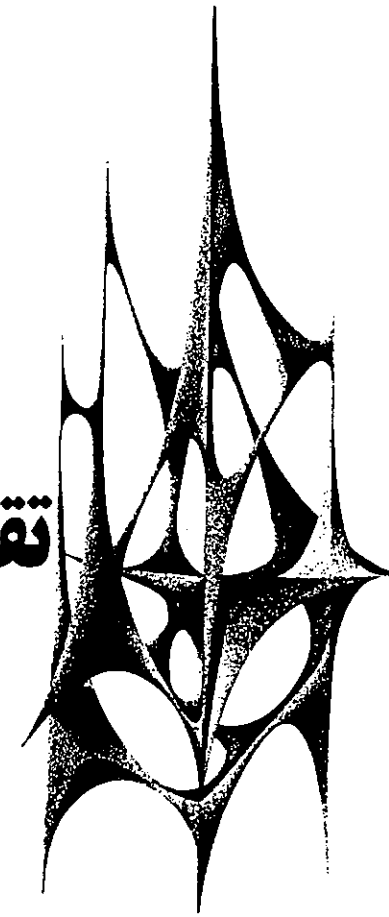
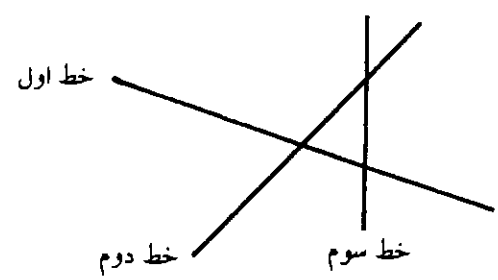


تقسیم فضا به وسیلهٔ صفحات ...

● نهان علی اف ــ محمّد جهانشاهی

واضح است که n نقطه مختلف واقع در امتداد یک خط، این خط را به $n+1$ قسمت تقسیم می‌کند. صفحه را یک خط به دو قسمت و دو خط دارای وضعیت عمومی این صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کند. خط سومی که دو خط مذکور را قطع کند خود به سه قسمت تقسیم خواهد شد (توجه شود که خط سوم نیز باید نسبت به دو خط مذکور دارای وضعیت عمومی باشد). بنابراین خط فوق ۳ قسمت از ۴ قسمت بالا را به ۲ قسمت تقسیم می‌کند.



بنابراین ۳ خط فوق صفحه را به ۷ قسمت تقسیم می‌کند چهارمین خط با ۳ خط فوق خودش به چهار قسمت تقسیم می‌شود، لذا از ۷ قسمت بالا هر یک از ۴ قسمت آن را به ۲ قسمت تقسیم می‌کند، لذا چهار خط فوق صفحه را به ۴ + ۷ یعنی به ۱۱ قسمت تقسیم می‌کند. به این ترتیب n خط مستقیم صفحه را به

$$۲+۲+۳+۴+\ldots+n=۱+(۱+۲+۳+\ldots+n)=۱+\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$=۱+\frac{n[(n+۱)+۲]}{۲}=۱+\frac{n(n-۱)}{۲}+n=۱+\frac{n}{۱!}+\frac{n^{۲}}{۲!}=\sum_{k=۰}^{۲}\frac{{}^{k}n}{k!}$$

که در آن

$${}^{k}n=n(n-۱)(n-۲)\ldots.[n-(k-۱)]$$

می‌باشد.

فضا را یک صفحه به ۲ قسمت و ۲ صفحه آن را به ۴ قسمت و ۳ صفحه آن را به ۸ قسمت تقسیم می‌کند (توجه شود که صفحه‌ها دارای وضعیت عمومی هستند). چهارمین صفحه با هر کدام از ۳ صفحه فوق در ۳ خط متمایز همدیگر را قطع خواهند کرد (با هر صفحه یک خط فصل مشترک خواهد داشت).

مطابق توضیحات بالا، از این که ۳ خطّ صفحه را به ۷ قسمت تقسیم می‌کند، چهارمین صفحه از ۸ قسمت فوق با ۷ قسمت آن تلاقی خواهد داشت و در نتیجه هر کدام از ۷ قسمت فوق را به ۲ قسمت تقسیم خواهد کرد. در نتیجه ۴ صفحه فضا را به ۸ + ۷ قسمت یعنی به ۱۵ قسمت تقسیم خواهد کرد. و پنجمین صفحه با چهار صفحه فوق در چهار خط متمایز تلاقی خواهد داشت، در نتیجه از این که چهار خطِ، صفحه را به ۱۱ قسمت تقسیم می‌کند، نتیجه می‌شود که پنجمین صفحه، از ۱۵ قسمت بالا، هر یک از ۱۱ قسمت آن را به ۲ قسمت تقسیم خواهد کرد و در نتیجه این صفحه همراه با چهار صفحه فوق فضا را به ۱۱ + ۱۵ = ۲۶ قسمت تقسیم خواهد کرد. اکنون با

استقرای ریاضی نشان می‌دهیم n صفحه فضا را به $\sum_{k=0}^{3} \frac{n^{k}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند:

درستی فرمول فوق برای $n=1,2,3,4,5$ در بالا نشان داده شد. برای مثال برای $n=5$ ملاحظه می‌کنیم.

$n=5$،

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{5^{k}}{k!}=1+\frac{5}{1}+\frac{20}{2!}+\frac{60}{3!}=1+5+10+10=26$$

فرض استقرا: فرض کنیم m صفحه فضا را به $\sum_{k=0}^{3} \frac{m^{k}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند. ثابت می‌کنیم حکم استقرای m + ۱ صفحه فضا را به $\sum_{k=0}^{3} \frac{(m+1)^{k}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند.

اثبات: m + ۱ امین صفحه با m صفحه قبلی در m خط متمایز تلاقی خواهد کرد دیدیم که m خط صفحه را به $\sum_{k=0}^{2} \frac{m^{k}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند. این m+۱ امین صفحه، از $\sum_{k=0}^{3} \frac{m^{k}}{k!}$ قسمت، تعداد $\sum_{k=0}^{2} \frac{k^{1}}{k!}$ آن را، هر کدام را به ۲ قسمت تقسیم می‌کند. بنابراین با m + ۱ صفحهٔ فضا به

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{m^{k}}{k!}+\sum_{k=0}^{2} \frac{m^{k}}{k!}=$$

$$1+m+\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{6}+1+m+$$

$$\frac{m(m-1)}{2}=1+(m+1)+\frac{m(m+1)}{2}$$

$$+\frac{m(m-1)[m-2+3]}{6}=\sum_{k=0}^{3} \frac{(m+1)^{k}}{k!}$$

تقسیم می‌شود.

به این ترتیب n صفحه که دارای وضعیت عمومی هستند فضا را به $\sum_{k=0}^{3} \frac{n^{k}}{k!}$ قسمت تقسیم خواهد کرد. نهایتاً کره را یک خط به ۲ قسمت و ۲ خط آن را به ۴ قسمت و ۳ خط آن را به ۸ قسمت تقسیم می‌کند (خط در کره دایره عظیمه روی کره است). خط چهارم با هر کدام از ۳ خط قبلی در دو نقطه تلاقی دارد و در نتیجه با ۶ نقطه تلاقی، به ۶ قسمت تقسیم می‌شود بنابراین با توجه به این، از ۸ قسمت اول، ۶ قسمت آن هر کدام به ۲ قسمت تقسیم خواهد شد در نتیجه ۴ خط، سطح کره را به $2\times7=6+8=14$ قسمت تقسیم خواهد کرد و به همین ترتیب پنجمین خط با ۴ خط قبلی، در ۸ نقطه تلاقی خواهد داشت لذا از ۱۴ قسمت سطح کره، ۸ قسمت آن را هر کدام به ۲ قسمت تقسیم خواهد کرد. بنابراین ۵ خط سطح کره را به $2\times11=8+14=22$ قسمت تقسیم خواهد کرد. در مقایسه با حالت مستوی نتیجه می‌شود که n خط، سطح کره را به:

$$2\sum_{k=0}^{2} \frac{(m-1)^{k}}{k!}$$

قسمت تقسیم می‌کند.