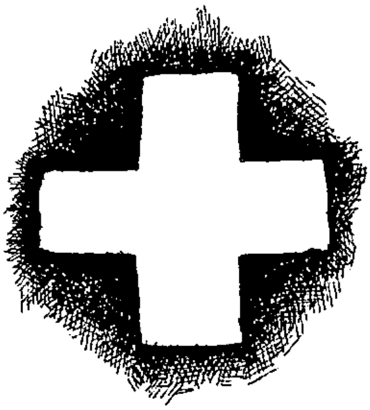
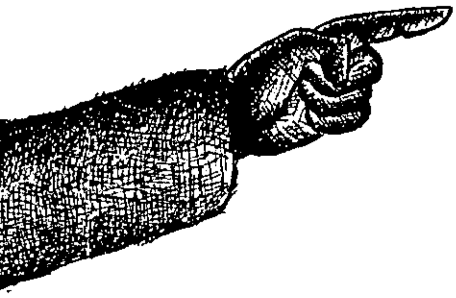




تعیین علامت عبارتهای جبری،

حلّ نامعادله ها

قسمت دوم

● هوشنگ شرقی

حلّ نامعادله‌های درجهٔ دوم، کسری و درجه‌های بالاتر

اکنون می‌توان کاربرد تعیین علامت را در حلّ نامعادله‌های کسری، درجهٔ دوم و بالاتر مشاهده کرد. فرض کنید می‌خواهیم نامعادلهٔ $P(x) > ۰$ را حل کنیم. ($P(x)$ عبارتی جبری برحسب x می‌باشد) کافی است که $P(x)$ را تعیین علامت نموده و مجموعهٔ مقادیر x را که به‌ازای آنها $P(x)$ مثبت می‌شود، به‌عنوان جواب نامعادله درنظر گرفت.

نتیجه : برای حلّ نامعادلهٔ $P(x)>Q(x)$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ عبارتهایی جبری برحسب x هستند، کافی است همهٔ عبارتها را به یک طرف نابرابری ببریم ؛ یعنی یکی از دو صورت $P(x)-Q(x)>۰$ یا $Q(x)-P(x)<۰$ را بسازیم. اکنون می‌توانیم عبارت جبری $P(x)-Q(x)$ یا $Q(x)-P(x)$ را تعیین علامت نموده و مجموعهٔ مقادیر x را که خواستهٔ مسأله را برآورده می‌کند، به‌عنوان جواب نامعادله، درنظر بگیریم.

مثال: نامعادلهٔ $\frac{x+۲}{x-۴} \geq \frac{x-۲}{x-۳}$ را حل کنید.

حل: ابتدا می‌نویسیم $\frac{x+۲}{x-۴}-\frac{x-۲}{x-۳} \geq ۰$، اکنون کافی است عبارت جبریِ سمت چپ نابرابری را ساده و به حاصلضرب تبدیل کنیم و آن را تعیین علامت نموده و مجموعه مقادیر x را که این عبارت به‌ازای آنها مثبت یا صفر می‌شود، انتخاب کنیم.

$$P=\frac{(x+۲)(x-۳)-(x-۴)(x-۲)}{(x-۴)(x-۳)}$$

$$=\frac{x^۲-x-۶-(x^۲-۶x+۸)}{(x-۴)(x-۳)}$$

$$P=\frac{۵x-۱۴}{(x-۴)(x-۳)} \geq ۰ \quad ۵x-۱۴=۰ \Rightarrow x=\frac{۱۴}{۵},$$

$$x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \;;\; x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$$

x	$-\infty$		$\frac{۱۴}{۵}$		۳		۴		$+\infty$
$۵x-۱۴$		−	۰	+		+		+	
$x-۴$		−		−		−	۰	+	
$x-۳$		−		−	۰	+		+	
P		−	۰	+		−		+	

اکنون از روی این جدول، مشخص است که به‌ازای xهای بزرگتر یا مساوی $\frac{۱۴}{۵}$ و کوچکتر از ۳ و یا xهای بزرگتر از ۴، P مثبت یا صفر است و این، همان مجموعهٔ جواب مسأله است (چون ما می‌خواهیم $P \geq ۰$ باشد)؛ یعنی مجموعهٔ جواب نامعادله، به‌صورت زیر است:

$$\frac{۱۴}{۵} \leq x < ۳ \quad \text{یا} \quad x > ۴$$

مثال: مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^۳ > ۴x$ را به‌دست آورید.

حل: ابتدا می‌نویسیم $x^۳ - ۴x < ۰$ و بعد از تجزیه عبارت سمت چپ، خواهیم داشت:

$$x(x^۲ - ۴) < ۰ \Rightarrow x(x-۲)(x+۲) < ۰$$

و با تعیین علامت عبارت $A = x(x-۲)(x+۲)$ می‌توان مجموعهٔ مقادیر x را که به‌ازای آنها $A < ۰$ می‌شود، به‌عنوان مجموعهٔ جواب نامعادله درنظر گرفت:

$$x = ۰ \quad x-۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \quad x+۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲$$

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
x		−		−		+		+	
$x-۲$		−		−		−		+	
$x+۲$		−		+		+		+	
A		−		+		−		+	

با توجه به جدول، مجموعهٔ جواب نامعادله، به‌صورت زیر مشخص می‌شود: $x < -۲$ یا $۰ < x < ۲$

مثال: نامعادلهٔ مضاعف $-۱ \leq \frac{x+۲}{۲x-۳} \leq ۱$ را حل کنید.

حل: درواقع، باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \frac{x+۲}{۲x-۳} \leq ۱ \\ \frac{x+۲}{۲x-۳} \geq -۱ \end{cases}$$

برای حلّ این دستگاه، جواب هریک از نامعادله‌ها را به روش گفته شده، به‌ترتیب زیر می‌یابیم:

$$۱)\ \frac{x+۲}{۲x-۳} \leq ۱ \Rightarrow \frac{x+۲}{۲x-۳} - ۱ \leq ۰ \Rightarrow \frac{x+۲-(۲x-۳)}{۲x-۳} \leq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-x+5}{2x-3} \le 0$$

$$-x+5=0 \Rightarrow x=5 \; ; \; 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$-x+5$		+		+		−	
$2x-3$		−		+		+	
P_1		−		+		−	

از روی این جدول، مشخص است که نابرابری $P_1 \le 0$ که موردنظر مسأله است، به‌ازای $x < \frac{3}{2}$ یا $x \ge 5$ به‌دست می‌آید، که همان مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ اوّل می‌باشد.

$$2)\; \frac{x+2}{2x-3} \ge -1 \Rightarrow \frac{x+2}{2x-3}+1 \ge 0 \Rightarrow \frac{x+2+2x-3}{2x-3} \ge 0$$

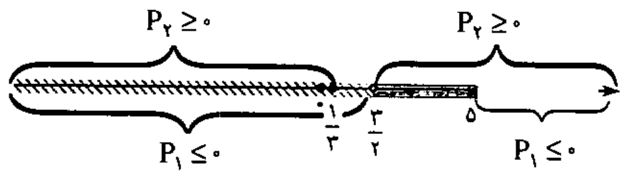
$$\Rightarrow \frac{3x-1}{2x-3} \ge 0$$

$$3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \; ; \; 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3x-1$		−		+		+	
$2x-3$		−		−		+	
P_2		+		−		+	

از روی این جدول نیز معلوم است که نابرابری $P_2 \ge 0$ که موردنظر نامعادله می‌باشد، به‌شرط $x > \frac{3}{2}$ یا $x \le \frac{1}{3}$ حاصل می‌شود.

اکنون باید مجموعهٔ جواب مشترک دو نامعادلهٔ $P_1 \le 0$ و $P_2 \ge 0$ را به‌دست آوریم که این کار را می‌توانیم به کمک محور عددهای حقیقی و به‌صورت زیر انجام دهیم:



از روی این نمودار، مجموعهٔ جواب مشترک دو نامعادله، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$x \le \frac{1}{3}$ یا $x \ge 5$

روش دیگری که برای حلّ این نوع مسائل می‌تواند به کار رود و دقت بیشتری هم دارد، این است که دو جدول تعیین علامت را بدون این که علامتهای آنها را درهم ضرب کنیم، زیر هم و یکجا رسم کنیم و آن‌گاه مجموعهٔ جواب مشترک دو نامعادله را روی جدول به‌دست می‌آوریم. نمودار زیر، گویای این روش است:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$-x+5$		+		+		+		−	
$2x-3$		−		−		+		+	
P_1		−		−		+		−	
$3x-1$		−		+		+		+	
$2x-3$		−		−		+		+	
P_2		+		−		+		+	

با مشاهدهٔ علامتهای P_1 و P_2 در ستونهای مختلف، بروشنی دیده می‌شود، جایی که P_1 منفی یا صفر و P_2 مثبت یا صفر($P_1 \le 0$ و $P_2 \ge 0$) می‌باشند، دو فاصلهٔ $x \le \frac{1}{3}$ و $x \ge 5$ می‌باشد.

روش فوق بخصوص اگر با تعداد بیشتری نامعادله‌های توأم مواجه باشیم، مناسبتر می‌باشد.

تمرین:

۱ـ هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید:

$1)\; x^2-5x>0$

$2)\; 7x^2-x-6 \le 0$

$3)\; \frac{x^2-4}{x^2-1} \ge 0$

$4)\; \frac{(x^2-5x)(4-x^2)}{(x^2-9)(4-x)} < 0$

$5)\; \frac{x^2+1}{x} \ge 2$

$6)\; \frac{2x+1}{3x-2} \ge \frac{3x+1}{4x-3}$

$7)\; \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} \ge \frac{4}{x^2-1}$

$8)\; x^4+x^2<2$

$9)\; \frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1} \ge \frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}$

$10)\; \frac{x^4-1}{x^2-4} \le 16$

۲ـ مجموعهٔ جواب هریک از نامعادله‌های مضاعف زیر را به‌دست آورید :

$$1)\ \begin{cases} x^2-4x>5 \\ x^2+x<0 \end{cases}$$

$$2)\ -2<\frac{x+2}{x-2}<2$$

$$3)\ \begin{cases} \dfrac{x+4}{x-1}>\dfrac{x-2}{x-3} \\[2ex] \dfrac{x+3}{x}<x+1 \end{cases}$$

روشهای سریع و ذهنی در حلّ نامعادله‌ها

برای آن‌که مجموعهٔ جواب یک نامعادله یا دستگاه نامعادله‌ها را با سرعت بیشتری به‌دست آوریم، روشهایی خاص وجود دارد که این موضوع، بخصوص در پاسخ‌گویی به پرسشهای چهارگزینه‌ای، حائز اهمیت ویژه‌ای است. در زیر، به تعدادی از این روشها اشاره می‌کنیم :

۱ـ تعیین علامت عبارتهای درجهٔ ۳ و بیشتر، و عبارتهای کسری در جدول یک سطری:

جدول تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ سه و کسری را می‌توان در یک جدول کوچکتر خلاصه نمود و این، از حجم کار می‌کاهد و سرعت عمل را بیشتر می‌نماید. به این منظور، باید ریشه‌های کلیهٔ عبارتهای درجهٔ اوّل و دوم تشکیل‌دهندهٔ کسر یا عبارت جبری را که می‌خواهیم آن را تعیین علامت کنیم، به‌دست آوریم. آن‌گاه علامت کسر یا عبارت جبری را از ضرب علامتهای عبارتهای درجهٔ اوّل و دوم تشکیل‌دهندهٔ آن (که علامت ضریب بزرگترین درجهٔ هریک از آنها می‌باشد) به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه در یک جدول یک سطری، همهٔ ریشه‌ها را به‌ترتیب صعودی قرار می‌دهیم و در آخرین ستون سمت راست، علامتی موافق علامت کسر یا عبارت جبری قرار می‌دهیم و علامتها را یک در میان عوض می‌کنیم، تنها روی ریشه‌های مضاعف و تکراری از مرتبهٔ زوج (یعنی دو بار یا چهار بار یا... تکراری) تغییر علامت نمی‌دهیم. مطالب گفته شده را با یک مثال روشنتر می‌کنیم.

مثال: عبارت جبری $P=\dfrac{(x-2)(4-x^2)(x^2-x)}{(x^2+x-2)(x^2-1)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشه‌های همهٔ پرانتزها را به‌دست می‌آوریم :

$x-2=0\Rightarrow x=2\ ,\ \ 4-x^2=0\Rightarrow x=\pm 2\ ,$

$x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0\ ,$

$x=1\ ,\ \ x^2+x-2=0\Rightarrow (x-1)(x+2)=0\Rightarrow x=1\ ,$

$x=-2\ \ \ x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$

ملاحظه می‌شود که ریشه‌های عبارتهای تشکیل‌دهندهٔ کسر P، عبارت است از ۰، ۲، ۲−، ۱ و ۱−، که ریشهٔ ۲، دو بار تکرار شده (یک‌بار در معادلهٔ $4-x^2=0$ و بار دیگر در معادلهٔ $x-2=0$) و ریشهٔ ۲− نیز دو بار تکرار شده (یک‌بار در معادلهٔ $4-x^2=0$ و بار دیگر در معادلهٔ $x^2+x-2=0$) و ریشهٔ ۱ نیز سه بار تکرار شده است (یک‌بار در معادلهٔ $x^2-x=0$، بار دیگر در معادلهٔ $x^2+x-2=0$ و مرتبهٔ سوم در معادلهٔ $x^2-1=0$) علامت کسر P نیز که از حاصلضرب علامتهای پنج عبارت در یکدیگر به‌دست می‌آید. (درواقع علامتهای ضرایب بزرگترین درجه‌های آنها)، منفی می‌باشد. بنابراین، مطابق آنچه گفته شد، جدول تعیین علامت P به‌صورت زیر می‌باشد :

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
P		+	∞	+	∞	−	0	+	∞	−	0	−	

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، از سمت راست در جدول علامت کسر را که منفی است، گذاشته‌ایم و بعد از ۲ و ۲− که ریشه‌های دو بار تکراری هستند، تغییر علامت نداده‌ایم ؛ ولی روی ۱ که سه بار تکرار شده است، تغییر علامت داده‌ایم. همچنین روی ریشه‌های مخرج کسر (۱−، ۱ و ۲−) نیز کسر تعریف نشده می‌باشد که با علامت ∞ روی آنها مشخص شده است و روی سایر ریشه‌ها $P(0,2)$ مساوی صفر است.

مثال: کسر $A=\dfrac{(4x-x^2)(x^2+2x)}{(2x^2+x-10)(5-x)}$ را تعیین‌علامت کنید.

حل: به همان ترتیبی که گفته شده است، عمل می‌کنیم. علامت A مثبت است. (چرا؟)

$4x-x^2=0\quad x(4-x)=0\Rightarrow x=0$ یا $x=4$

$x^2-2x=0\quad x(x+2)=0\Rightarrow x=0$ یا $x=-2$

$2x^2+x-10=0\ \ \Delta=1-4(2)(-10)=81\Rightarrow x=\dfrac{-1\pm 9}{4}$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}\ ,\ \ x_2 = 2$$

$$5 - x = 0 \Rightarrow x = 5$$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		0		2		4		5		$+\infty$
A		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

مرحله‌های حلّ مسأله را یک‌بار مرور کنید. (چرا در $x=0$، A تغییر علامت نداده است؟)

مثال: نامعادلهٔ $\frac{x+2}{x-2} \geq \frac{x+3}{x-3}$ را حل کنید.

حل: با آوردن همهٔ عبارتها به سمت چپ نتیجه می‌شود:

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x+3}{x-3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)(x-3)-(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x-6-x^2-x+6}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x-2)(x-3)} \geq 0$$

اکنون عبارت $P = \frac{-2x}{(x-2)(x-3)}$ را تعیین علامت می‌کنیم (ریشه‌های عبارتهای تشکیل دهندهٔ P به‌صورت ذهنی قابل محاسبه‌اند: ۲، ۳ و ۰ و علامت P نیز منفی است).

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
P		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

اکنون از روی این جدول پاسخ مسأله، یعنی مجموعهٔ جواب نامعادله $(P \geq 0)$ به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$x \leq 0$ یا $2 < x < 3$

مثال: مجموعهٔ مقادیر x را که صادق در نامعادلهٔ $x^4 > 2x^2$ هستند، به‌دست آورید.

حل: می‌توان نوشت:

$$x^4 > 2x^2 \Rightarrow x^4 - 2x^2 > 0 \Rightarrow x^2(x^2-2) > 0$$

ریشه‌های عبارتهای تشکیل‌دهندهٔ $x^2(x^2-2)$ عبارت است از صفر و $\pm\sqrt{2}$ که ریشهٔ صفر، دوبار تکراری می‌باشد (چرا؟) بنابراین، در جدول زیر، تعیین علامت آن انجام می‌شود:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2(x^2-2)$		$+$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$+$	

و لذا جواب نامعادله به‌صورت $x > \sqrt{2}$ یا $x < -\sqrt{2}$.

مثال: کسر $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ در کدام فاصلهٔ زیر، منفی است؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(2,3)$

۳) $(3,4)$ ۴) $(2,+\infty)$

کنکور تجربی ۷۰

حل: ریشه‌های عبارتهای تشکیل‌دهندهٔ این کسر، بسادگی مساوی ۱، ۲، ۳ و ۴ به‌دست می‌آیند و علامت کسر نیز مثبت است. پس بسرعت می‌توان آن را در جدول زیر تعیین علامت نمود.

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
P		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

از روی این جدول، می‌توان دریافت که این کسر، در فاصله‌های $(3,4)$ و $(1,2)$ منفی می‌باشد، که درنتیجه، پاسخ صحیح تنها گزینهٔ ۳ می‌باشد.

۲ـ استفاده از نابرابریهای اتحادی زیر:

۱) $\left.\begin{matrix} x^2 < a^2\ ,\ a > 0 \\ |x| < a \end{matrix}\right\} \Rightarrow -a < x < a$

۲) $\left.\begin{matrix} x^2 > a^2\ ,\ a > 0 \\ |x| > a \end{matrix}\right\} \Rightarrow x > a$ یا $x < -a$

مثال: نامعادلهٔ $x^2 < 4$ را حل کنید.

حل: مطابق نابرابری شمارهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$-2 < x < 2$$

مثال: نامعادلهٔ $|2-3x| < 3$ را حل کنید.

حل: مطابق نابرابری شمارهٔ (۱) می‌نویسیم:

$$-3 < 3x - 2 < 3$$

اکنون ۲ واحد به دو طرف اضافه می‌کنیم:

$$-1 < 3x < 5$$

و با تقسیم دوطرف نابرابری بر سه، نتیجه می‌گیریم:

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$$

مثال: مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^2 + 2x > 8$ را به‌دست آورید.

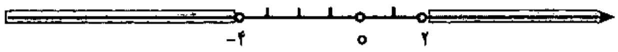
حل: ابتدا یک واحد به دوطرف نامعادله اضافه می‌کنیم:

$$x^2+2x+1>9 \Rightarrow (x+1)^2>9$$

حال، از نابرابری شمارهٔ (۲) استفاده می‌کنیم:

$x+1>3$ یا $x+1<-3 \Rightarrow x>2$ یا $x<-4$

این مجموعه، جواب نامعادله می‌باشد. به‌منظور آشنایی بیشتر، نمودار هندسی آن نیز در زیر رسم شده است:



تمرین: هریک از نامعادله‌ها و دستگاه‌های نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $x^2<16$ ۲) $x^2>9$

۳) $|x-2|<5$ ۴) $|x+1|>3$

۵) $|3x-1|>2$ ۶) $\begin{cases} x^2<4 \\ |x-1|>3 \end{cases}$

۳ـ توجه و شناسایی عبارتهای همیشه مثبت و همیشه منفی:

بسیاری از عبارتهای جبری، همواره مثبت یا همواره مثبت و صفر می‌باشند، مانند عبارتهای مربع کامل، قدرمطلقها، رادیکالهای با فرجهٔ زوج و... به نمونه‌هایی از این عبارتها که در زیر آمده‌اند، دقت کنید:

$(x+2)^2$, $(x^2-1)^4$, x^2+1 , x^4+x^2+3 ,

$|x+2|$, $\sqrt{x+1}$

همچنین، همان‌طور که می‌دانیم هر سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم که مبین آن منفی می‌باشد و ضریب x^2 آن مثبت باشد، همواره مثبت می‌باشد. نمونه‌هایی از این عبارتها نیز در زیر آمده است:

x^2+x+1 , $3x^2+2x+2$, $5x^2+10x+6$

در موقع تعیین علامت و نیز حلّ نامعادله‌ها می‌توان عبارتهای همیشه مثبت را درنظر نگرفت و بدون درنظر گرفتن آنها بقیهٔ عبارت جبری را تعیین علامت کرد و این از حجم کار می‌کاهد. همچنین در موقع حلّ نامعادله‌ها می‌توان، عبارتهای همیشه مثبت را کنار گذاشت و برای مثبت یا منفی بودن عبارت جبری، سایر عبارتها را درنظر گرفت و اگر عبارتی همیشه منفی داشته باشیم (عبارت همیشه منفی از ضرب یک عبارت همیشه مثبت در یک علامت منفی حاصل می‌شود) می‌توانیم پس از درنظر گرفتن علامت آن، آن را کنار بگذاریم. با چند مثال، مسأله روشنتر می‌شود.

مثال: نامعادلهٔ $\frac{(x^2+1)(x^2-4)}{(x^2+x+1)} \le 0$ را حل کنید.

حل: x^2+1 همیشه مثبت است و مبین x^2+x+1 نیز، منفی است. ($\Delta=1-4<0$) و لذا این عبارت نیز همواره مثبت است.

بنابراین، برای آن‌که کسر $\frac{(x^2+1)(x^2-4)}{(x^2+x+1)}$ منفی یا صفر باشد، لازم و کافی است که $x^2-4\le 0$ باشد و از آن‌جا $x^2\le 4$ و درنتیجه $-2\le x\le 2$ است.

مثال: جواب نامعادلهٔ $x^4+x^2<4x^2+4$ کدام است؟
(کنکور تجربی ۷۱)

۱) $-4<x<4$ ۲) $-2<x<2$

۳) $x>2$ یا $x<-2$ ۴) $x>4$ یا $x<-4$

حل: پس از آن‌که کلیهٔ عبارتها را به سمت چپ تساوی بردیم، نتیجه می‌شود:

$$x^4+x^2-4x^2-4<0 \Rightarrow x^4-3x^2-4<0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)(x^2-4)<0$$

اکنون می‌بینیم که x^2+1، همواره مثبت است، پس باید $x^2-4<0$ باشد و از آن‌جا $x^2<4$ و درنتیجه: $-2<x<2$ و پاسخ صحیح گزینهٔ ۲ است.

مثال: به‌ازای کدام مجموعهٔ کسر $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ از ۲ کمتر است؟

۱) R ۲) $\varnothing$

۳) $\{x|-1<x<1\}$ ۴) $\{x|x<-1\}$

(کنکور پیش‌دانشگاهی ریاضی ۷۶)

حل: می توان نوشت:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}<2 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1}-2<0 \Rightarrow \frac{x^2-1-2x^2-2}{x^2+1}<0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2-3}{x^2+1}<0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+3}{x^2+1}>0$$ (با ضرب دوطرف نابرابری در یک منفی)

صورت و مخرج کسر فوق همواره مثبت هستند و لذا کسر فوق، به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x، همیشه مثبت است و پاسخ صحیح گزینهٔ ۱ است.

تمرین: مجموعهٔ جواب هریک از نامعادله‌های زیر را به‌دست آورید:

۱) $\frac{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}{x^۲-۴}\le ۰$

۲) $\frac{(x^۲+۳x+۱)(۱-x^۲)}{x^۲-۴x+۴}>۰$

۳) $\frac{(x^۲+۱)(x^۴+۱)}{(x^۴-۸۱)}<۰$

۴) $x^۴<x^۲$

۵) $(x-۱)^۲>(x-۱)^۲(x-۲)$

۶) $\frac{x^۲-۵x}{x^۲+۱}>۱$

۴ـ عبارتهایی که تنها دو ریشهٔ حقیقی دارند، به‌صورت ذهنی قابل تعیین علامت کردن هستند و نیازی به رسم جدول ندارند.

مثال: عبارت جبری $x^۲-۴x$ را تعیین علامت کنید.

حل: ریشه‌های این عبارت به‌صورت ذهنی، قابل محاسبه می‌باشند. و بسادگی به‌دست می‌آیند:

$x^۲-۴x=۰ \quad x(x-۴)=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $x=۴$

اکنون بدون رسم جدول، می‌توان گفت بین این دو ریشه، علامت $x^۲-۴x$ منفی و خارج از فاصلهٔ این دو ریشه، عبارت منفی است؛ یعنی اگر $۰<x<۴$ باشد $x^۲-۴x<۰$ و اگر $x>۴$ یا $x<۰$ باشد $x^۲-۴x>۰$ است. به کمک این موضوع، می‌توان جواب نامعادله‌هایی را که دو ریشهٔ حقیقی دارند، بسرعت و به‌صورت ذهنی محاسبه نمود.

مثال: جواب نامعادلهٔ $x^۲-۵x+۴<۰$ چیست؟

حل: چون مجموع ضرایب سه جملهٔ فوق، مساوی صفر است $(۱-۵+۴=۰)$؛ بنابراین یک ریشهٔ آن مساوی ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ معادله است؛ یعنی $x'=۱$ و $x''=۴$.

اکنون بین دو ریشهٔ فوق، علامت سه‌جمله‌ای، مخالف علامت ضریب $x^۲$، یعنی منفی است و خارج فاصلهٔ دو ریشه مثبت است. و ما می‌خواهیم این سه‌جمله‌ای، منفی باشد $(x^۲-۵x+۴<۰)$ و بنابراین، بین دو ریشه جواب می‌باشد (یعنی: $۱<x<۴$).

مثال: نامعادلهٔ $\frac{x-۲}{۴-x}\ge ۰$ را حل کنید.

حل: ریشه‌های صورت و مخرج کسر ۲ و ۴ هستند و علامت کسر منفی است؟ (چرا؟)، بنابراین بین دو ریشه، علامت کسر، مثبت و خارج آن، علامت کسر، منفی است و ما می‌خواهیم کسر مثبت یا صفر باشد. پس بین دو ریشه، جواب می‌باشد؛ یعنی $۲\le x<۴$. توجه کنید که علامت مساوی روی ۲ $(x\ge ۲)$ برای این است که کسر فوق می‌تواند صفر نیز باشد و چون ۴ ریشهٔ مخرج کسر می‌باشد، لذا $x\ne ۴$ است و علامت مساوی روی ۴ نیامده است. $(x<۴)$

مثال: مجموعه جوابهای نامعادلهٔ $|x|(x^۲-۳x+۲)\le ۰$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۶۵)

۱) $[۱,۲]$ ‏ ۲) $[۱,۲]\cup\{۰\}$

۳) $[-۲,-۱]$ ‏ ۴) $\{۰\}\cup[-۲,-۱]$

حل: $|x|\ge ۰$ می‌باشد و لذا کافی است $x^۲-۳x+۲\le ۰$ باشد. ریشه‌های این معادله چون مجموع ضرایب آن، صفر است $(۱-۳+۲=۰)$ مساوی ۱ و $\frac{c}{a}$ معادله است و لذا $x'=۱$ و $x''=۲$؛ اما چون علامت ضریب x مثبت است؛ بنابراین، بین این دو ریشه، سه‌جمله‌ای منفی و خارج از فاصلهٔ دو ریشه، سه‌جمله‌ای مثبت است و نامعادله می‌خواهد که سه‌جمله‌ای، منفی یا صفر باشد؛ پس لازم است که $۱\le x\le ۲$ از طرفی چون $|x|$ نیز می‌تواند مساوی صفر باشد (به‌ازای $x=۰$) و اگر صفر شود، حاصل عبارت سمت چپ نابرابری، صفر می‌شود؛ پس $x=۰$ نیز یک جواب می‌باشد. بنابراین، جواب نهایی به‌صورت زیر است:

$x=۰$ یا $۱\le x\le ۲$

و این نشان می‌دهد که گزینهٔ ۲ صحیح می‌باشد.

تمرین: هریک از نامعادله‌های زیر را با سریعترین روش حل کنید:

۱) $\frac{(x-۱)(x^۴+۱)}{x-۲}\le ۰$

۲) $\frac{(x-۲)|x|}{x-۳}\ge ۰$

۳) $\frac{(x^۲+x+۱)(x-۱)}{(x+۱)|x+۱|}\le ۰$

$$۴)\ \frac{(۳x^۲-x+۱)(x^۲-۴)}{|x+۲|}\geq ۰$$

$$۵)\ \frac{(x^۲-۵x)(x^۲+۴x+۱۰)}{(x^۲+۴)}<۰$$

کاربردهایی از نامعادله‌ها

حلّ نامعادله‌های مختلف، کاربردهای بسیاری در ریاضیات دارند و تقریباً می‌توان گفت جزو الفبای ریاضیات می‌باشند. بعضی از کاربردهای ابتدایی آنها در مثالهای زیر می‌آید:

مثال: حدود m را طوری به‌دست آورید که معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲+mx+m^۳=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد.

حل: می‌دانیم برای آن‌که معادلهٔ درجهٔ دوم، دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، لازم و کافی است که مبین آن مثبت باشد؛ پس: $\Delta>۰$ و از آن‌جا به‌صورت زیر، حدود m به‌دست می‌آید:

$$\Delta=m^۲-۴m^۳>۰\Rightarrow m^۲(m-۴)>۰$$

چون $m^۲$ همواره مثبت یا صفر است، پس کافی است $m-۴>۰$ باشد و لذا $m>۴$ و این، یعنی به‌ازای هر عدد حقیقی m که بزرگتر از ۴ باشد، معادلهٔ فوق دارای دو ریشهٔ حقیقی می‌باشد.

مثال: به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر x عبارت جبری $\sqrt{\frac{x-۱}{x-۲}}+\sqrt{۴-x^۲}$ تعریف شده است؟

حل: می‌دانیم عبارتهای شامل رادیکالهای با فرجهٔ زوج، هنگامی تعریف شده هستند که زیر رادیکال آنها مثبت یا صفر باشد، پس درواقع باید ریشه‌های دستگاه نامعادله‌های زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases}\frac{x-۱}{x-۲}\geq ۰\\ ۴-x^۲\geq ۰\end{cases}$$

هر دو نامعادله‌ها را می‌توان با روشهای سریع و بدون تشکیل جدول حل کرد. نامعادلهٔ اوّل، دو ریشهٔ x=۱ و x=۲ دارد که بین آن دو علامت، کسر منفی و خارج از فاصلهٔ آنها کسر مثبت است (چرا؟)، پس لازم است که:

$$x>۲ \text{ یا } x\leq ۱ \qquad (۱)$$

و برای حلّ نامعادلهٔ دوم نیز می‌نویسیم:

$$۴-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۴\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲ \qquad (۲)$$

و از اشتراک مجموعهٔ جوابهای (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$-۲<x\leq ۱$$

یعنی به‌ازای هر عدد حقیقی متعلق به فاصلهٔ $(-۲,۱]$ هر دو رادیکال فوق، تعریف شده می‌باشند.

مثال: حدود m را طوری به‌دست آورید که نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}m^۲-۲\\ m^۲-۴\end{matrix}\right.$ در دستگاه مختصات، همواره در ناحیهٔ چهارم واقع باشد.

حل: می‌دانیم در دستگاه مختصات دو بعدی، نقاطی در ناحیهٔ چهارم واقع هستند که طول آنها مثبت و عرضشان منفی باشد؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}m^۲-۲>۰\\ m^۲-۴<۰\end{cases}$$

و از حلّ این دو نامعادله، به‌ترتیب زیر، به‌دست می‌آید:

$$m^۲>۲\Rightarrow m>\sqrt{۲} \text{ یا } m<-\sqrt{۲}$$

$$m^۲<۴\Rightarrow -۲<m<۲$$

و از اشتراک این دو مجموعه، جواب به‌دست می‌آید:

$$-۲<m<-\sqrt{۲} \text{ یا } \sqrt{۲}<m<۲$$

مثال: حدود m را طوری به‌دست آورید که به‌ازای جمیع مقادیر x، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $(m-۳)x^۲+۲mx+m$ همواره منفی باشد.

حل: می‌دانیم سه‌جمله‌ای درجهٔ دومی که دلتای آن منفی باشد، همواره علامتی موافق علامت ضریب $x^۲$ دارد. پس برای آن‌که سه‌جمله‌ای فوق همواره منفی باشد، لازم و کافی است که $\Delta<۰$ و $a<۰$ باشد و بنابراین باید دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases}\Delta<۰\\ a<۰\end{cases}$ را به‌صورت زیر حل کنیم:

$$\begin{cases}\Delta=(۲m)^۲-۴m(m-۳)<۰\\ a=(m-۳)<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۴m^۲-۴m^۲+۱۲m<۰\\ m-۳<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱۲m<۰\\ m<۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<۰\\ m<۳\end{cases}$$

و اشتراک دو جواب $m<۰$ می‌باشد ؛ یعنی به‌ازای هر $m<۰$، سه‌جمله‌ای فوق به‌ازای همهٔ مقادیر x منفی خواهد بود.

مثال: به‌ازای کدام مقادیر m خط $y=mx$، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x+۱}{۱-x}$ را قطع نمی‌کند؟

۱) $۳-۲\sqrt{۲}<m<۳+۲\sqrt{۲}$

۲) $۳-\sqrt{۲}<m<۳+\sqrt{۲}$

۳) $۲-۳\sqrt{۲}<m<۲+۳\sqrt{۲}$

۴) $۲-\sqrt{۲}<m<۲+\sqrt{۲}$

(کنکور تجربی ۷۵)

حل: می‌دانیم برای یافتن طولهای نقاط برخورد دو منحنی به معادله‌های $y_۱$ و $y_۲$ در دستگاه مختصات دکارتی، $y_۱=y_۲$ قرار داده و معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم. پس برای یافتن نقاط برخورد خط $y=mx$ و منحنی $y=\frac{x+۱}{۱-x}$ باید معادلهٔ $mx=\frac{x+۱}{۱-x}$ را حل کنیم و پاسخ سؤال این است که باید معادلهٔ فوق جواب نداشته باشد. بنابراین، پس از ساده و مرتّب کردن معادلهٔ فوق، دلتای آن را منفی قرار می‌دهیم:

$$mx=\frac{x+۱}{۱-x}\Rightarrow mx-mx^۲=x+۱$$

$$\Rightarrow mx^۲+(۱-m)x+۱=۰$$

$$\Delta=(۱-m)^۲-۴m<۰\Rightarrow m^۲+۱-۲m-۴m<۰$$

$$\Rightarrow m^۲-۶m+۱<۰$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $m^۲-۶m+۱=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$m^۲-۶m+۱=۰\Rightarrow\Delta=۳۶-۴=۳۲$$

$$\Rightarrow m=\frac{۶\pm\sqrt{۳۲}}{۲}=\frac{۶\pm۴\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow m_۱=۳+۲\sqrt{۲}\ ,\ m_۲=۳-۲\sqrt{۲}$$

حال بین $m_۱$ و $m_۲$ علامت $m^۲-۶m+۱$ منفی و خارج از فاصلهٔ آنها مثبت است و ما می‌خواهیم این سه‌جمله‌ای منفی باشد، پس باید $m_۲<m<m_۱$ و لذا $۳-۲\sqrt{۲}<m<۳+۲\sqrt{۲}$ و پاسخ صحیح گزینهٔ ۱ است.

اگر اکتشافهای گاوس در موقع خود، به اطلاع مردم رسیده بود، مانع می گردید که **کوشی، آبل، ژاکوبی** و بسیاری ریاضیدانان دیگر، وقت خود را در مسائلی تلف کنند که وی قبلاً آنها را حل کرده بود و نیز موجب پیشرفت عظیمی در علوم ریاضی می‌شد.

متأسفانه گاوس که شخصی تندخو و ترشرو بود و لجاجتی بی‌مانند داشت، فقط وقتی اکتشافهای خود را انتشار می‌داد که کاملاً تمام و از قید طرح و چوب بستی که برای ساختن آن ایجاد گردیده بود، فارغ شده باشد.

دوستانش میل داشتند که وی متون واضحتری برای ایشان بنویسد یا روش خود را در حصول نتیجه به آنان بگوید ؛ اما گاوس جواب داد که فقط برای تبعیت از طبع خود کار می‌کند، نه برای آموختن به دیگران. بنابراین، همواره اکتشافهای خود را به‌صورت معمّاهایی از این قبیل یادداشت می‌کرد: «یافتم: عدد $=\Delta+\Delta+\Delta$» (یعنی هر عدد صحیح مثبت، مساوی با مجموع سه عدد مثلث شکل است، از قبیل اعداد ۱، ۳، ۶ و غیره. (این اعداد را از آن جهت مثلث شکل می‌گویند که عبارت‌اند از مجموع اعداد متوالی ابتدا از واحد که می‌توانند به‌صورت مثلثی نوشته شوند.)

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو ـ حسن صفّاری