

تعیین علامت عبارتهای جبری، حل نامعادله‌ها

(قسمت اول)

● هوشنگ شرقی

می‌آوریم: $x = -\frac{b}{a} \Rightarrow ax + b = 0$ ، آن‌گاه در یک جدول به صورت زیر، عبارت فوق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax + b	مخالف علامت a		موافق علامت a

مثال: عبارت جبری $-2x + 4$ را تعیین علامت کنید.

حل: همان‌طور که گفته شد، ابتدا ریشهٔ این عبارت را به دست می‌آوریم:

$$-2x + 4 = 0 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$$

حال در یک جدول مشابه جدول بالا، آن را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2x + 4$	+	+	-

از روی این جدول، مشخص می‌شود که به ازای هر x که بزرگتر از 2 باشد، علامت این عبارت، منفی و به ازای هر x که کوچکتر از 2 باشد، علامت آن، مثبت و به ازای $x=2$ این عبارت،

برای حل نامعادله‌های خطی یا نامعادله‌های کسری که مجهول نامعادله در مخرج کسر باشد، لازم است از تعیین علامت عبارتهای جبری استفاده شود. در این جا ابتدا مفهوم تعیین علامت را شرح داده و سپس روشهای تعیین علامت عبارتهای جبری را می‌آموزیم و در نهایت، کاربرد تعیین علامت را در حل نامعادله‌های درجهٔ دوم و بالاتر، و نیز نامعادله‌های کسری توضیح می‌دهیم.

تعیین علامت: منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری با یک مجهول، آن است که مشخص کنیم که این عبارت جبری، به ازای مقادیر مختلف آن مجهول، چه علامتی دارد. به عنوان مثال،

کسر $A = \frac{x+1}{x-1}$ را در نظر بگیرید، می‌خواهیم ببینیم که به ازای چه مقادیر x، $A > 0$ و به ازای کدام مقادیر آن، $A < 0$ و چه موقع $A = 0$ می‌شود. دربارهٔ چگونگی این کار در این قسمت بحث می‌کنیم.

1) تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ اول:

برای تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ اول، ابتدا آنها را ساده می‌کنیم، تا به صورت $ax + b$ تبدیل شوند. آن‌گاه ریشهٔ عبارت فوق را به دست می‌آوریم؛ یعنی جواب معادلهٔ $ax + b = 0$ را به دست

مفهوم این جدول، آن است که عبارت فوق، وقتی که $-\frac{11}{5} < x < 1$ باشد، منفی و به ازای هر $x > 1$ یا $x < -\frac{11}{5}$ مثبت است. مثلاً به ازای $x = -3$ مثبت است:

$$5x^2 + 6x - 11 = 5(-3)^2 + 6(-3) - 11 = 45 - 18 - 11 = 15 > 0$$

ولی به ازای $x = -2$ ($-\frac{11}{5} < -2 < 1$) منفی است:

$$5x^2 + 6x - 11 = 5(-2)^2 + 6(-2) - 11 = 20 - 12 - 11 = -3 < 0$$

مثال: عبارت درجه دوم $4 - x^2$ را تعیین علامت کنید.

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \quad \text{حل:}$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$4 - x^2$	-	0	+	0

از این جدول می فهمیم که اگر $-2 < x < 2$ باشد، $4 - x^2 > 0$ و اگر $x > 2$ یا $x < -2$ باشد، $4 - x^2 < 0$ و به ازای $x = \pm 2$ ، $4 - x^2 = 0$ می باشد. (چرا؟)

تمرین: هریک از عبارتهای جبری زیر را تعیین علامت کنید:

۱) $x^2 + x - 2$ ۲) $4x^2 - 9$ ۳) $-2x^2 - 5x + 7$

ب) اگر $\Delta = 0$ ، معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، دارای ریشه مضاعف به صورت $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ است و در این حالت، علامت سه جمله ای، همواره موافق علامت a بوده و فقط در $x = -\frac{b}{2a}$ صفر است:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	0	موافق علامت a

مثال: عبارت جبری $4x^2 - 4x + 1$ را تعیین علامت کنید.
حل: سه جمله ای فوق را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

مساوی صفر است. مثلاً به ازای $x = 4$ که بزرگتر از ۲ است، داریم:

$$-2x + 4 = -2(4) + 4 = -8 + 4 = -4 < 0$$

و به ازای $x = 1$ که کوچکتر از ۲ است داریم:

$$-2x + 4 = -2(1) + 4 = -2 + 4 = 2 > 0$$

تمرین: هریک از عبارتهای جبری زیر را در جدولی مشابه این جدول تعیین علامت کنید:

۱) $-5x + 3$ ۲) $6x - 3$ ۳) $-2x + 4 + 5x$

۲) تعیین علامت عبارتهای جبری درجه دوم:

برای تعیین علامت عبارتهای جبری درجه دوم، پس از آن که عبارت را ساده کردیم و به شکل کلی $ax^2 + bx + c$ تبدیل نمودیم، ابتدا مبین معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را به دست می آوریم. در این جا سه حالت پیش می آید که در هر حالت، جدول تعیین علامت عبارت جبری، به صورت خاص خود رسم می شود:

الف) اگر $\Delta > 0$ ، ریشه های معادله را از دستور $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می آوریم. جدول تعیین علامت عبارت

جبری $ax^2 + bx + c$ به صورت زیر رسم می شود:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0

($x_2 > x_1$) موافق علامت a

توجه داشته باشید که x_1 و x_2 به ترتیب صعودی در جدول واقع می شوند.

مثال: تعیین علامت سه جمله ای درجه دوم $5x^2 + 6x - 11$.

حل: ابتدا سه جمله ای را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$5x^2 + 6x - 11 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 36 - 4(5)(-11) = 256 > 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{256}}{10} = \frac{-6 \pm 16}{10} \Rightarrow x_1 = \frac{-22}{10} = -\frac{11}{5}$$

$$x_2 = \frac{10}{10} = 1$$

اکنون عبارت فوق را در جدول زیر، تعیین علامت می کنیم:

x	$-\infty$	$-\frac{11}{5}$	1	$+\infty$
$5x^2 + 6x - 11$	+	0	-	0

تمرین : هر یک از سه جمله ایهای زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $-x^2 + x - 2$ ۲) $3x^2 - x + 1$

۳) برای تعیین علامت عبارتهای جبری که به صورت حاصل ضرب و تقسیم تعدادی عبارت جبری درجه یک و دو باشند، ابتدا همه عبارتهای تشکیل دهنده آنها را در یک جدول، تعیین علامت می کنیم. آن گاه علامتهای این عبارتها را در هم ضرب می کنیم و علامت عبارت تشکیل یافته از آنها را در فاصله های مختلف به دست می آوریم. همچنین عبارت جبری فوق، روی ریشه های مخرج کسرها تعریف نشده و روی سایر ریشه ها مساوی صفر می شود.

مثال: عبارت $A = \frac{(x-1)(x^2-4)}{(3x-2)(2-x)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا چهار عبارتی را که از ضرب و تقسیم آنها کسر A به دست آمده است، مساوی صفر قرار داده و ریشه های آنها را به دست می آوریم:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$
 $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$
 $3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$
 $2-x=0 \Rightarrow x=2$

آن گاه این چهار عبارت را در یک جدول چهار سطری (هر عبارت در یک سطر) به طور جداگانه و مطابق دستورهای گفته شده، تعیین علامت می کنیم:

x	$-\infty$	-2	$\frac{2}{3}$	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+	+
x^2-4	+	0	-	-	-	0
$3x-2$	-	-	0	+	+	+
$2-x$	+	+	+	+	0	-
A	+	0	-	+	0	-

از روی این جدول، مشخص می شود که اگر $x < -2$ یا $1 < x < 2$ یا $\frac{2}{3} < x < 2$ باشد، و اگر $A > 0$ و $-2 < x < \frac{2}{3}$ یا $1 < x < 2$ یا $x > 2$ باشد، و $A < 0$ و به ازای $x = -2$ و $x = 1$ و $A = 0$ و به ازای $x = \frac{2}{3}$ و $x = 2$ ، کسر A تعریف نشده می باشد.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$4x^2-4x+1$	+	+	+

یعنی سه جمله ای $4x^2 - 4x + 1$ به ازای همه مقادیر x همواره مثبت بوده و فقط به ازای $x = \frac{1}{3}$ مساوی صفر می شود.

تمرین : هر یک از سه جمله ایهای زیر را، تعیین علامت کنید:

۱) $x^2 - 2x + 1$ ۲) $-x^2 + 4x - 4$ ۳) $-3x^2$

ج) اگر $\Delta < 0$ ، معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای جواب حقیقی نمی باشد و در این حالت، علامت سه جمله ای، همواره موافق علامت a است:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	

مثال: عبارت جبری $2x^2 - x + 1$ را تعیین علامت کنید.

حل: عبارت فوق را مساوی صفر قرار می دهیم:
 $2x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 - x + 1$	+	+

یعنی سه جمله ای $2x^2 - x + 1$ به ازای همه مقادیر حقیقی، همواره مثبت است.
 مثال: ثابت کنید:

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x(x+1) > -1$

حل: اثبات نابرابری فوق، معادل است با اثبات نابرابری $x^2 + x + 1 > 0$ (چرا؟)

برای اثبات این نابرابری سه جمله ای، $x^2 + x + 1$ را تعیین علامت می کنیم:

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + x + 1$	+	+

$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Delta = 1 - 4 < 0$

یعنی $x^2 + x + 1$ به ازای هر عدد حقیقی x همواره مثبت است و این معادل با آن است که:

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow x(x+1) - 1$

مثال: عبارت جبری $A = \frac{x+2}{x-2} - \frac{x+3}{x-3}$ را تعیین علامت

کنید.

حل: ابتدا مخرج مشترک گرفته و عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{(x+2)(x-3) - (x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 - x - 6 - (x^2 + x - 6)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2 - x - 6 - x^2 - x + 6}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-2x}{(x-2)(x-3)}$$

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ; \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
-2x	+	0	-	-	-
x-2	-	-	0	+	+
x-3	-	-	-	0	+
A	+	0	-	+	-

تمرین: هریک از عبارتهای جبری زیر را تعیین علامت کنید:

۱) $-5x + 7$

۸) $x^2 - x$

۲) $-x^2 + 8$

۹) $x^2 + x^2 - 2$

۳) $4x^2 + x - 5$

۱۰) $\frac{x^2+1}{x} - 2x$

۴) $x^2 + 4x + 4$

۱۱) $\frac{x+4}{x+1} - \frac{x+3}{x-1}$

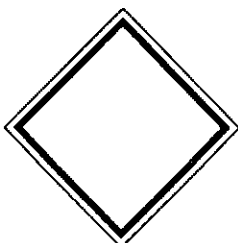
۵) $6x^2 - 5x$

۱۲) $\frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x^2+1}$

۶) $\frac{(x-2)(x-3)}{(x^2-1)(x^2+1)}$

۱۳) $\frac{(x^2-5x+6)(x^2-4)}{(x^2+x)(x^2+x+1)}$

۷) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x}$



مثال: عبارت $P = \frac{(x^2-2x+1)(x^2-9)}{(-x^2+4x)(3-x)}$ را تعیین علامت

کنید.

حل: مانند مثال قبل، عمل می‌کنیم:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

(ریشه مضاعف)

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x+4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$

$$3-x = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	-3	0	1	3	4	$+\infty$
x^2-2x+1	+	+	+	0	+	+	+
x^2-9	+	0	-	-	0	-	-
$-x^2+4x$	-	-	0	+	+	0	-
$3-x$	+	+	+	+	0	-	-
P	-	0	+	$+\infty$	-	$-\infty$	+

لازم به ذکر است که اگر عبارت جبری، به حاصلضرب عوامل درجه یک یا دو تجزیه نشده باشد، قبلاً باید آن را به حاصلضرب عوامل تبدیل نمود و سپس آن را تعیین علامت کرد.

مثال: عبارت جبری $x^2 - x$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا عبارت $x^2 - x$ را به حاصلضرب عوامل تجزیه

می‌کنیم:

$$x^2 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

اکنون با تعیین علامت سه عبارت x ، $x-1$ و $x+1$ در یک جدول

می‌توان عبارت $x^2 - x$ را تعیین علامت نمود.

$$x = 0 \quad ; \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad ; \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
x-1	-	-	-	0	+
x+1	-	0	+	+	+
x^2-x	-	0	+	0	+

از روی جدول، معلوم می‌شود که اگر $x > 1$ یا $-1 < x < 0$ باشد،

$x^2 - x > 0$ و اگر $0 < x < 1$ یا $x < -1$ باشد، $x^2 - x < 0$ و اگر

$x = -1, 0, 1$ باشد، $x^2 - x = 0$ است.