تصاعد هندسی

● احمد قندهاری

تصاعدهندسی دنباله‌ای است که هر جمله آن از جمله اول به‌بعد برابراست با جمله قبل ضرب در عددثابتی. این عدد ثابت را قدر نسبت گوییم و با حرف (q) نشان می‌دهیم.

مثال: $q = ۲$ $\quad :: ۳,۶,۱۲,۲۴,۴۸,\ldots$

درحالت کلی، دنبالهٔ تصاعد هندسی را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$:: a_1 : a_1q : a_1q^2 : a_1q^3 : \ldots \quad a_1q^{n-1}$$

حال دنباله تصاعد عددی را که درشمارهٔ قبل گفته شد می‌نویسیم:

$$\div a_1 , (a_1+d) , (a_1+2d) , (a_1+3d) , \ldots , a_1+(n-1)d$$

اگر به دو دنبالهٔ فوق دقت کنیم ملاحظه می‌کنیم که:

الف: علامت $+$ در تصاعد عددی به صورت $\times$ در تصاعد هندسی ظاهر می‌شود.

ب: ضریب قدرنسبت در تصاعد عددی به صورت توان قدرنسبت در تصاعد هندسی تبدیل‌شده است.

حال به دو رابطه زیر دقت کنید:

در تصاعد عددی: $a_2 - a_1 = d$

در تصاعد هندسی: $\frac{a_2}{a_1} = q$

ج: بنابراین می‌توان گفت که علامت $-$ در تصاعدعددی به علامت $\div$ در تصاعد هندسی تبدیل می‌شود.

خلاصه، گفتار فوق چنین است:

تصاعد هندسی		تصاعد عددی
$\times$	$\longrightarrow$	$+$
توان	$\longrightarrow$	ضریب
تقسیم	$\longrightarrow$	$-$

با توجه به تغییرات گفته شده خواهیم داشت:

مقایسه ۱

هرگاه x،y،z سه جمله متوالی یك تصاعد هندسی باشند داریم:

در تصاعد عددی داشتیم: $2y = x + z$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{y^2 = x \cdot z}$

مقایسه ۲

$\Longrightarrow$ در تصاعد عددی داشتیم: $a_m - a_n = (m-n)d$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}}$

مثال: دریك تصاعد هندسی $a_5 = 4a_1$، قدرنسبت این تصاعد چند است؟

$$\frac{a_5}{a_1}=q^4 \Rightarrow \frac{4a_1}{a_1}=q^4 \Rightarrow q^4=4 \Rightarrow q^2=2$$

$$\Rightarrow q=\pm\sqrt{2}$$

مقایسه ۳ (جمله عمومی یا جمله (n) ام)

در تصاعد عددی داشتیم: $\Rightarrow$ $a_n=a_1+(n-1)d$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{a_n=a_1q^{n-1}}$

مثال در تصاعد $\sqrt{2}$ و ۲ ... ، جمله نهم چیست؟

$$q=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_n=a_1q^{n-1} \Rightarrow a_9=a_1q^8=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8=$$

$$2\left(\frac{2^4}{2^8}\right)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

مقایسه ۴ (قاعدهٔ اول اندیسها)

در تصاعد عددی داشتیم: $\Rightarrow$ $2a_{10}=a_7+a_{13}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $(a_{10})^2=a_7\cdot a_{13}$

$$2\times 10=7+13$$

و در حالت کلی:

در تصاعد عددی داشتیم: $\Rightarrow$ $2a_n=a_{n-p}+a_{n+p}$

$\boxed{(a_n)^2=a_{n-p}\cdot a_{n+p}}$ $\quad n,p\in N,p<n$

$$2n=(n-p)+(n+p)$$

مثال: در یك تصاعد هندسی حاصل ضرب دو جمله هفتم وهفدهم ($4\sqrt{2}$) است، جمله دوازدهم و قدرنسبت را بیابید.

حل: $(a_{12})^2=a_7\cdot a_{17} \Rightarrow (a_{12})^2=4\sqrt{2}$

$$\Rightarrow a_{12}=\pm 2\sqrt[4]{2}$$

$$\frac{a_{12}}{a_7}=q^5 \Rightarrow q^5=\frac{\pm 2\sqrt[4]{2}}{4\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{8}}=\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{64}} \Rightarrow$$

$$q^5=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{32}}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2^5}} \Rightarrow q=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

مقایسه ۵ (قاعدهٔ دوم اندیسها)

در تصاعد عددی داشتیم: $\Rightarrow$ $a_4+a_{12}=a_3+a_{13}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$a_4\cdot a_{12}=a_3\cdot a_{13}$$

$$4+12=3+13$$

در حالت کلی خواهیم داشت:

در تصاعد عددی داشتیم: $\Rightarrow$ $a_m+a_n=a_p+a_k$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_k}$

با شرط $m+n=p+k$

مثال حاصل‌ضرب دو جمله پنجم و بیست و پنجم در یك تصاعدهندسی ($4\sqrt[4]{2}$) است اگر جمله‌هفدهم ($2\sqrt[8]{2}$) باشد جمله سیزدهم این تصاعد چند است؟

$$a_{13}\cdot a_{17}=a_5\cdot a_{25} \Rightarrow 2\sqrt[8]{2}\,a_{13}=4\sqrt[4]{2}$$

$$\Rightarrow a_{13}=\frac{4\sqrt[4]{2}}{2\sqrt[8]{2}}=\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2}}=\frac{\sqrt[4]{2^5}}{\sqrt[8]{2}}=\frac{\sqrt[8]{2^{10}}}{\sqrt[8]{2}}=\sqrt[8]{2^9}$$

$$\Rightarrow a_{13}=2\sqrt[8]{2}$$

مقایسه ۶ (حاصل‌ضرب n جمله اول یک تصاعد هندسی)

⟸ در تصاعد عددی داشتیم: $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{P_n=(a_1\cdot a_n)^{\frac{n}{2}}}$

اگر به جای a_n مساویش a_1q^{n-1} را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\boxed{P_n=(a_1^2q^{n-1})^{\frac{n}{2}}}$$

مثال: در تصاعد $\div\div\ 2 : \sqrt{2}$ ، حاصل‌ضرب هشت جمله اول را بیابید.

$$\begin{cases} q=\sqrt{2} \\ p_n=(a_1^2q^{n-1})^{\frac{n}{2}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$p_8=(a_1^2q^7)^4=[2(\sqrt{2})^7]^4=(2\times 2^3\sqrt{2})^4 \Longrightarrow$$

$$p_8=(2^4\sqrt{2})^4=2^{16}\times 2^2=2^{18}$$

مقایسه ۷

در هر تصاعد هندسی داریم:

⟸ در تصاعد عددی داشتیم: $a_{10}=S_{10}-S_9$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{10}=S_{10}-S_9 \\ a_{10}=\frac{p_{10}}{p_9} \end{cases}$$

در حالت کلی خواهیم داشت:

در تصاعد عددی داشتیم: $a_n=S_n-S_{n-1}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} a_n=S_n-S_{n-1} \\ a_n=\frac{p_n}{p_{n-1}} \end{cases}}$$

مثال: در یک تصاعد هندسی داریم: حاصل ضرب هشت جمله اول بیست برابر حاصل‌ضرب هفت جمله اول است، جمله هشتم این تصاعد چند است؟

$$p_8=20p_7 \Longrightarrow a_8=\frac{p_8}{p_7}=\frac{20p_7}{p_7}$$

$$\Longrightarrow a_8=20$$

مقایسه ۸

اگر در یک تصاعد هندسی تعداد جملات فرد و جمله وسط k باشد داریم:

⟸ در تصاعد عددی داشتیم: $2k=a_1+a_n$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$\boxed{k^2=a_1\cdot a_n}$$

مقایسه ۹

اگر در یک تصاعد هندسی تعداد جملات فرد و جمله وسط k باشد داریم:

⟸ در تصاعد عددی داشتیم: $S_n=n\cdot k$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{p_n=k^n}$

مثال: در یک تصاعد هندسی جمله چهارم $2\sqrt{2}$ است حاصل‌ضرب هفت جمله اول آن چند است؟

حل: $p_n=k^n \Longrightarrow p_7=k^7$

$$\Longrightarrow p_7=(2\sqrt{2})^7=2^7\times\sqrt{2}^7=2^7\times 2^3\times\sqrt{2}$$

$$=2^{10}\sqrt{2}$$

مقایسه ۱۰

اگـر بین دو عـدد ، $b \underbrace{\ldots\ldots}_{n} , a$ ، n واسطه‌هندسی درج کنیم، قدرنسبت از رابطه زیر به‌دست‌می‌آید:

درتصاعد عددی داشتیم: $d=\dfrac{b-a}{n+۱}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت :

$$\Longrightarrow \boxed{q=\sqrt[n+۱]{\dfrac{b}{q}}}$$

زیرا در تصاعد عددی :

$$d=\frac{۱}{n+۱}(b-a)$$

که در تصاعد هندسی به صورت $q=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{۱}{n+۱}}$ خواهد شد.

توجه: اگر $(n+۱)$ زوج باشد باید نوشت :

$$\frac{b}{a}>۰ \quad \boxed{q=\pm\sqrt[n+۱]{\dfrac{b}{a}}}$$

مثال: بین دوعدد ۳۲ ... , ۲ ، هفت واسطه‌هندسی درج کردیم، قدرنسبت را بیابید.

حل : $q=\pm\sqrt[n+۱]{\dfrac{b}{a}}=\pm\sqrt[۸]{\dfrac{۳۲}{۲}}=\pm\sqrt[۸]{۱۶}$

$$=\pm\sqrt[۸]{۲^۴}=\pm\sqrt{۲}$$

مقایسه ۱۱

حاصل‌ضرب n واسطه

اگر بین دوعدد $b \ldots , a$ ، n واسطه‌هندسی درج کنیم، داریم:

در تصاعد عددی داشتیم: $S_{\text{واسطه‌ها}}=\dfrac{n}{۲}(a+b)$

$$\Longrightarrow \boxed{P_{\text{واسطه‌ها}}=(ab)^{\frac{n}{۲}}}$$

مثال : بین دوعدد $\sqrt[۴]{۸}$ و $\sqrt[۴]{۲}$ ، هشت واسطه هندسی درج کردیم، حاصل‌ضرب این (۸) واسطه‌چند است؟

حل :

$$P_{\text{واسطه‌ها}}=(ab)^{\frac{n}{۲}} \Longrightarrow P_۸=(\sqrt[۴]{۲}\cdot\sqrt[۴]{۸})^{\frac{۸}{۲}}=$$

$$(\sqrt[۴]{۱۶})^۴=۲^۴$$

مقایسه ۱۲

S_n ، مجموع n جمله اول یك تصاعد هندسی متناهی .

اگر $a_۱$ جمله‌اول و q قدرنسبت یك تصاعدهندسی‌متناهی باشد داریم:

$$\div\, a_۱ : a_۱q : a_۱q^۲ : a_۱q^۳ : \cdots : a_۱q^{n-۱}$$

پس مجموع n جمله‌اول این‌تصاعد هندسی متناهی چنین است:

رابطه (I)

$$S_n=a_۱+a_۱q+a_۱q^۲+\cdots+a_۱q^{n-۱}$$

اگر طرفین رابطه (I) را در q ضرب‌کنیم خواهیم داشت:

رابطه (II)

$$q\cdot S_n=a_۱q+a_۱q^۲+a_۱q^۳+\cdots+a_۱q^n$$

حال اگر رابطه (I) را از رابطه (II) کم‌کنیم خواهیم‌داشت:

$$qS_n-S_n=a_۱q^n-a_۱ \Longrightarrow$$

$$S_n(q-۱)=a_۱(q^n-۱) \Longrightarrow$$

$$q\neq ۱$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}}$$

اگر به جای a_1q^{n-1} ، a_n را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1} = \frac{q(a_1q^{n-1})-a_1}{q-1} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{q\cdot a_n - a_1}{q-1} = S_n}$$

توضیح: اگر $q=0$ تصاعد به صورت

$a_1, 0, 0, 0, \cdots, 0$

درمی‌آید که $S_n = a_1$ و اگر $q=1$ تصاعدبه‌صورت

$a_1, a_1, \cdots, a_1$

درمی‌آید که $S_n = na_1$

مثال : درتصاعـد هندسی ، ÷÷ ۴ : ۸ ، مجموع (۱۰) جمله‌اول چقدر است؟

حل : $q = \frac{8}{4} = 2$

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{4(2^{10}-1)}{2-1} =$$

$$4(2^{10}-1) = 2^{12}-4$$

مقایسه۱۳

حد مجموع جملات یك تصاعد هندسی نزولی‌نامتناهی.

تصاعد هندسی ÷÷ ۴ : ۱ : $\frac{1}{4}$: . . . را درنظرمی‌گیریم.

ملاحظه می‌کنیم که $q = \frac{1}{4}$ ، و

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{4\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{4}-1}$$

چون‌تصاعد باجملات نامتناهی‌است پس $n\to+\infty$. در نتیجه

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$$

پس :

حد $S = \frac{4(0-1)}{-\frac{3}{4}} = \frac{-4}{-\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}$

در حالت کلی می‌توان گفت اگر در یك تصاعـد هندسی نزولی نامتناهی $|q|<1$ ، آنگاه :

$$\lim_{n\to+\infty} (q)^n = 0$$

پس فرمول S_n به فرمول حد مجموع زیر تبدیل می‌شود:

$$n\to+\infty \Longrightarrow q^n\to 0 \Longrightarrow$$

حد $S = \frac{a_1(0-1)}{1-q} \Longrightarrow$ $\boxed{\text{حد } S = \frac{a_1}{1-q}}$

توجه : اگر درتصاعد موردبحث شماره (۱۳)، $q=\frac{1}{2}$

آنگاه $\boxed{\text{حد } S = 2a_1}$

مثال : حدمجموع تصاعدهندسی ÷÷ $\sqrt{48}$: $2\sqrt{3}$:... را بیابید .

حل : $q = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{48}} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$

حد $S = 2a_1 = 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$

مسأله ۱ - در یک تصاعد هندسی نزولی نامتناهی، جمله اول(۱۰۰) است و هر جمله برابر است با ده برابر حد مجموع کلیه جملات بعداز خودش. حد مجموع کلیه جملات این تصاعد چند است؟

حل : $\because 100 : \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{k}$

اگر به جز جمله اول، حد مجموع کلیه جملات را (k) بنامیم، بنا به فرض مسأله $100 = 10k$ پس: $k = 10$

$\Rightarrow$ حد $S = 110$

مسأله ۲ - در یک تصاعد هندسی نزولی نامتناهی، حد مجموع جملات (۲۰) و جمله دوم این تصاعد (۵) است. جمله هفتم این تصاعد چند است؟

حل : صورت و مخرج کسر را در q ضرب می‌کنیم:

حد $S=\frac{a_1}{1-q}$

حد $S=\frac{a_1q}{(1-q)q} \Rightarrow \frac{20}{1}=\frac{5}{q-q^2} \Rightarrow$

$$\frac{4}{1}=\frac{1}{q-q^2} \Rightarrow 1=4q-4q^2 \Rightarrow$$

$$4q^2-4q+1=0 \Rightarrow (2q-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{q=\frac{1}{2}} \Rightarrow a_1=\frac{5}{q}=\frac{5}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1=10}$$

$$a_7=a_1q^6=10\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{10}{64}=\frac{5}{32} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_7=\frac{5}{32}}$$

مسأله ۳ - در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله اول (۱۱۲) و مجموع شش جمله اول (۱۲۶) است. قدر نسبت این تصاعد چند است؟

حل :

$$a_1+a_1q+a_1q^2=112$$

$$112+a_1q^3+a_1q^4+a_1q^5=126 \Rightarrow$$

$$112+q^3(a_1+a_1q+a_1q^2)=126 \Rightarrow$$

$$112+q^3(112)=126 \Rightarrow 112q^3=14 \Rightarrow$$

$$q^3=\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{q=\frac{1}{2}}$$

مسأله ۴ - اگر در مثلث ABC، $\hat{A}=90^\circ$ و اضلاع a و b و c تصاعد هندسی بسازند قدر نسبت این تصاعد را بیابید.

حل : $\because c : b : a$ قدر نسبت q

ضلع c را با $\frac{b}{q}$ وضلع a را با bq نشان داده‌ایم.

$$\because \frac{b}{q} : b : bq$$

مثلث قائم‌الزاویه است $\Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow$

طرفین تساوی را در $\frac{q^2}{b^2}$ ضرب می‌کنیم:

$$b^2q^2=b^2+\frac{b^2}{q^2} \Rightarrow q^4=q^2+1 \Rightarrow$$

$$q^4-q^2-1=0 \Rightarrow q^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

مسأله ۵ - ثابت کنید اگر اضلاع مثلثی تصاعد هندسی بسازند، سه ارتفاع آنها نیز تصاعد هندسی می‌سازند.

حل : اضلاع را a و b و c و ارتفاعات متناظر آنها را h_a

و h_b و h_c می‌نامیم .

بنا به فرض مسأله داریم :

$$∷\ c : b : a \qquad b^۲ = ac$$

$$۲S_{ABC} = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

$$۲S \times ۲S = ۲S \times ۲S$$

$$bh_b \times bh_b = a \cdot h_a \times ch_c$$

$$b^۲ h_b^۲ = ach_a h_c \implies \boxed{h_b^۲ = h_a h_c}$$

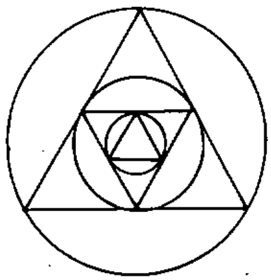
مسأله ۶ - مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مفروض است. اگر اوساط اضلاع را به‌هم وصل کنیم مثلث جدیدی به‌دست می‌آید و اگر این عمل را بی‌شمار دفعه ادامه دهیم، مطلوب است محاسبه:

الف: حد مجموع محیطهای مثلثها

ب: حد مجموع مساحتهای مثلثها

ج: حد مجموع مساحتهای دوایر محاطی این مثلثها

د: حد مجموع مساحتهای دوایر محیطی این مثلثها



حل الف : ضلع مثلث اولی a پس محیط آن ۳a است.

ضلع مثلث دومی $\frac{a}{۲}$ پس محیط آن $\frac{۳a}{۲}$ است.

$$\implies q = \frac{۱}{۲} \implies \text{حد}\ S = ۲a_۱ = ۲(۳a) \implies$$

$$\boxed{\text{حد}\ S = ۶a}$$

حل : ب: ضلع مثلث اولی a و مساحت آن $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است. ضلع مثلث دومی $\frac{a}{۲}$ و مساحت آن $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۶}$ است،

بنابراین

$$q = \frac{۱}{۴}$$

$$\text{حد}\ S = \frac{a_۱}{۱-q} = \frac{\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۳} \implies$$

$$\boxed{\text{حد}\ S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۳}}$$

حل ج :

$$\text{ضلعی منتظم محیطی}\ n\ \text{طول ضلع} = ۲R\,tg\,\frac{۱۸۰^\circ}{n} \implies$$

$$a = ۲R\,tg\,۶۰^\circ \implies a = ۲R\sqrt{۳} \implies R = \frac{a}{۲\sqrt{۳}}$$

$$\implies \underset{\text{دایره محاطی اولی}}{S} = \pi R^۲ = \frac{\pi a^۲}{۱۲} =$$

جمله اول تصاعد هندسی

$$a \xrightarrow{\text{تبدیل}} \frac{a}{۲} \implies \underset{\text{جدید}}{R'} = \frac{a}{۴\sqrt{۳}} \implies$$

$$\underset{\text{دایره محاطی دومی}}{S} = \pi R'^۲ = \frac{\pi a^۲}{۴۸} = \text{جمله دوم تصاعد هندسی}$$

$$\implies q = \frac{۱}{۴} \implies \text{حد}\ S = \frac{a_۱}{۱-q} = \frac{\frac{\pi a^۲}{۱۲}}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{\pi a^۲}{۱۲}}{\frac{۳}{۴}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{حد } S = \frac{\pi a^2}{9}}$$

حل د:

$$\text{طول ضلع } n \text{ ضلعی منتظم محاطی} = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \Longrightarrow$$

$$a = 2R\sin 60^\circ$$

$$a = 2R\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow a = R\sqrt{3} \Longrightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow \underset{\text{دایره محیطی اولی}}{S} = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{3} =$$

جمله اول تصاعد هندسی

$$a \xrightarrow{\text{تبدیل}} \frac{a}{2} \Longrightarrow \underset{\text{جدید}}{R'} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow \underset{\text{دایره محیطی دومی}}{S} = \pi R'^2 = \frac{\pi a^2}{12} =$$

جمله دوم تصاعد هندسی

$$\Longrightarrow q = \frac{1}{4} \Longrightarrow \text{حد } S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{\pi a^2}{3}}{1-\frac{1}{4}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\text{حد } S = \frac{4\pi a^2}{9}}$$

ادب و ریاضی

پیش از آنکه نگاهی به هندسه بیفکند، که به تصادف اتفاق افتاد، چهل ساله بود. مقدمات اقلیدس بود و در کتابخانهٔ آقایان، و در صفحهٔ باز آن قضیه‌ای، قضیه را خواند، و گفت: قسم به خدا (گهگاه سوگندان غلیظی به طریق تأکید بر زبان می‌آورد) که غیر ممکن است! و برهان آن را، که به قضیهٔ دیگری ارجاعش می‌داد، و آن را هم خواند، دید. قضیهٔ دوم به قضیهٔ دیگر رجوعش داد، آن را هم خواند...... تا سرانجام به برهان، حقیقتِ مطلب را پذیرفت، و به این ترتیب به محبت هندسه گرفتار شد.

«از سرگذشت هابز»