیم $(x_{۱}, y_{۱}) \in IR^{۲}$

$$(x_{۱}, y_{۱}) = (۲x-۱ , ۳y+۲)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۲x-۱ = x_{۱} \\ ۳y+۲ = y_{۱} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_{۱}+۱}{۲} \\ y = \frac{y_{۱}-۲}{۳} \end{cases}$$

واضح است که برای هر $x_{۱}$، $y_{۱}$ همواره x و y تعریف‌شده اما ممکن است در دامنهٔ تعریف تابع یعنی $Z^{۲}$ نباشند مثلاً اگر قرار دهیم ۲ = $x_{۱}$ و ۱ = $y_{۱}$ داریم $x = \frac{۳}{۲}$ و $y = \frac{-۱}{۳}$ که زوج مرتب $(\frac{۳}{۲}, -\frac{۱}{۳})$ در $Z^{۲}$ نیست. پس تابع پوشا نمی‌باشد.

مثال ۱۳- آیا تابع با ضابطهٔ

$$f : IR^{۲} \rightarrow IR^{۲}$$

$$f(x,y) = (۲x-y, ۴x-۲y)$$

پوششی است؟

فرض کنیم $(x_{۱}, y_{۱}) \in IR^{۲}$:

$$(x_{۱}, y_{۱}) = (۲x-y , ۴x-۲y)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۲x-y = x_{۱} \\ ۴x-۲y = y_{۱} \end{cases}$$

دستگاه فوق برای x و y برحسب $x_{۱}$ و $y_{۱}$ فاقد جواب است. درحقیقت با معلوم بودن $x_{۱}$ و $y_{۱}$ دستگاه فوق معادلهٔ دو خط موازی باهم را مشخص می‌کند که نقطهٔ تقاطع ندارند بنابراین برای هر $x_{۱}$ و $y_{۱}$ نمی‌توان x و y ای یافت که همواره

$$f(x,y) = (x_{۱}, y_{۱})$$

پس تابع پوشا نیست. مثلاً اگر قرار دهیم ۱ = $y_{۱} = x_{۱}$ در این‌صورت باید:

$$\begin{cases} ۲x-y = ۱ \\ ۴x-۲y = ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x-y = ۱ \\ ۲x-y = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

و این ممکن نیست!

مثال ۱۴- خاصیت پوشایی را برای تابع باضابطهٔ

$$f : N^{۲} \rightarrow N$$

$$f(m,n) = ۲^{m-۱}(۲n-۱)$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $K \in N \ , \ K = ۲^{m-۱}(۲n-۱)$

به دنبال زوج مرتبی مانند (m , n) در $N^{۲}$ هستیم به قسمی که $f(m,n) = K$ اگر قرار دهیم ۱ = m در این صورت ۱ = $۲^{m-۱}$ درنتیجه می‌بایست $K = ۲n - ۱$ یا $n = \frac{K+۱}{۲}$

بنابراین به ازای هر K در N همواره زوج مرتب

$$(۱ , \frac{K+۱}{۲})$$

در $N^{۲}$ وجود دارد به قسمی که:

$$f(۱ , \frac{K+۱}{۲}) = ۲^{۱-۱}[۲(\frac{K+۱}{۲}) - ۱]$$

$$= ۲^{\circ}(K+۱-۱) = K$$

پس تابع پوشا است.

در این قسمت به بررسی خاصیت پوشایی برای توابع

چند ضابطه‌ای می‌پردازیم.

همان طور که می‌دانید توابع چند ضابطه‌ای، توابعی هستند که: مجموعهٔ‌دوم آنهارا به چند زیرمجموعه افراز کرده و روی هریك از آنها ضابطه‌ای مجزا تعریف کرده‌ایم. بنابراین برای‌بررسی‌پوشایی دراین تابعها کافی است که به یکی از دو روش زیرعمل کنیم:

I) برد هرضابطه را جداگانه به دست آورده و اجتماع این‌بردها را محاسبه‌کنیم که اگر اجتماع بردها با مجموعهٔ دوم برابر باشد تابع پوشا است و در غیر این صورت تابع پوشا نیست.

II) مطابق معمول عضوی‌دلخواه ازمجموعهٔ‌دوم مانند y انتخاب‌کرده ومساوی باهریك‌از ضابطه‌ها قرار دهیم‌که دراین حالت باید حداقل‌توسط یکی‌ازضابطه‌ها xای یافت‌به قسمی‌که $f(x)=y$.

مثال ۱۵- تابع با ضابطهٔ $f: N \to Z$ مفروض است، خاصیت پوشایی‌را دراین تابع

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{۲} & x \text{ زوج} \\ \dfrac{x-۱}{۲} & x \text{ فرد} \end{cases}$$

بررسی کنید.

هرگاه‌فرض‌کنیم $f_۱(x)=\dfrac{-x}{۲}$ (برای xهای زوج) و $f_۲(x)=\dfrac{x-۱}{۲}$ (برای xهای‌فرد) دراین صورت:

$$R_{f_۱}=\mathbb{Z}^- \ , \ R_{f_۲}=\mathbb{Z}^+ \cup \{۰\}$$

بنابراین $R_{f_۱} \cup R_{f_۲}=\mathbb{Z}$ پس تابع پوشا است.

مثال ۱۶- تابع با ضابطهٔ $f: IR \to IR$ مفروض است. خاصیت‌پوشایی‌را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x>۱ \\ ۱ & x=۱ \\ ۳x-۴ & x<۱ \end{cases}$$

اگر قرار دهیم:

$$f_۳(x)=۳x-۴ \ , \ f_۲(x)=۱ \ , \ f_۱(x)=۲x-۱$$

دراین صورت:

$$R_{f_۱}=\{x\in IR | x>۱\} \ , \ R_{f_۲}=\{۱\}$$
$$R_{f_۳}=\{x\in IR | x<-۱\}$$

(مجموعهٔ اعداد بین ۱ و ۱− پوشیده نمی‌شود.)

$$R_{f_۱}\cup R_{f_۲}\cup R_{f_۳}\neq IR$$

بنابراین پس‌تابع‌پوشانیست مثلاً اگرقراردهیم $y=۰$، توسط هیچ یک از ضابطه‌ها نمی‌توان $y=۰$ را به دست آورد. زیرا اگر $۲x-۱=۰$ نتیجه می‌شود $x=\frac{۱}{۲}$ وچون‌ضابطهٔ $(۲x-۱)$ برای $x>۱$ تعریف‌شده، قابل‌قبول نیست‌ونیزاگر $۳x-۴=۰$ نتیجه می‌شود $x=\frac{۴}{۳}$ که‌چون‌ضابطهٔ$(۳x-۲)$ برای $x<۱$ تعریف‌شده، بازهم قابل‌قبول نمی‌باشد.

**درخاتمه متذکر می‌شوم‌که سعی شده پوشایی توابع در این مقاله به‌صورت مختصرو کلی‌بیان‌شود ومثالهای‌انتخاب‌شده برای‌فهم و درك مفهوم پوشایی‌آورده شده‌اندکه امیدوارم‌مفید واقع شده‌باشد وتوفیق روزافزون شما دانش‌آموزان عزیز را درتمامی مراحل‌زندگی وتحصیل از خداوند متعال خواستارم.
والسلام**