تعیین دامنه[1] و برد[2] توابع[3] (قسمت اول)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

(مورد استفاده دانش‌آموزان دوم ـ سوم و چهارم)

تعریف : فرض‌کنیم f تابعی‌از A در B باشد. مجموعهٔ مؤلفه‌های اول اعضای f را دامنهٔ تابع f و مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم اعضای f را بردتابع f گوییم ، دامنهٔ یك تابع مانند f را به D_f و برد آن‌رابه R_f نشان می‌دهیم. درنتیجه خواهیم‌داشت:

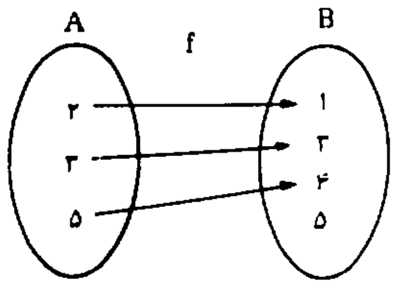
$$D_f \subset A \ ، \ D_f = \{x|(x,y)\in f\}$$

$$R_f \subset B \ ، \ R_f = \{y|(x,y)\in f\}$$

لازم است توضیح دهیم که مجموعهٔ B «مجموعهٔ انجام» یا «هم دامنه[4]» تابع f و مجموعهٔ A «مجموعهٔ آغاز» f نامیده می‌شوند اگر داشته باشیم :

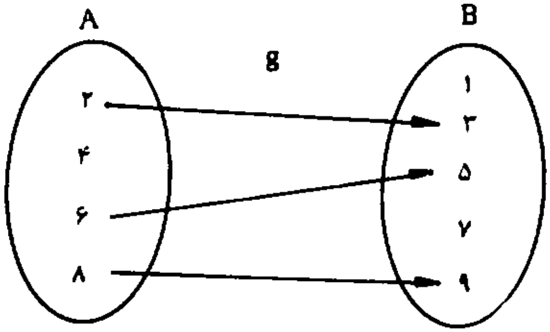
$$D_f \subset A \quad , \quad R_f \subset B$$

مثال ۱ : تابع f روی مجموعهٔ $A=\{۲ \ , \ ۳ \ , \ ۵\}$ در مجموعهٔ $B=\{۱,۳,۴,۵\}$ بانمودار زیر تعریف شده است، دامنه و برد آن‌را تعیین‌کنید.



حل : دراین‌جا A و B به ترتیب دامنه و هم دامنهٔ f می‌باشند، زیرا از هرعضو A یك پیکان خارج شده‌است، در صورتی‌که به هرعضو B پیکان منتهی نشده‌است. بدیهی‌است برد تابع f مجموعهٔ دوعضوی {۳,۴} می‌باشد.

مثال ۲ : تابع g از مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ در مجموعهٔ $B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ مطابق نمودار زیر تعریف شده است، دامنه و برد آن را مشخص‌کنید .



حل : همان‌طورکه ازنمودار مشخص است داریم:

$$D_g \subset A \quad , \quad R_g \subset B$$

بنابراین A مجموعهٔ آغاز g و B مجموعهٔ انجام g می‌باشند؛

---

1) Domain
2) Range
3) Function
4) Co - domain

که با توجه به پیکانهای خارج‌شده از مؤلفه‌های مجموعهٔ A و واردشده به‌مؤلفه‌های مجموعهٔ B دامنه و بردتابع g مجموعه‌های زیر می‌باشند.

$$D_f=\{۲,۶,۸\} \quad , \quad R_f=\{۳,۵,۹\}$$

نکتهٔ۱: برای تعیین دامنه و برد یك تابع ابتدا باید از تابع بودن‌آن اطمینان حاصل‌کنیم و سپس دامنه و بردآن را تعیین‌کنیم. البته باید توجه‌داشت که یك‌رابطه ممکن‌است تابع نباشد و برای‌آن دامنه و برد مشخص‌کنیم. مثال زیر گویای این مطلب مهم می‌باشد.

مثال ۳ : ابتدا تعیین‌کنیدکه آیا رابطهٔ زیــر یك تابع است؟ اگر تابع نیست زیر مجموعه‌هایی از آن را با سه زوج مرتب مشخص‌کنیدکه تابع باشند و دامنه و برد هــریك را نیز بنویسید .

$$R=\{(\sqrt{۲}-۱,۴)\ ،\ (\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱},۵)،(۳,۶)،$$
$$(\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}},۱)\ ،\ (۲+\sqrt{۳},۱)\}$$

حل : با توجه بــه رابطهٔ R می‌بینیم کــه مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب‌آن یعنی $(\sqrt{۲}-۱,۴)$ و $(\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}\ ,\ ۵)$مساوی است زیرا داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}$$
$$=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}-۱$$

ودر نتیجه این دو زوج‌را می‌توان چنین نوشت:

$$(\sqrt{۲}-۱,۵)\ \ ,\ \ (\sqrt{۲}-۱,۴)$$

واز آن‌جاکه می‌دانیم در تابع هیچ دو زوج مرتب متفاوتــی دارای مؤلفه‌های اول مساوی نیست ، نتیجه می‌شودکه R یك تابع نیست.

اینك زیرمجموعه‌ای‌از R را مشخص می‌کنیم‌که شرایط تابع‌رادارا باشد. برای‌این منظور کافی‌است‌یکی‌ازدوزوج مرتبی که دارای مؤلفه‌های‌اول مساوی بودند را حذف‌کنیم. زیرا با کمی‌دقت می‌توان به تساوی زوجهای مرتب $(۲+\sqrt{۳},۱)$ و $(\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}},۱)$ پی‌برد :

$$\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}$$
$$=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

دراین‌جا با توجه به مطالب‌اخیر، نتیجه می‌شودکه تنها دو زیر مجموعه از R می‌توان نوشت‌که شرایط‌تابع موردنظررا دارا باشند :

$$f_۱=\{(\sqrt{۲}-۱,۴)\ ،\ (۳,۶)\ ،\ (۲+\sqrt{۳},۱)\}$$
$$f_۲=\{(\sqrt{۲}-۱,۵)\ ،\ (۳,۶)\ ،\ (۲+\sqrt{۳},۱)\}$$

دامنه وبرد توابع $f_۱$ و $f_۲$:

$$D_{f_۱}=\{\sqrt{۲}-۱\ ,\ ۳\ ,\ ۲+\sqrt{۳}\}\ ,$$
$$R_{f_۱}=\{۱\ ,\ ۴\ ,\ ۶\}$$
$$D_{f_۲}=\{\sqrt{۲}-۱\ ,\ ۳\ ,\ ۲+\sqrt{۳}\}\ ,$$
$$R_{f_۲}=\{۱\ ,\ ۵\ ,\ ۶\}$$

نکتهٔ ۲ : گزاره‌نماها را با تابع اشتباه‌نکنید. به عنوان مثال‌گزاره نمای $y=\frac{۱}{x^۲}$ یك تابع نیست بلکه ضابطهٔ[5] یك تابع‌است. اگر برای این‌ضابطه حوزهٔ تعریف (دامنه) و حوزهٔ مقادیر (برد) درنظر گرفته‌شود، در آن صورت مشخص‌کنندهٔ یك تابع خواهد شد. در صورتی‌که R^+ را برای نمایش مجموعهٔ اعدادحقیقی مثبت مخالف‌صفر به کاربریم باتعریف‌دامنه وبردی برای‌آن مانند زیر می‌توان‌آن را به تابع‌تبدیل کرد:

۵) Rule

$$f : R^+ \to R^+$$

$$f : x \to \frac{1}{x^2}$$

بنابراین نماد f با نماد $y=f(x)$ متفاوت است، به طوری که f خودتابع و $y=f(x)$ قانون یاضابطهٔ تابع می‌باشد.

توجه: دراین مقاله تمام توابـع در $R \to R$ تعریف شده‌اند و برای‌نمایش فاصله‌های‌باز ازپرانتز استفاده می‌کنیم. مثلاً فاصلهٔ باز $]a,b[$ را با (a,b) نشان می‌دهیم (R مجموعهٔ اعداد حقیقی است).

مثال ۴ : دامنه و برد تابع زیررا تعیین‌کنید. سپس تابع فوق‌را باچند ضابطه نشان‌دهید.

$$f=\{(1,1)\,،\,(2,3)\,،\,(3,5)\,،\,(4,7)\,،\,(5,9)\,(6,11)\,،\,(7,1)\,،\,(8,7)\,،\,(9,8)\,،\,(10,9)\,(11,10)\}$$

حل : درصورتی‌که دامنهٔ تابع رابه D_f و بردآن را به R_f ومجموعهٔ اعداد طبیعی‌را به N نمایش‌دهیم داریم:

$$D_f=\{1,2,3,\cdots,11\} = \{x|x\in N\ ,\ x\leqslant 11\}$$

$$R_f=\{1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 8\ ,\ 9\ ,\ 10\ ,\ 11\}$$

بنا براین‌تابع را به شکل‌ضوابط زیر می‌توان نشان داد:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\leqslant 6\ ,\ x\in N \\ 1 & x=7 \\ x-1 & 8\leqslant x\leqslant 11\ ,\ x\in N \end{cases}$$

مثال ۵ : دامنه وبردتابع چندضابطه‌ای زیر را به دست آورید وتابع رابه شکل مجموعهٔ زوجهای مرتب‌نشان دهید و نمودار[۶] آن‌را رسم نمایید.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

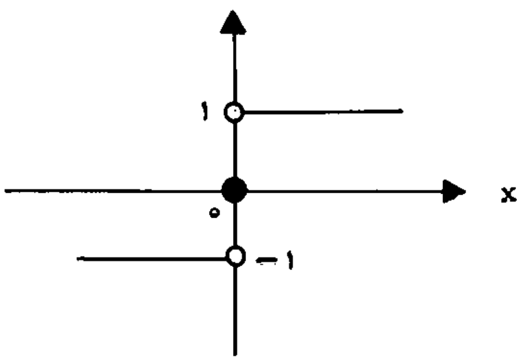
حل : دامنهٔ‌تابع باتوجه به ضوابط تابع: $D_f=R$. برد تابع مجموعهٔ سه عضوی است:

$$R_f=\{-1\ ,\ 0\ ,\ 1\}$$

تابع‌به شکل مجموعهٔ زوجهای مرتب:

$$f=f_1\cup f_2\cup f_3=\begin{cases} f_1=\{(x,y)\mid x\in R^+,y=1\} \\ f_2=\{(0,0)\} \\ f_3=\{(x,y)\mid x\in R^-,y=-1\} \end{cases}$$

نمودار تابع :



توجه : این تابع‌را تابع علامت گویند و با نماد sgnx نمایش می‌دهند:

$$f(x)=\text{sgn}x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

در این‌جا برای‌آن‌که تعیین دامنه وبرد تـوابع آسانتر انجام‌گیرد آنها را به ۱۰ دستهٔ اساسی تقسیم‌کرده و روشهایی برای‌تعیین دامنه وبرد هردسته ، با ذکرچند مثال‌نشان می‌دهیم.

۱ـ تعیین دامنه وبرد توابع چندجمله‌ای[۷]

تابع f را یك‌تابع چندجمله‌ای گوییم هرگاه‌به‌ازاءهر x

۶) Graph

۷) Polynomial functions

حقیقی باضابطه‌ای به صورت:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$(n\in N\cup\{0\})$$

تعریف شود.

اعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n را ضرایب چندجمله‌ای وعدد صحیح و نامنفی n را درصورتی که $a_n\neq 0$ باشد درجهٔ آن می‌نامیم. دامنهٔ این توابع اگرذکر نشود R مجموعهٔ اعدادحقیقی منظور می‌شود وسپس برد آنان را باحل کردن x برحسب y و برقراری شرط حقیقی بودن x معین می‌کنیم. بدیهی است yهایی که به ازای آنان مقدار x حقیقی است برد تابع را تشکیل می‌دهند. توجه داشته باشید که حل کردن x برحسب y درحالت عمومی مخصوصاً وقتی که $n\geqslant 5$ باشد همیشه امکان‌پذیر نیست ونیز به همین علت است که تعیین برد توابع چندجمله‌ای همیشه امکان‌پذیر نمی‌باشد. شکل کلی این توابع به صورت زیر است:

$$f: R\rightarrow B$$

$$x\rightarrow a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

مثال ۶: دامنه وبرد تابع با ضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=-x^2+1$$

حل: بدیهی است دامنهٔ تابع R مجموعهٔ اعداد حقیقی است:

$$D_f=R$$

همان‌طور که گفته شد برای تعیین برد توابع کافی است x را برحسب y حل کنیم و سپس y هایی را معین کنیم که به ازای آنان مقدار x حقیقی است:

$$y=-x^2+1\implies x^2=1-y$$

$$\implies x=\pm\sqrt{1-y}$$

باتوجه به رابطهٔ اخیر وحقیقی بودن x خواهیم داشت:

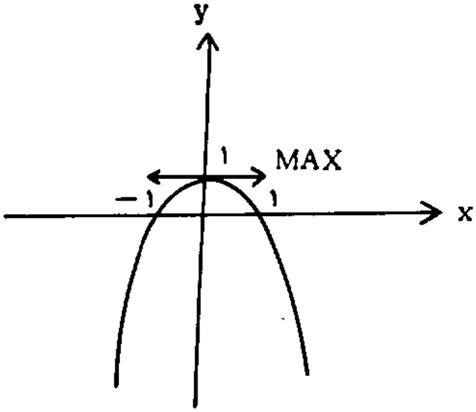
$$1-y\geqslant 0\implies y\leqslant 1$$

بنابراین بردتابع چنین است:

$$R_f=(-\infty,\ 1]$$

باید توجه داشت که برد توابع را از روی جدول تغییرات ویا نمودار آنان نیز می‌توان معین کرد.

به عنوان مثال نمودار تابع $y=-x^2+1$ در زیر رسم شده است:



همان‌طور که مشاهده می‌شود از نمودار تابع نیز مشخص است که مؤلفهٔ دوم زوجهای مرتب مربوط به تابع بزرگتر از یک نمی‌توانند باشند. درنتیجه برد تابع رااعداد کوچکتر یا مساوی یک تشکیل می‌دهند.

مثال ۷: دامنه وبردتابع با ضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=x^4-2x^2+4$$

حل: دامنهٔ تابع R مجموعهٔ اعداد حقیقی است:

$$D_f=R$$

برای تعیین برد تابع به شکل زیرعمل می‌کنیم:

$$x^4-2x^2+4-y=0$$

$$\implies x^2=1\pm\sqrt{1-(4-y)}$$

$$x=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{y-3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{۱+\sqrt{y-۳}} & (۱)\\ \text{یا} & \\ x=\pm\sqrt{۱-\sqrt{y-۳}} & (۲)\end{cases}$$

برای هریک از روابط (۱) و (۲) شرط زیر لازم است:

$$y-۳\geqslant ۰ \Longrightarrow y\geqslant ۳ \qquad (۳)$$

برای رابطهٔ (۲) شرط زیر را نیز داریم:

$$۱-\sqrt{y-۳}\geqslant ۰ \Longrightarrow \sqrt{y-۳}\leqslant ۱$$

$$\Longrightarrow ۰\leqslant y-۳\leqslant ۱ \Longrightarrow ۳\leqslant y\leqslant ۴ \qquad (۴)$$

بنابراین روابط (۱) و (۲) با توجه به شرایط (۳) و (۴) چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{۱+\sqrt{y-۳}} & y\geqslant ۳\\ \text{یا} & \\ x=\pm\sqrt{۱-\sqrt{y-۳}} & ۳\leqslant y\leqslant ۴\end{cases}$$

و در نتیجه برای حقیقی بودن x کافی است داشته باشیم:

$$y\geqslant ۳$$

در این جا برد تابع نتیجه می‌شود:

$$R_f=[۳\ ,\ +\infty)$$

۴ــ تعیین دامنه و برد توابع کسری[8] (غیراصم)

توابع کسری که غالباً صورت و مخرج آنها توابعی از چند جمله‌ای است (و یا صورت و مخرج آنان را می‌توان تحویل به توابع چند جمله‌ای کرد) را توابع کسری گویا می‌نامیم. دامنهٔ این توابع R مجموعهٔ اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های مخرج (در صورت وجود) می‌باشد. باید توجه داشت که در حالت عمومی تعیین برد این گونه توابع نیز امکان‌پذیر نیست، مخصوصاً حالتی که درجهٔ چندجمله‌ای صورت یا مخرج و یا هر دو بزرگتر یا مساوی ۵ باشد. صورت کلی ضابطهٔ این نوع توابع به شکل زیر است:

$$y=f(x)=\frac{a_n x^n+\cdots+a_۱x+a_۰}{b_n x^n+\cdots+b_۱x+b_۰}=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$D_f=R-\{x|Q(x)=۰\}$$

مثال ۸ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}$$

حل : برای تعیین دامنهٔ تابع فوق ابتدا ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم. سپس مجموعهٔ ریشه‌های مخرج را از مجموعهٔ اعداد حقیقی کم می‌کنیم:

$$x^۲-۱=۰ \Longrightarrow x=\pm ۱$$

$$\Longrightarrow D_f=R-\{-۱\ ,\ ۱\}$$

تعیین برد تابع:

$$y(x^۲-۱)=x^۲+۱ \Longrightarrow x^۲(y-۱)=y+۱$$

$$\Longrightarrow x^۲=\frac{y+۱}{y-۱}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{y-۱}{y+۱}}$$

برای حقیقی بودن x باید داشته باشیم:

$$\frac{y+۱}{y-۱}\geqslant ۰$$

y	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$y+۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$y-۱$		$-$		$-$	۰	$+$	
$\frac{y+۱}{y-۱}\geqslant ۰$		$+$		$-$		$+$	
			جواب		نامعین		

۸) Fractional functions

باتوجه به جدول، بردتابع چنین نتیجه می‌شود:

$$R_f=(-\infty\ ,\ -1]\cup(1\ ,\ +\infty)$$

مثال ۹ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{x^3+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)}$$

حل : تعیین دامنه :

$$x(x+1)(x^2-4)=0 \Longrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} x=0 \\ x+1=0 \Longrightarrow x=-1 \\ x^2-4=0 \Longrightarrow x=\pm 2 \end{array}\right.$$

$$D_f=R-\{-2,-1,0,2\}$$

برای‌تعیین بردتابع ابتدا باتوجه‌به دامنهٔ‌آن تابع را تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$y=\frac{x(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x-2)}$$

باتوجه‌به دامنهٔ تابع داریم:

$$x\neq 0\ ,\ x\neq -1\ ,\ x\neq -2$$

ودرنتیجه تابع‌به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y=f(x)=\frac{1}{x-2}$$

دراین‌جا باید عرض هریك از مقادیر فوق را حساب‌کنیم ود تعیین‌برد مجموعهٔ فوق‌را از R مجموعهٔ اعداد حقیقی کم‌کنیم:

$$f(0)=\frac{-1}{2}\ ,\ f(-1)=\frac{-1}{3}\ ,\ f(-2)=\frac{-1}{4}$$

اینك آخرین مرحلهٔ تعیین برد:

$$y=\frac{1}{x-2}\Longrightarrow x-2=\frac{1}{y} \Longrightarrow x=\frac{1}{y}+2$$

برای حقیقی‌بودن x باید داشته‌باشیم: $y\neq 0$

بنابراین بردتابع چنین‌نتیجه می‌شود:

$$R_f=R-\left\{\frac{-1}{2}\ ,\ \frac{-1}{3}\ ,\ \frac{-1}{4}\ ,\ 0\right\}$$

* توجه داشته‌باشید که عرض‌نقاطی به طولهای $x=0$، $x=-1$ و $x=-2$ ازتابع‌فوق مبهم $(\frac{0}{0})$ است. در این گونه موارد ابتدا تابع‌رابه عاملهای مبهم ساده می کنیم وسپس مقادیرهر یك‌را از تابع ساده‌شده محاسبه‌کرده ودرآخرین‌مرحلهٔ تعیین بردتابع مجموعهٔ مقادیرحاصل را از R مجموعهٔ اعداد حقیقی کم می کنیم.

۳ـ تعیین دامنه و برد توابع اصم یا گنگ[9]

توابعی‌را اصم (گنگ) گوییم‌که درضابطهٔ‌آنها متغیر x (یا عبارتی‌برحسب متغیر x) در زیررادیکال‌باقی‌بماند. به‌بیانی دیگر، توان x (یا عبارت‌برحسب x) کسری‌باشد. ضابطهٔ این گونه‌توابع درحالت عمومی‌به شکل زیراست:

$$y=f(x)=\sqrt[n]{p(x)}$$

اگر p(x) چندجمله‌ای‌باشد، درصورتی‌که n (فرجهٔ رادیکال) فردباشد R (مجموعهٔ اعداد حقیقی) است. واگرفرجهٔ رادیکال عددی زوج‌باشد، دامنه عبارت است از: مجموعهٔ xهایی‌که به ازای‌آنها زیررادیکال عددی‌نامنفی (مثبت‌یاصفر) باشد.

برای تعیین برد در صورت امکان x را برحسب y حل می‌کنیم وسپس مجموعهٔ yهایی‌که به ازای‌آنها برای x مقدار حقیقی به دست می‌آید برد تابع را تشکیل می‌دهند. بنابراین در حالت عمومی‌برد توابع‌گنگ (اصم) نیز همیشه امکان‌پذیر نیست.

مثال۱۰ . دامنه وبردتابع با ضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}}$$

9) Irrational functions

حل : دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f=\left\{x \mid \frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}\geqslant 0\right\}$$

$$\frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}\geqslant 0 \Rightarrow$$

$$x^2-3x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

$$-x^2+2x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1		0		3	$+\infty$
x^2-3x	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$-x^2+2x+3$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}$	$-$		$+$	0	$-$		$-$

$$\Rightarrow D_f=(-1\,,\,0]$$

تعیین برد تابع : ازضابطهٔ تابع‌نتیجه می‌شود: $y\geqslant 0$.
با توجه به دامنه، تابع‌را ساده می‌کنیم:

$$y=\sqrt{\frac{x(x-3)}{-(x+1)(x-3)}}$$

$$\frac{x-3\neq 0}{(x\neq 3)}\Rightarrow y=\sqrt{\frac{x}{-(x+1)}}$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{x}{-(x+1)} \Rightarrow -xy^2-y^2=x$$

$$x(1+y^2)=-y^2 \Rightarrow$$

$$x=\frac{-y^2}{1+y^2}\in(-1\,,\,0]$$

$$\Rightarrow -1<\frac{-y^2}{1+y^2}\leqslant 0$$

$$\Rightarrow -1<\frac{-y^2-1+1}{1+y^2}\leqslant 0$$

$$\Rightarrow -1<-1+\frac{1}{1+y^2}\leqslant 0$$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{1+y^2}\leqslant 1$$

$$\Rightarrow 1+y^2\geqslant 1 \Rightarrow y^2\geqslant 0 \Rightarrow y\in R$$

از اشتراک $y\in R$ و $y\geqslant 0$ داریم :

$$R_f=[0\,,\,+\infty)$$

مثال ۱۱: دامنه و بردتابع با ضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید.

$$y=f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$$

حل : دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f=\{x \mid x^2-4x+5\geqslant 0\}$$

$$x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$$

$$\Rightarrow D_f=R \qquad \text{(مجموعهٔ اعداد حقیقی)}$$

برای‌تعیین بردتابع درابتدا ازضابطهٔ تابع نتیجه می‌گیریم‌که همواره $y\geqslant 0$ است.

اینک به ترتیب زیرعمل می‌کنیم:

$$y=\sqrt{(x-2)^2+1} \Rightarrow y^2=(x-2)^2+1$$

$$\Rightarrow (x-2)^2=y^2-1$$

$$|x-2|=\sqrt{y^2-1} \Rightarrow y^2-1\geqslant 0$$

$$\Rightarrow y^2\geqslant 1 \Rightarrow |y|\geqslant 1 \left(\begin{matrix} y\geqslant 1 \\ \text{یا} \\ y\leqslant -1 \end{matrix}\right)$$

از اشتراك $|y| \geqslant ۱$ و $y \geqslant ۰$ بردتابع معین می‌شود:

$$R_f = [۱\ ,\ +\infty)$$

مثال ۱۲: دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y = f(x) = \frac{x^۴ + ۲}{\sqrt{x^۴ + ۱}}$$

حل : با توجه به $x^۴ + ۱ > ۰$ داریم:

$$D_f = R \qquad \text{(مجموعهٔ اعداد حقیقی)}$$

برای تعیین برد به شکل زیرعمل می‌کنیم:

$$y = \frac{x^۴ + ۱ + ۱}{\sqrt{x^۴ + ۱}} = \frac{x^۴ + ۱}{\sqrt{x^۴ + ۱}} + \frac{۱}{\sqrt{x^۴ + ۱}}$$

$$= \sqrt{x^۴ + ۱} + \frac{۱}{\sqrt{x^۴ + ۱}}$$

می‌دانیم اگر k عددی مثبت باشد همواره داریم:

$$k + \frac{۱}{k} \geqslant ۲$$

و تساوی وقتی برقرار است که $k = ۱$ باشد ، بنابراین اصل خواهیم داشت:

$$y = \sqrt{x^۴ + ۱} + \frac{۱}{\sqrt{x^۴ + ۱}} \geqslant ۲$$

$$\Longrightarrow R_f = [۲, +\infty)$$

مثال ۱۳ : دامنهٔ تعریف‌تابع باضابطهٔ زیررا تعیین کنید.

$$y = f(x) = \frac{\sqrt[۸]{۲x - ۲\sqrt{x}}}{\sqrt[۶]{۴ - x^۲}} + \frac{\sqrt[۴]{۱ + x^۲}}{\sqrt{۲x - x^۲}}$$

حل : برای‌تعیین دامنه ابتدا هریك از عبارتهای داخل رادیکال‌را تعیین علامت می‌کنیم.

اشتراك مجموعه‌هایی‌از متغیر x که به ازای‌آنها عبارت داخل‌رادیکالها مثبت یاصفر (درصورتی‌که رادیکالها در مخرج نباشند) است دامنهٔ تعریف‌تابع خواهد بود:

$$\begin{cases} x \geqslant ۰ \\ ۲x - ۲\sqrt{x} \geqslant ۰ \\ ۴ - x^۲ > ۰ \\ ۲x - x^۲ > ۰ \end{cases}$$

$$۱) \quad ۲x - ۲\sqrt{x} \geqslant ۰ \Longrightarrow x \geqslant \sqrt{x}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \Longrightarrow x \leqslant \sqrt{x} \\ \qquad \text{(مخالف } x \geqslant \sqrt{x} \text{ است)} \\ x \geqslant ۱ \Longrightarrow x \geqslant \sqrt{x} \end{cases}$$

بنابراین از نامعادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$x \in [۱\ ,\ +\infty)$$

$$۲) \quad ۴ - x^۲ > ۰ \Longrightarrow x^۲ < ۴ \Longrightarrow -۲ < x < ۲$$

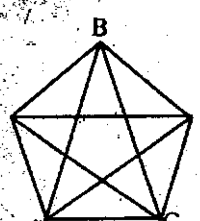
$$\Longrightarrow x \in (-۲\ ,\ ۲)$$

$$۳) \quad ۲x - x^۲ > ۰ \Longrightarrow ۰ < x < ۲ \Longrightarrow x \in (۰, ۲)$$

$$D_f = [۱, +\infty) \cap (-۲, ۲) \cap (۰, ۲) = [۱, ۲)$$

ادامهٔ مطلب در دو شمارهٔ آیندهٔ مجله ارائه خواهد شد.

در پنج ضلعی منتظم زیر اندازهٔ $\angle ABC$ را بیابید



جواب در صفحهٔ ۹۶