تعیین دامنه و برد توابع (قسمت دوّم)

مورداستفاده دانش‌آموزان سالهای دوم، سوم و چهارم

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

در شمارهٔ قبل مجله با تعیین دامنه و برد توابع چندجمله‌ای، کسری، گنگ (اصم) آشنا شدیم. دراین شماره نیز تعیین دامنه و بردچندنوع تابع دیگررا بیان می‌کنیم.

۴ـ تعیین دامنه و برد توابع شامل جزء صحیح[10] (براکت):

توابع جزءصحیح (براکت) توابعی هستند که شامل عبارتی با علامت [ ] (علامت جزء صحیح) باشند. دامنه و برد این گونه توابع را با استفاده ازضوابط و قوانین جزء صحیح به دست می‌آوریم.

مثال ۱۴: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{x+[x-[x]]}{x+[x]+[-x]}$$

حل: می‌دانیم:

$$[x]\leqslant x<[x]+1$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$0\leqslant x-[x]<1$$

بنابراین به ازای هرعددحقیقی x همواره داریم:

$$[x-[x]]=0 \qquad (1)$$

همچنین می‌دانیم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in z \text{ (مجموعهٔ عددهای صحیح)} \\ -1 & x\notin z \end{cases} \qquad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) تابع به صورت زیر ساده می‌شود:

$$y=\begin{cases} \dfrac{x}{x} & x\in z \\ \dfrac{x}{x-1} & x\notin z \end{cases} \Longrightarrow$$

$$y=\begin{cases} 1 & x\in z-\{0\} \\ \dfrac{x}{x-1} & x\notin z \end{cases} \Longrightarrow D_f=R-\{0\}$$

تعیین برد تابع:

$$x\notin z: y=\frac{x}{x-1} \Longrightarrow xy-y=x \Longrightarrow$$

$$x(y-1)=y \Longrightarrow x=\frac{y}{y-1}\notin z \Longrightarrow y\neq 0, 2$$

با توجه به ضابطهٔ اول تابع نتیجه می‌شود که اگر $x\in z-\{0\}$ باشد $y=1$ است. بنابراین اگر $x\notin z$ باشد $y\neq 1$ است.

بنابراین برد تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی مخالف صفر است:

$$R_f=R-\{0, 2\}$$

مثال ۱۵: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{[x+1]+[-x]}{[1-x]+[x]}$$

---

10) Integral part functions

حل : برای تعیین دامنه و بردتابع ابتدا تابع را به شکل زیرمی‌نویسیم:

$$y=\frac{[x]+[-x]+1}{[-x]+[x]+1} \Longrightarrow$$

$$[-x]+[x]=\begin{cases}0 & x\in z\\ -1 & x\notin z\end{cases}$$

$$\Longrightarrow y=\begin{cases}1 & x\in z\\ \text{مبهم}\ (\frac{0}{0}) & x\notin z\end{cases}\Longrightarrow$$

$$D_f=z \quad , \quad R_f=\{1\}$$

مثال ۱۶: دامنه و برد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{2x+1}{[1-x]+[x+1]}+\frac{[[x]-x]}{[x]+[-x]}$$

حل : برای تعیین دامنه و بردتابع ابتدا تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{2x+1}{[-x]+[x]+2}+\frac{[[x]-x]}{[-x]+[x]}$$

می‌دانیم :

$$[x]\leqslant x<[x]+1$$

و در نتیجه داریم :

$$-[x]-1<-x\leqslant -[x]$$

$$\Longrightarrow -1<[x]-x\leqslant 0 \Longrightarrow$$

$$[[x]-x]=\begin{cases}0 & x\in z\\ -1 & x\notin z\end{cases}$$

همچنین داریم:

$$[-x]+[x]=\begin{cases}0 & x\in z\\ -1 & x\notin z\end{cases}$$

با توجه به رابطه‌های اخیر تابع به شکل زیر تحویل می‌شود:

$$y=\begin{cases}\frac{2x+1}{2}+\frac{0}{0}\ (\text{مبهم}) & x\in z\\ 2x+2 & x\notin z\end{cases}$$

در این‌جا دامنه و برد تابع مشخص می‌شود:

$$D_f=R-z \quad , \quad R_f=R-z$$

دامنه و بردتابع مجموعهٔ عددهای حقیقی غیرصحیح است:

$$D_f=R_f=R-z$$

مثال ۱۷: دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\left[\frac{x^4+2x^2+2}{x^4+4x^2+5}\right]+\frac{x-[x]}{[x+1]+[1-x]}$$

حل : با توجه به ضابطهٔ تابع داریم:

$$x^4+2x^2+2=(x^2+2x^2+1)+1$$
$$=(x^2+1)^2+1>0$$
$$x^4+4x^2+5=(x^4+4x^2+4)+1$$
$$=(x^2+2)^2+1>0$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود صورت و مخرج کسر

$$\frac{x^4+2x^2+2}{x^4+4x^2+5}$$

هردو مثبت وهمواره صورت کسر کوچکتر از مخرج آن است. بنابراین کسرفوق همواره بزرگتر ازصفروکوچکتر ازیک است:

$$0<\frac{x^4+2x^2+2}{x^4+4x^2+5}<1$$

بنابراین به ازای هرعددحقیقی x همواره داریم:

$$\left[\frac{x^{۴}+۲x^{۲}+۲}{x^{۴}+۴x^{۲}+۵}\right]=۰$$

اینک کسر دوم را بررسی می کنیم:

$$y=\frac{x-[x]}{[x+۱]+[۱-x]}=$$

$$\frac{x-[x]}{[x]+[-x]+۲}=\begin{cases}۰ & x\in z\\ x-[x] & x\notin z\end{cases}$$

بنا براین دامنهٔ تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی است:

$$D_f=R$$

تعیین برد تابع:

می‌دانیم : $۰\leqslant x-[x]<۱$ و اگر x عددی صحیح نباشد داریم :

$$x\notin z \Rightarrow ۰<x-[x]<۱ \Rightarrow ۰<y<۱$$

از طرفی اگر $x\in z$ آنگاه $y=۰$ و در نتیجه برد تابع چنین است:

$$R_f=[۰,۱)$$

تمرین : دامنه و برد توابع با ضابطه‌های:

$$y=\frac{۱}{[۲x]-۲x},$$

و

$$y=(-۱)^{\frac{۱}{[x-۱]+[۲-x]}}$$

را تعیین کنید.

۵ـ تعیین دامنه و برد توابع‌شامل قدرمطلق[11]:

مثال ۱۸: دامنه و برد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{x+۲}{|x|-۲}$$

حل : تعیین دامنهٔ تابع :

$$|x|-۲=۰ \Rightarrow |x|=۲ \Rightarrow x=\pm ۲$$

$$\Rightarrow D_f=R-\{-۲\ ,\ ۲\}$$

برای‌تعیین بردتابع دوحالت درنظر می گیریم:

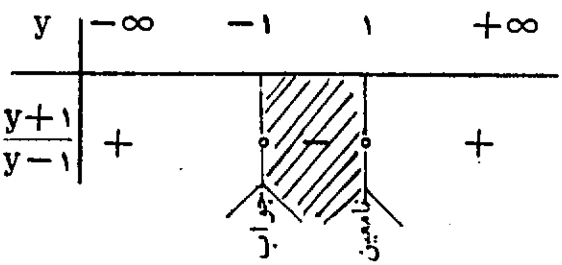
$$y=\begin{cases}\dfrac{x+۲}{x-۲} & x\geqslant ۰\\[2mm] \dfrac{x+۲}{-x-۲} & x<۰\end{cases} \xrightarrow{x\neq -۲}$$

$$y=\begin{cases}\dfrac{x+۲}{x-۲} & x\geqslant ۰\\[2mm] -۱ & x<۰\end{cases}$$

$$x\geqslant ۰ : y=\frac{x+۲}{x-۲} \Rightarrow xy-۲y=x+۲$$

$$\Rightarrow x(y-۱)=۲(y+۱)$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲(y+۱)}{y-۱}\geqslant ۰ \Rightarrow \frac{y+۱}{y-۱}\geqslant ۰$$



$$\Rightarrow \begin{cases}x\geqslant ۰ & : y\in(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)\\ x<۰ & : y=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow R_f=(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)$$

مثال ۱۹ : دامنه و برد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین کنید.

11) Absolute value functions

$$y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x+1|-4}}$$

حل : باتوجه به ضابطهٔ تابع برای حقیقی‌بودن y شرط زیر کافی می‌باشد:

$$|x+1|-4>0 \Rightarrow |x+1|>4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x+1>4\\ x+1<-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>3\\ x<-5\end{cases}\Rightarrow$$

$$D_f=(-\infty,-5)\cup(3,+\infty)$$

برای‌تعیین بردتابع ابتدا ازضابطهٔ آن نتیجه می‌شود: $y>0$.
از طرف دیگر داریم:

$$y^2=\frac{1}{|x+1|-4}\xrightarrow{(y\neq 0)}|x+1|-4=\frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow |x+1|=\frac{1}{y^2}+4>4 \Rightarrow \frac{1}{y^2}>0$$

$$\Rightarrow y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

از اشتراک $y>0$ و $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ برد تابع‌به دست می‌آید:

$$R_f=(0,+\infty)=R^+ \Rightarrow R_f=R^+$$

۶ـ تعیین دامنه وبرد توابع‌نمایی[12]:

توابع نمایی را در حالت عمومی به صورت

$$y=a^{u(x)}$$

درنظرمی گیریم که در آن $a>0$ و $u(x)$ تابعی‌از x می‌باشد. تعیین دامنه وبرد این‌نوع توابع بستگی به عبارت $u(x)$ دارد. در حالت خاص ... $a=e=2/71828$ داریم:

$$y=e^{u(x)}$$

برای این‌که تابع $y=a^{u(x)}$ مفهوم بهتری پیداکند می‌توان آن را چنین نوشت :

$$y=e^{u(x)\log_e^a}$$

عبارت $\log_e^a$ را با نماد $\ln a$ نمایش می‌دهیم و درنتیجه داریم:

$$y=a^{u(x)}=e^{u(x)\ln a}$$

با این‌تعریف‌ثابت می‌شود که بافرض‌حقیقی‌بودن عبارت $u(x)$ شرط $a>0$ برای معین بودن توابع نمایی به صورت

$$y=a^{u(x)}$$

شرط کافی است. برای روشن‌شدن مطلب‌به بیان‌یك مثال اکتفا می‌کنیم. به عنوان مثالی ساده می‌توان‌تابع باضابطهٔ

$$y=f(x)=(\sqrt{2})^{\sqrt{12}}$$

را درنظر گرفت. تابع فوق‌را می‌توان چنین نوشت:

$$y=2^{\sqrt{3}}$$

برای تعیین دامنه و برد تابع کافی است بگوییم عدد $2^{\sqrt{3}}$ چه مفهومی‌دارد؟ ازآن‌جاکه توان ۲ یعنی $\sqrt{3}$ عددی گنگ‌است، به همین دلیل نمی‌توان ازآن مفهومی برداشت‌کرد. از طرفی می‌دانیم تابع باضابطهٔ $y=e^x$ به ازای هرعددحقیقی x معین وتعریف شده‌است. زیرا تساوی زیر برقرار است:

$$y=e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

بنابراین برای‌تعریف مناسبی برای $2^{\sqrt{3}}$ الزاماً بایدداشته‌باشیم:

$$2^{\sqrt{3}}=(e^a)^{\sqrt{3}}\Rightarrow e^a=2\Rightarrow a=\ln 2$$

درنتیجه ضابطهٔ‌تابع موردنظر را می‌توان‌به شکل زیرنوشت که دارای مفهوم باشد:

$$y=2^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}\ln 2}\Rightarrow \left|\begin{array}{l}D_f=R\\ R_f=\{e^{\sqrt{3}\ln 2}\}\end{array}\right.$$

12) Exponential functions

مثال ۲۰: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ

$$y=f(x)=2^{-x^{-2}}$$

را تعیین کنید.

حل : ابتدا تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=2^{-x^{-2}}=2^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{x^2}}}=e^{-x^{-2}\ln 2}$$

مشاهده می‌شود که اگر $x \to 0$ آنگاه :

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{x^2}}} \to 0$$

اما تابع در $x=0$ تعریف نشده است. بنابراین دامنهٔ تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی به جز صفر می‌باشد:

$$D_f=R-\{0\}$$

تعیین برد تابع : ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود :

$$y>0$$

اینک x را برحسب y حل می‌کنیم. برای این منظور با توجه به $y>0$ لگاریتم طرفین را به دست می‌آوریم:

$$\log y=\frac{-1}{x^2}\log 2 \implies x^2=\frac{-\log 2}{\log y} \implies$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{\log 2}{-\log y}}$$

برای حقیقی بودن x باید داشته باشیم:

$$\log y<0 \qquad y>0$$

از شرایط اخیر حدود y تعیین می‌شود:

$$0<y<1$$

در این‌جا از اشتراک $y>0$ و $0<y<1$ برد تابع معین می‌شود:

$$R_f=(0,1)$$

مثال ۲۱: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ

$$y=f(x)=e^{\frac{-1}{\sqrt{x-[x]}}}$$

را تعیین کنید.

حل : می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی x داریم:

$$[x]\leqslant x<[x]+1$$

درنتیجه به ازای هر عدد حقیقی x خواهیم داشت:

$$0\leqslant x-[x]<1$$

مشاهده می‌شود که اگر $(x-[x])\to 0^+$ آنگاه

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt{x-[x]}}}}\to 0^+$$

اما اگر $x\in Z$ آنگاه $x-[x]=0$ و درنتیجه تابع به ازای مجموعهٔ عددهای صحیح Z نامعین است و در نتیجه داریم:

$$D_f=R-Z$$

تعیین برد تابع: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$y>0$$

اینک به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$y=e^{\frac{-1}{\sqrt{x-[x]}}} \implies \log_e^y=\frac{-1}{\sqrt{x-[x]}} \implies$$

$$\sqrt{x-[x]}=\frac{-1}{\log_e^y}=\frac{-\log e}{\log y}$$

طرف اول تساوی همواره مثبت است. بنابراین برای مثبت بودن طرف دوم الزاماً خواهیم داشت:

$$y>0 \quad , \quad \log y<0 \implies 0<y<1$$

در این جا از اشتراک $y>0$ و $0<y<1$ برد تابع معین می‌شود:

$$R_f=(0,1)$$

۷ــ تعیین دامنه و برد توابع لگاریتمی[13]:

توابع لگاریتمی‌را درحالت عمومی به شکل زیر درنظر می‌گیریم:

$$y=\log_a^{A(x)}$$

که دراین‌گونه توابع همواره داریم:

$$A(x)>0 \quad , \quad a\neq 1 \quad , \quad a>0$$

بنابراین برای تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی کافی است شرایط اخیررا برقرارکنیم.

مثال ۲۲: دامنه وبردتابع باضابطهٔ زیررا حساب‌کنید:

$$y=f(x)=\log\frac{x-2}{x+2}$$

حل: تعیین دامنه:

$$D_f=\left\{x \,\middle|\, \frac{x-2}{x+2}>0\right\}$$

$$\frac{x-2}{x+2}>0$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-2}{x+2}$		$+$		$-$	0	$+$	

$$\Longrightarrow D_f=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$$

برای‌تعیین بردتابع ابتدا x را برحسب y حل می‌کنیم، سپس باتوجه به دامنهٔ تابع yهای موردقبول‌را معین می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{x+2}=10^y \Longrightarrow x-2=10^y\times x+2\times 10^y$$

$$\Longrightarrow x=\frac{2(1+10^y)}{1-10^y}\in D_f \Longrightarrow$$

$$\frac{2(1+10^y)}{1-10^y}>2 \quad \text{یا} \quad \frac{2(1+10^y)}{1-10^y}<-2$$

بنابراین اجتماع مجموعهٔ‌جوابهای‌نامعادله‌های اخیر بردتابع را تشکیل می‌دهد.

نامعادله‌های فوق‌را به شکل ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{10^y}{1-10^y}>0 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{1-10^y}<0$$

$$1-10^y=0 \Longrightarrow 10^y=1 \Longrightarrow y=0$$

y	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-10^y$		$+$	0	$-$	

بنابراین اجتماع $y>0$ و $y<0$ بردتابع را تشکیل می‌دهد:

$$R_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=R-\{0\}$$

مثال ۲۳: دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیر را تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)}$$

حل: باتوجه به ضابطهٔ تابع برای‌تعیین دامنهٔ تابع کافی است مجموعهٔ‌جواب دستگاه‌نامعادله‌های زیر رابه دست آوریم:

$$\begin{cases} 9-x^2>0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2<9 \\ \log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)\geqslant \log_{\frac{1}{2}} 1 \end{cases}$$

13) Logarithmic functions

$$\Longrightarrow \begin{cases} -3<x<3 \\ \dfrac{\log(9-x^2)}{\log\frac{1}{2}} \geqslant \dfrac{\log 1}{\log\frac{1}{2}} \end{cases} \xRightarrow{(\log\frac{1}{2}<0)}$$

$$\begin{cases} -3<x<3 \\ \log(9-x^2) \leqslant \log 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3<x<3 \\ 9-x^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -3<x<3 \\ x^2 \geqslant 8 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -3<x<3 \\ x \geqslant 2\sqrt{2} \ \text{یا}\ x \leqslant -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$D_f=\{x \mid -3<x<3\} \cap \{x \mid x \geqslant 2\sqrt{2} \ \text{یا}\ x \leqslant -2\sqrt{2}\}$$

$$\Longrightarrow D_f=(-3,-2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2},3)$$

تعیین برد تابع: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$y \geqslant 0$$

اینك x را برحسب y حل می‌کنیم:

$$y^2=\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2) \Longrightarrow 9-x^2=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{y^2}$$

$$x^2=9-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{y^2} \Longrightarrow$$

$$|x|=\sqrt{9-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{y^2}} \in [2\sqrt{2},3)$$

$$\Longrightarrow 2\sqrt{2} \leqslant \sqrt{9-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{y^2}} < 3$$

$$\Longrightarrow 8 \leqslant 9-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{y^2} < 9$$

$$\Longrightarrow -1 \leqslant -\left(\tfrac{1}{2}\right)^{y^2} < 0$$

$$0<\left(\tfrac{1}{2}\right)^{y^2} \leqslant 1 \Longrightarrow$$

$$R_f=\{y \mid y \in R\ ,\ y \geqslant 0\} \Longrightarrow R_f=[0,+\infty)$$

مثال ۲۴: دامنه و برد تابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\sqrt{\log\frac{10x+10}{x^2-1}+\log\frac{x^2-1}{x+1}+\cos x}$$

حل: ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\sqrt{\log\left(\frac{10(x+1)}{x^2-1}\right)\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)+\cos x}$$

$$\xRightarrow{x^2-1\neq 0} y=\sqrt{\log 10+\cos x}$$

$$\Longrightarrow y=\sqrt{1+\cos x}$$

$$\xRightarrow{1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}} y=\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$$

دراین‌جا با توجه به شرط:

$$x \neq \pm 1 \quad \text{و یا} \quad x^2-1 \neq 0$$

دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f=R-\{-1\ ,\ 1\}$$

تعیین برد تابع: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$y \geqslant 0$$

اینك با توجه به:

$$0 \leqslant \left|\cos\frac{x}{2}\right| \leqslant 1$$

داریم:

$$0 \leqslant \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| \leqslant \sqrt{2} \Longrightarrow 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}$$

حال باتوجه به دامنهٔ‌تابع نتیجه می‌شود که زوجهای مرتب

$$(-1, f(1)) \ , \ (1, f(1))$$

جزو مجموعهٔ f نمی‌باشند. بنابراین بایـد مقدار $f(\pm 1)$ را حساب کرده واز فاصلهٔ $[0, \sqrt{2}]$ حذف کنیم:

$$f(\pm 1)=\sqrt{2}\left|\cos(\frac{\pm 1}{2})\right|=\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}$$

بنابراین در این‌جا بردتابع معین می‌شود:

$$R_f=\left\{y|0\leqslant y\leqslant\sqrt{2}\right\}-\left\{\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\right\}$$

۸ـ تعیین دامنه وبرد توابع مثلثاتی[14]:

توابع ساده مثلثاتی با ضابطهٔ

$$g(x)=\cos x \quad \text{یا} \quad f(x)=\sin x$$

دارای دامنهٔ R (مجموعهٔ عددهای‌حقیقی) می‌باشند و اگر

$$f(x)=tg x$$

باشد:

$$f(x)=tg x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cos x=0 \implies$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2} \implies D_f=R-\left\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$$

و اگر $g(x)=cotg x$ باشد:

$$g(x)=\frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{و} \quad \sin x=0 \implies x=k\pi \implies$$

$$D_g=R-\{x|x=k\pi\}$$

تعیین برد توابع: اگر

$$f(x)=\cos x \quad \text{یا} \quad f(x)=\sin x$$

چون‌همواره $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$ و $-1\leqslant \cos x\leqslant 1$ بنابراین داریم:

$$R_f=[-1, 1]$$

و اگر $g(x)=tg x$ یا $g(x)=cotg x$ تمام عددهای حقیقی R می‌باشد:

$$R_f=R$$

باید توجه داشت‌که معمولاً برای تعیین برد توابع مثلثاتی از مقادیرحداقل وحداکثرتوابع $\sin x$ و $\cos x$ استفاده می‌شود.

مثال ۲۵: دامنه وبرد تابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\sin x+\cos x$$

حل: دامنهٔ هریك از توابع $\sin x$ و $\cos x$ مجموعـهٔ عددهای‌حقیقی R است، بنابراین دامنهٔ مجموع این‌دوتابع R می‌باشد:

$$D_f=R$$

برای تعیین برد تابع از اتحاد:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

از آن‌جاکه می‌دانیم:

$$-1\leqslant\cos(x-\frac{\pi}{4})\leqslant 1$$

پس نتیجه می‌شود:

$$-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})\leqslant\sqrt{2}$$

$$\implies -\sqrt{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2} \implies$$

$$R_f=[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

مثال ۲۶: دامنه وبردتابع با ضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x+\sqrt{-\sin^4\pi x}$$

حل: ازآن‌جاکه فرجهٔ رادیکال زوج‌است پس باید

14) Trigonometric functions

$\sin^4\pi x \leqslant 0$ و یا $-\sin^4\pi x \geqslant 0$

باشد.

اما همواره $\sin^4\pi x > 0$ و در نتیجه تابع وقتی معین است که داشته باشیم:

$$-\sin^4\pi x = 0 \Rightarrow \sin\pi x = 0 \Rightarrow$$

$$\pi x = k\pi \Rightarrow x = k \in z$$

(k متعلق‌به مجموعهٔ عددهای صحیح است.) بنابراین‌دامنهٔ‌تابع، مجموعهٔ عددهای صحیح است: $D_f = z$

با توجه به دامنه، ضابطهٔ تابع به شکل‌زیر تحویل می‌شود:

$$D_f = z : y = \cos\pi x = \pm 1$$

درنتیجه بردتابع مجموعهٔ دوعضوی $\{-1,1\}$ می‌باشد:

$$R_f = \{-1,1\}$$

مثال ۲۷: دامنه وبرد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

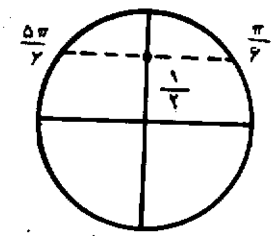
$$y = f(x) = \frac{2}{\sqrt{8\sin x - 4}}$$

حل: دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f = \{x \mid 8\sin x - 4 > 0\}$$

$$8\sin x - 4 > 0 \Rightarrow 8\sin x > 4 \Rightarrow$$

$$\sin x > \frac{1}{2} \Rightarrow$$



با توجه به شکل داریم:

$$D_f = \left\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right\}$$

تعیین برد تابع: از ضابطه تابع نتیجه می‌شود:

$$y > 0$$

اینك $\sin x$ را ازضابطهٔ تابع برحسب y به‌دست‌می‌آوریم و سپس‌شرط $\frac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant 1$ را برقرار می‌کنیم:

$$y^2 = \frac{4}{8\sin x - 4} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2\sin x - 1}$$

$$2y^2\sin x - y^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{1+y^2}{2y^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2y^2} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2y^2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{y^2} \leqslant 1$$

$$\frac{1}{y^2} \leqslant 1 \Rightarrow y^2 \geqslant 1 \Rightarrow$$

$|y| \geqslant 1$ ($y \geqslant 1$ یا $y \leqslant -1$)

از اشتراك $|y| \geqslant 1$ و $y > 0$ برد تابع معین می‌شود:

$$R_f = [1, +\infty)$$

مثال ۲۸: دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y = f(x) = \sin(\log_2 \log_3 x)$$

حل: تعیین دامنه تابع:

$$\log_3 x > 0 \Rightarrow \log_3 x > \log_3 1 \Rightarrow$$

$$x > 1 \Rightarrow D_f = (1, +\infty)$$

تعیین برد تابع:

$$|\sin(\log_2 \log_3 x)| \leqslant 1$$

$$\Rightarrow |y| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant y \leqslant 1$$

$$\Rightarrow R_f = [-1, 1]$$

ادامهٔ مطلب درشمارهٔ آینده ارائه خواهد شد.