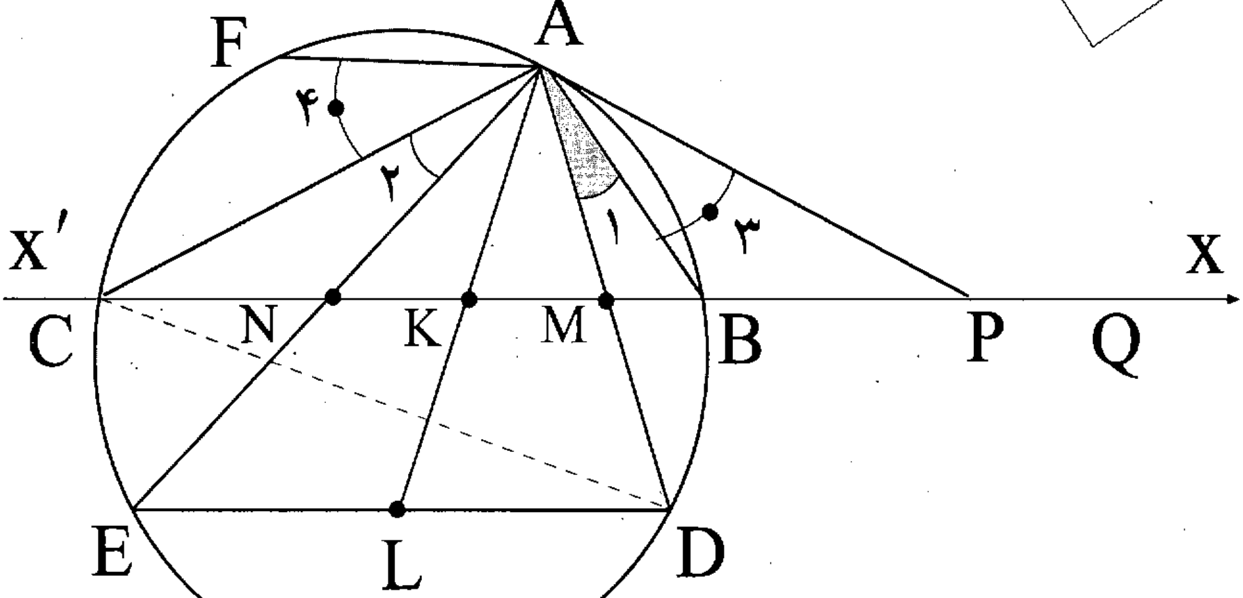
تعمیم قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه

● دکتر احمد شرف‌الدین



چکیده

در مثلث قائم‌الزاویه قضیه‌ای داریم به نام «مربع ارتفاع»؛ این چنین: در مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب دو قطعه‌ای که ارتفاع روی وتر پدید می‌آورد.

نگارنده، قضیه‌ی ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه را تعمیم داده است؛ این چنین: مثلث دل‌خواه ABC را درنظر می‌گیریم و محور $X'X$ را بر یکی از اضلاع آن، مثلاً بر ضلع BC اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم بر محور یاد شده نقطه‌ای چون M بیابیم که رابطه‌ی $\overline{MA}^2 = |\overline{MB}.\overline{MC}|$ برقرار باشد. ($\overline{MB}$ و $\overline{MC}$، اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$، روی محور $X'X$ هستند). ثابت می‌کنیم روی محور $X'X$، چهار نقطه وجود دارد که در رابطه‌ی مطلوب صدق می‌کنند. از این چهار نقطه، سه نقطه در فاصله‌ی متناهی است و یکی نقطه‌ای است که به سوی بی‌نهایت رفته است. برای اثبات نکته‌ی اخیر، از یک حکم جبری بهره می‌گیریم که اکنون

یاد می‌کنیم: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر a به سوی صفر میل کند، یک جواب به‌سوی مقدار $-\frac{c}{b}$ و یک جواب به سوی بی‌نهایت میل می‌کند.

٭٭٭

۱ . **(قضیه‌ی مثلث قائم‌الزاویه)**. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که BC وتر و AH ارتفاع وارد بر وتر است، چنین داریم:

$\overline{AH}^2 = HA.HB$

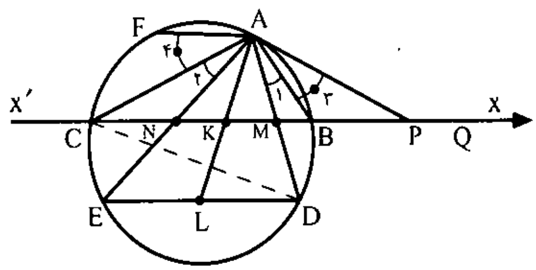
برهان: از تشابه دو مثلث AHB و AHC ، رابطه‌ی موردنظر به‌دست می‌آید.

٭

۲ . **قضیه**. مثلث دل‌خواه ABC و محور $X'X$ را منطبق بر یکی از اضلاع آن مثلاً ضلع BC درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم نقطه‌ای چون M بر محور $X'X$ بیابیم که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

(۱) $\overline{MA}^2 = \overline{MB}.\overline{MC}$

$\overline{MB}$ و $\overline{MC}$ اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ روی محور $X'X$ می‌باشند.



شکل ۱

چهار نقطه از محور $X'X$ در رابطه‌ی مطلوب صدق می‌کنند. از این چهار نقطه، سه نقطه در فاصله‌ی متناهی‌اند و یک نقطه به‌سوی بی‌نهایت میل می‌کند.

برهان: نقطه‌ی دل‌خواه K را روی پاره‌خط BC اختیار می‌کنیم و روی خط AK نقطه‌ی L را طوری اختیار می‌کنیم که $AK = AL$ باشد. از نقطه‌ی L خط l را موازی خط BC رسم می‌کنیم و نقاط برخورد آن را با دایره‌ی محیطی مثلث ABC ، با D و E نشان می‌دهیم. نقطه‌ی برخورد پاره‌خط BC را با دو خط AD و AE به ترتیب M و N می‌نامیم. ثابت می‌کنیم رابطه‌های زیر برقرارند:

(۲) $\overline{MA}^2 = -\overline{MB}.\overline{MC}$

(۳) $\overline{NA}^2 = -\overline{NB}.\overline{NC}$

برهان: چون دو خط BC و DE موازی‌اند و نقطه‌ی K ، وسط پاره‌خط AL است، پس: $AM = MD$ و $AN = NE$. دو مثلث ABM و MDC ، متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های آن‌ها متساوی‌اند: دو زاویه‌ی BAM و BCD مقابل به کمان BD اند و دو زاویه‌ی ABM و MDC مقابل به کمان FC هستند. از تشابه دو مثلث یاد شده، رابطه‌ی ۲ حاصل می‌شود و از تشابه دو مثلث ANC و BNE ، رابطه‌ی ۳ به‌دست می‌آید. پس دو نقطه‌ی M و N جواب‌هایی از مسئله‌اند. آیا مسئله جواب‌های دیگری نیز دارد؟ ـ آری، خواهیم دید.

٭

تبصره: دو خط AM و AN نسبت به دو خط AB و AC هم‌زاویه‌اند (منظور از این اصطلاح آن است که دو زاویه‌ی MAB و NAC برابرند). برای اثبات می‌گوییم، این دو زاویه روبه‌روی دو کمان برابرند، زیرا دو خط BC و ED موازی‌اند. پس دو کمان $\overset{\frown}{BD}$ و $\overset{\frown}{CE}$ برابرند و لذا زاویه‌ی A_1 با زاویه‌ی A_2 برابر است.

٭

جواب‌های دیگر مسئله کدام‌اند؟

نقطه‌ی برخورد خط مماس بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC ، در نقطه‌ی A با خط BC را، با P نشان می‌دهیم. نقطه‌ی P ، جواب دیگری از مسئله است. برای اثبات می‌گوییم، دو مثلث APB و APC متشابه‌اند. (این دو مثلث در زاویه‌ی P مشترک‌اند و اندازه‌ی دو زاویه‌ی BCA و BAP برابر است. زیرا اندازه‌ی این دو زاویه نصف اندازه‌ی کمان AB است). از تشابه این دو مثلث نتیجه می‌شود: $\overline{PA}^2 = \overline{PB}.\overline{PC}$

٭

حل کامل مسئله

در آن‌چه گذشت ثابت کردیم، دو جواب مسئله (یعنی دو نقطه‌ی M و N) روی پاره‌خط BC قرار دارند و یک جواب، نقطه‌ی برخورد خط BC با مماسی است که از نقطه‌ی A بر دایره‌ی محیطی مثلث رسم شود (یعنی نقطه‌ی P). اکنون می‌گوییم، مسئله یک جواب دیگر دارد و آن نقطه‌ای است از خط BC که به سوی بی‌نهایت رفته است. برای رسیدن به این نکته، حکم جبری زیر را به‌کار می‌بریم:

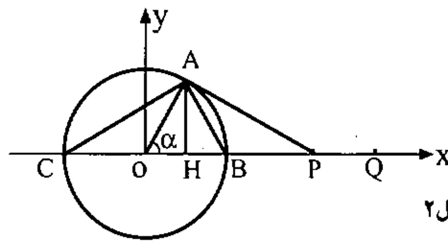
حکم: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر ضریب a به سوی صفر میل کند، یکی از جواب‌ها به سوی $-\frac{c}{b}$ میل می‌کند و جواب دیگر به سوی بی‌نهایت.

برای اثبات این که نقطه‌ی بی‌نهایت خط BC ، جواب دیگری از مسئله است، نقطه‌ی دل‌خواه Q را روی خط BC ، خارج از پاره‌خط BC درنظر می‌گیریم و آن را به سوی بی‌نهایت میل می‌دهیم و به آسانی ثابت می‌کنیم:

$$\lim_{BQ\to\infty} \frac{\overline{QA}^2}{\overline{QB}.\overline{QC}} = 1$$

اثبات آسان است و به خواننده واگذار می‌شود.

اکنون مطلب را با به‌کارگیری دستگاه مختصات دکارتی ثابت می‌کنیم: در شکل۲، دستگاه مختصات xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محور ox منطبق بر خط BC و محور oy منطبق بر عمودمنصف پاره‌خط BC باشد (انتخاب مثلث ABC به صورت قائم‌الزاویه و انتخاب محورهای مختصات در جایگاهی که گفته شد، برای سهولت محاسبه است. حل مسئله در حالت کلی همان است، ولی محاسبه اندکی طولانی می‌شود). اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC را r و اندازه‌ی زاویه‌ی BOA را α می‌نامیم.



شکل۲

معادله‌ی هندسی $\overline{QA}^2 = \left|\overline{QB}.\overline{QC}\right|$ (۴) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

مختصات دو نقطه‌ی A و Q را نیز چنین می‌نویسیم: $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ و $Q(x,0)$. رابطه‌ی موردنظر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\overline{QA}^2 = (x - r\cos\alpha)^2 + (0 - r\sin\alpha)^2$$

اگر نقطه‌ی Q روی پاره‌خط BC باشد، معادله‌ی ۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(5)\quad (x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = -(x^2 - r^2)$$

اگر نقطه‌ی Q خارج پاره‌خط BC باشد، معادله‌ی ۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(6)\quad (x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = x^2 - r^2$$

معادله‌ی ۵ پس از ساده شدن به صورت زیر درمی‌آید:

$$2x^2 - (2r\cos\alpha)x = 0$$

جواب‌های این معادله $x = 0$ و $x = r\cos\alpha$ می‌باشند. معادله‌ی (۶) پس از اختصار به صورت $(r\cos\alpha)x - r^2 = 0$ درمی‌آید. جواب این معادله $x = \frac{r}{\cos\alpha}$ می‌شود. $\frac{r}{\cos\alpha}$ طول نقطه‌ی P است. (نقطه‌ی P، نقطه‌ی برخورد خط BC و خط مماس بر دایره در نقطه A است).

*

آیا مسئله جواب دیگری دارد؟

آری. برای این‌که ثابت کنیم مسئله جواب دیگری دارد، آن را به صورت کلی‌تر مطرح می‌کنیم. بدین قرار که پارامتری در مسئله وارد می‌کنیم تا کلی‌تر شود. حال مسئله‌ی کلی‌تر را بررسی می‌کنیم. در بررسی، پارامتر را به سوی ۱ میل می‌دهیم؛ این‌چنین:

طرح مسئله به صورت کلی‌تر. مثلث ABC مفروض است. بر خط BC نقطه‌ای چون M تعیین کنید که رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$(7)\quad \overline{MA}^2 = k\overline{MB}.\overline{MC}$$ k پارامتری مثبت است

اگر نقطه‌ی M روی پاره‌خط BC باشد، معادله‌ی هندسی ۷ به صورت تحلیلی ۸ نوشته می‌شود و اگر نقطه‌ی M روی پاره‌خط BC نباشد، معادله‌ی ۷ به صورت ۹ نوشته می‌شود.

$$(x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = -k\overline{MB}.\overline{MC} = -k(x^2 - r^2)$$
(۸)

$$(9)\quad (x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = k\overline{MB}.\overline{MC} = k(x^2 - r^2)$$

معادله‌ی ۸ دارای دو جواب است. معادله‌ی ۹ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1-k)x^2 - (2r\cos\alpha)x + (1+k)r^2 = 0$$

در معادله‌ی درجه دوم بالا، پارامتر k را به سوی یک میل می‌دهیم؛ یعنی ضریب x^2 را به سوی صفر میل می‌دهیم. هنگامی که k به سوی یک میل می‌کند، یک جواب معادله که آن را x_1 می‌نامیم، به سوی $-\frac{c}{b} = \frac{r}{\cos\alpha}$ میل می‌کند. $\frac{r}{\cos\alpha}$ طول نقطه‌ی P است و جواب دیگر مسئله که آن را x_2 می‌نامیم، به سوی بی‌نهایت میل می‌کند:

$$x_2 = \frac{c}{a}.\frac{1}{x_1} = \frac{(1+k)r^2}{1-k}.\frac{\cos\alpha}{r}$$

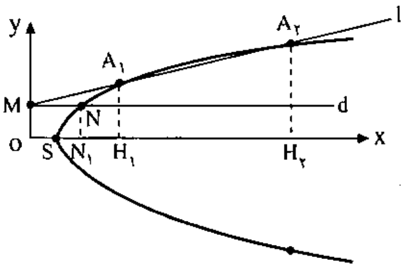
$$\lim_{k\to 1} x_2 = \infty$$

***

توضیح بیشتر درباره‌ی معادله‌ی درجه دومی که ضریب جمله‌ی درجه دوم آن به سوی صفر میل می‌کند

در بعضی مسائل هندسی که معادله‌ی درجه دوم به کار می‌آید، ممکن است ضریب جمله‌ی درجه دوم به سوی صفر میل کند. در سطرهای آینده دو مثال می‌آوریم:

مثال۱. سهمی p به معادله‌ی $y = \sqrt{x-1}$ را در نظر می‌گیریم. از نقطه‌ی $M(0,1)$، خط l به معادله‌ی $y = mx + 1$ را رسم می‌کنیم. طول‌های نقطه‌های برخورد خط l و سهمی p را حساب کنید.



شکل۳

مختصات نقاط تقاطع خط l و سهمی β، جواب‌های دستگاه معادلات زیرند.

$$\begin{cases} y=\sqrt{x-1} \\ y=mx+1 \end{cases}$$

طول‌های نقاط برخورد l و p جواب‌های معادله‌ی زیرند.

$$m^2x^2+(2m-1)x+2=0 \qquad (10)$$

نقطه‌های برخورد خط l و p را A_1 و A_2 می‌نامیم. از نقطه‌ی $M(1,0)$، خطی موازی خط ox رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن را با سهمی p، با N نشان می‌دهیم. تصویرهای سه نقطه‌ی A_1، A_2 و N را روی محور ox به ترتیب H_1 و H_2، و N_1 می‌نامیم. جواب‌های معادله‌ی ۱۰ که آن‌ها را x_1 و x_2 می‌نامیم، طول‌های دو نقطه‌ی H_1 و H_2 است.

وقتی در معادله‌ی ۱۰، پارامتر m به سوی صفر میل می‌کند، خط l دور نقطه‌ی A می‌چرخد و به طرف خط d میل می‌کند. در ضمن، نقطه‌ی A_1 روی سهمی حرکت و به سوی نقطه‌ی N میل می‌کند و نقطه‌ی A_2 روی سهمی p حرکت و به سوی بی‌نهایت می‌رود. با حرکت خط l، نقطه‌ی H_1 به سوی نقطه‌ی N می‌رود و نقطه‌ی H_2 به سوی بی‌نهایت.

در معادله‌ی ۱۰، وقتی m به سوی صفر میل می‌کند، جواب x_1 به سوی $-\frac{c}{b}$ میل می‌کند (بنابر حکم ۴).

$$\lim_{m\to 0}\frac{-c}{b}=\lim_{m\to 0}\frac{-2}{2m-1}=2$$

عدد «۲»، طول نقطه‌ی N است. در معادله‌ی درجه دوم ۱۰، وقتی m به سوی صفر میل می‌کند، جواب x_2 (یعنی طول نقطه‌ی A_2)، به سوی بی‌نهایت می‌رود:

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{2}{m^2}$$

$$x_2=\frac{c}{a}\times\frac{1}{x_1}$$

$$\lim_{m\to 0}x_2=\lim_{m\to 0}\frac{2}{m^2}\times\lim_{m\to 0}\frac{1}{x_1}=\infty$$

* * *

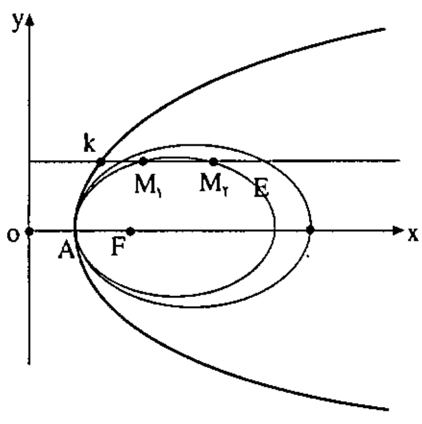
مثال هندسی که هم‌اکنون یاد کردیم، به درک حکم جبری ۴ کمک می‌کند و برعکس.

مثال۲. قضیه‌ی هندسی جالبی که در سطرهای زیر یاد می‌شود، به درک حکم جبری ۴ کمک می‌کند و برعکس.

قضیه: سهمی شکل حدی بیضی متغیری است که یک رأس و کانون مجاور آن ثابت بماند، در حالی که محور بزرگ آن بی‌نهایت افزایش یابد.

مسئله: بیضی متغیر E که کانون F و رأس A ی آن ثابت است و محور بزرگ آن بی‌نهایت افزایش می‌یابد و نیز سهمی p را که دارای همان کانون F در رأس A است، درنظر می‌گیریم.

خط $y=m$، بیضی E را در نقاط M_1 و M_2 و سهمی p را در نقطه‌ی K قطع می‌کند.



شکل۴

معادله‌ای که طول نقاط M_1 و M_2 را به‌دست می‌دهد، از درجه‌ی دوم است. هنگامی که طول محور بزرگ بیضی E افزایش می‌یابد، نقطه‌ی M_1 به سوی نقطه‌ی K و نقطه‌ی M_2 به سوی بی‌نهایت می‌رود.

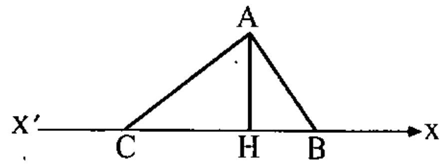
توجه: لازم است حکم جبری ۴ و دو مثال ۱ و ۲ یاد شده در بالا، با هم مطالعه شوند تا درک شود، دلیل این که در بعضی مسائل هندسی، معادله‌ی موردنظر به جای آن‌که درجه دوم شود، درجه اول می‌شود، چیست.

* * *

تبصره: قضیه‌ی ۲ نه‌تنها تعمیم قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه است، بلکه به ما می‌آموزد که قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه و قضیه‌ی مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه یکسان‌اند. در سطرهای آینده، در این مورد توضیح می‌دهیم:

۱. قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه: در مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل‌ضرب دو قطعه‌ای که ارتفاع روی وتر پدید می‌آورد.

$\overline{AH}^2 = HB.HC$



شکل۵

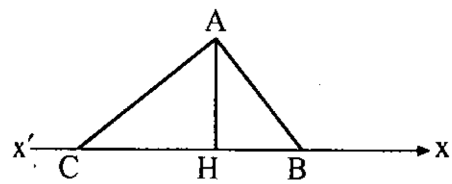
II. **قضیه ضلع مجاور به زاویه قائمه**: در مثلث قائم‌الزاویه، مربع ضلع مجاور به زاویه قائمه مساوی است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر.

$\overline{AB}^2 = BC.BH$

$\overline{AC}^2 = BC.CH$

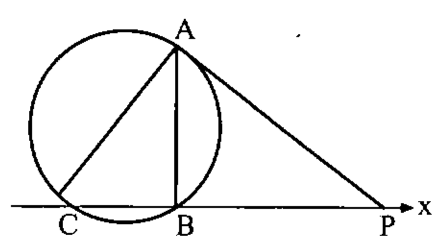
اثبات یکسانی دو قضیه‌ی I و II

I′. مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را که در آن A رأس زاویه‌ی قائمه است، درنظر می‌گیریم. محور X′X را منطبق بر وتر BC اختیار می‌کنیم. در قضیه‌ی ۲ ثابت کردیم، بر پاره‌خط BC نقطه‌ای چون H وجود دارد؛ به طوری که $\overline{HA}^2 = HB.HC$ (H پای ارتفاع است).



شکل۶

II′. مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را که در آن BC وتر است، درنظر می‌گیریم و محور X′X را بر یکی از اضلاع پهلوی زاویه‌ی قائمه اختیار می‌کنیم. در قضیه‌ی ۲ ثابت کردیم که روی محور X′X و خارج از پاره‌خط BC، نقطه‌ای چون P وجود دارد؛ به طوری که: $\overline{PA}^2 = PB.PC$.



شکل۷

افزون بر این ثابت کردیم، خط PA بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC مماس است. می‌گوییم، چون AC قطر دایره است، پس خط PA بر خط AC عمود است. بنابراین، زاویه‌ی A قائمه است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی PAC، پاره‌خط PA ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه است و پاره‌خط PC وتر است. رابطه‌ی $\overline{PA}^2 = PB.PC$ بیان می‌کند، مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه، برابر حاصل‌ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر است.

مختصر این که، وقتی قضیه‌ی ۲ را در مثلث قائم‌الزاویه به‌کار می‌بریم، اگر محور X′X روی وتر اختیار شود، قضیه‌ی مربع ارتفاع به‌دست می‌آید و اگر محور X′X را روی ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه اختیار کنیم، قضیه‌ی مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه حاصل می‌شود. پس قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه و قضیه‌ی مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث قائم‌الزاویه، همان قضیه‌ی ۲ در مورد مثلث قائم‌الزاویه است.

مسئله‌ای برای سرگرمی

مسئله‌ای درباره‌ی قضیه‌ی ۲ مطرح می‌کنیم: مثلث ABC داده شده است. بر خط BC، نقطه‌ی M را چنان انتخاب کنید که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$\overline{MA}^2 = MB \times MC$

روی خط BC و خارج از پاره‌خط BC، همواره یک نقطه در فاصله‌ی متناهی وجود دارد که در رابطه‌ی یادشده صدق می‌کند. اما روی پاره‌خط BC ممکن است دو نقطه‌ی متمایز یا یک نقطه‌ی مضاعف وجود داشته باشد که در رابطه‌ی یاد شده صدق کند. ثابت کنید شرط وجود جواب چنین است:

$\overline{AD}^2 \le \frac{1}{2} AB \times AC$

نقطه‌ی D پای نیم‌ساز زاویه‌ی داخلی A است. نامساوی در مورد دو جواب متمایز و تساوی در مورد جواب مضاعف است.