اصل شمول و عدم شمول

اگر تعداد اعضای A را با نماد $|A|$ و متمم مجموعه‌ی A را با $\overline{A}$ نمایش دهیم، در این صورت اصل شمول و عدم شمول برای دو و سه مجموعه به صورت زیر بیان می‌شود:

(اصل شمول برای دو مجموعه)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(اصل عدم شمول برای دو مجموعه)

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

توجه دارید که دو مجموعه‌ی A و B هر دو از مجموعه‌ی مرجع S تعریف شده‌اند.

(اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه)

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

مثال ۱. معین کنید چند عدد مانند n وجود دارد، به طوری که $1 \le n \le 3400$ و نیز n نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۷.

ترکیبیات

(آنالیز ترکیبی با ابزارهای شمارشی پیشرفته‌تر)

(قسمت دوم)

● حمیدرضا امیری

اشاره

در این مقاله سعی می‌کنیم، با استفاده از اصولی هم‌چون «اصل شمول و عدم شمول»، به حل بعضی از مسائل شمارشی بپردازیم و شما را با کاربردهای این اصل آشنا سازیم. هم‌چنین، با استفاده از قضیه‌ی تبدیل با تکرار، قضیه‌ای را اثبات کنیم و از آن قضیه در حل تعدادی دیگر از مسائل شمارشی و حتی یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی یک معادله‌ی سیاله‌ی خطی و چندمجهولی، بهره خواهیم برد.

$$A=\{1\le n\le 3400:\ 3|n\},\quad B=\{1\le n\le 3400:\ 7|n\}\Rightarrow \text{مجموعه‌ی مورد نظر}=(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$|A\cup B|=\left[\frac{3400}{3}\right]+\left[\frac{3400}{7}\right]-\left[\frac{3400}{[3,7]}\right]=1133+485-161=1457$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=3400-1457=1943$$

توجه: برای استفاده از اصل شمول و عدم شمول، همواره مجموعه‌هایی می‌سازیم که دقیقاً ضد خاصیت یا حالتی باشند که مورد نظر است.

مثال ۲. چند عدد طبیعی بین ۱۰۰ و ۲۵۰۰ وجود دارد که بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشند؟

پاسخ:

$$100\le n\le 2500$$

$$A=\{100\le n\le 2500:\ 4|n\},\quad B=\{100\le n\le 2500:\ 6|n\}\Rightarrow \text{مجموعه‌ی مورد نظر}=(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$|A\cup B|=\underbrace{\left[\frac{2401}{4}\right]+1}_{\text{چون ۱۰۰ بر ۴ بخش‌پذیر است.}}+\left[\frac{2401}{6}\right]-\left[\frac{2401}{12}\right]=601+400-200=801$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=2401-801=1600$$

تمرین: اگر n عددی طبیعی و $1\le n\le 2600$ باشد، در این صورت چه تعداد از این اعداد بر ۴، ۶ و ۷ بخش‌پذیر نیستند؟

مثال ۳. چه تعداد عدد سه رقمی وجود دارد که در هریک از آن‌ها، هریک از ارقام ۵ و ۶ حداقل یک بار وجود داشته باشد؟

$S=\{\overline{abc}\ |$ ارقام ۰ تا ۹ $c,b,a\}$

پاسخ:

$(\overline{A}\cup\overline{B})=$ مجموعه‌ی مورد نظر

$A=\{\overline{abc}|a,b,c\neq 5\},B=\{\overline{abc}|a,b,c\neq 6\}\Rightarrow$

$|S|=9\times10\times10=900$ و $|A|=8\times9\times9=648=|B|$

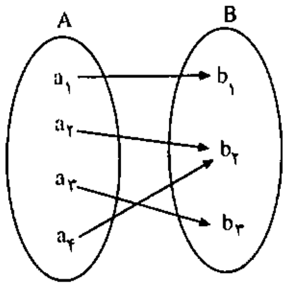
A مجموعه‌ی سه‌رقمی‌هایی است که فاقد ۵ هستند.

$(A\cap B)$ مجموعه‌ی سه‌رقمی‌هایی است که فاقد ۵ و ۶ هستند.

$$|A\cap B|=7\times8\times8=448$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=900-2\times648+448$$

مثال ۴. اگر $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ و $B=\{b_1,b_2,b_3\}$، در این صورت چند تابع پوشا از روی A (توابعی که روی همه‌ی اعضای A اثر کنند) به روی B می‌توان تعریف کرد؟



پاسخ:

$A_1=\{f:A\to B|$ f، b_1 را پوشش ندهد$\}$

$A_2=\{f:A\to B|$ f، b_2 را پوشش ندهد$\}$

$A_3=\{f:A\to B|$ f، b_3 را پوشش ندهد$\}$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$
$$=81-3\times2^4+3-0=36$$

$$|S|=3\times3\times3\times3=3^4=81$$

$|A_1|=2^4=|A_2|=|A_3|$

$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=1$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$

توجه: تابع $f:A\to B$ را «نگاشت» می‌نامیم هرگاه: $D_f=A$.

نکات مهم: اگر $|A|=m$ و $|B|=k$ در این صورت:

I) اگر $m<k$، هیچ نگاشت پوشا از A به B تعریف نمی‌شود.

II) اگر $m>k$، هیچ نگاشت یک به یک از A به B تعریف نمی‌شود.

III) تعداد کل نگاشت‌های از A به B برابر است با: $|B|^{|A|}=k^m$.

IV) اگر $m < k$ ، در این صورت تعداد نگاشت یک به یک از A به B برابر است با: $P(k,m)$ یا $(k)_m$.

V) اگر $m = k$ ، در این صورت تعداد نگاشت‌های یک به یک وَ درنتیجه پوشا برابر است با: $m!$ یا $k!$ (چون m با k برابر است).

VI) اگر $|B| = ۳$ و $|A| = m \ge ۴$ ، در این صورت تعداد نگاشت‌های پوشا از A به B برابر است با:

$$۳^m - ۳\times ۲^m + ۳\times ۱^m$$

مثال ۵. چند نگاشت پوشا از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی تعریف می‌شود؟

پاسخ:

$$۳^۵ - ۳\times ۲^۵ + ۳\times ۱^۵ = ۲۴۳ - ۹۶ + ۳ = ۱۵۰$$

قضیه:

اگر k نوع گل مفروض باشند و از هر نوع، به تعداد کافی وجود داشته باشد، در این صورت تعداد حالت‌هایی که می‌توان یک دسته گل شامل n شاخه گل انتخاب کرد، برابر است با:

$$\binom{n+k-۱}{k-۱}$$

اثبات: k نوع گل را با $k-۱$ خط عمودی می‌توان جدا کرد (شکل ۱) و اگر انتخاب هر شاخه گل از یک نوع گل را با یک ستاره مشخص کنیم، برای نمایش انتخاب n شاخه گل از بین این k نوع گل می‌باید از n ستاره استفاده کنیم. بنابراین تعداد ستاره‌ها و خط‌های عمودی برابر است با: $(n+k-۱)$. تعداد کل تبدیلات این اشیا نیز برابر است با: $[n+(k-۱)]!$. اما می‌دانیم، جابه‌جایی‌های n ستاره با یکدیگر و $k-۱$ خط عمودی با یکدیگر، حالت جدید یا دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند و طبق قضیه‌ی تبدیل با تکرار، باید تعداد کل تبدیلات را بر $n!\times(k-۱)!$ تقسیم کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{تعداد دسته گل‌های n شاخه‌ای از k نوع گل} = \frac{[n+(k-۱)]!}{n!\times(k-۱)!} = \binom{n+k-۱}{k-۱}$$

گل نوع kام	گل نوع (k − ۱) ام	...	گل نوع دوم	گل نوع اول
*	***	...	**	***
⋮				

(شکل ۱)

مثال ۶. به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، ۷ شاخه گل انتخاب کرد؟

پاسخ:

$$\text{تعداد انتخاب‌های ۷ شاخه گل} = \binom{۷+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$$

مثال ۷. به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۸ شاخه گل انتخاب کرد، به شرط آن‌که از هر نوع گل حداقل یک شاخه انتخاب شده باشد؟

پاسخ: ابتدا از هر نوع گل یک شاخه برمی‌داریم و سپس سه شاخه‌ی باقی را به دلخواه از بین ۵ نوع گل انتخاب می‌کنیم که این تعداد انتخاب برابر با $\binom{۷}{۴}$. در حالت کلی می‌توان از فرمول $\binom{n-۱}{k-۱}$ برای حل این نوع مسائل استفاده کرد:

$$\binom{n-۱}{k-۱} = \binom{۷}{۴}$$

مثال ۸. به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۹ شاخه گل انتخاب کرد، به شرط آن‌که از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع چهارم حداقل یک شاخه انتخاب شده باشد؟

پاسخ: ابتدا دو شاخه گل از نوع دوم و یک شاخه از نوع چهارم برمی‌داریم که در این صورت تعداد ۶=۳-۹ شاخه گل برای انتخاب از بین ۵ نوع گل باقی می‌ماند. چون این انتخاب دلخواه است، طبق قضیه برابر است با:

$$\binom{۱۰}{۵}.$$

قضیه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $(n \in N)x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.

اثبات: هر جواب صحیح و نامنفی برای معادله‌ی فوق در واقع یک روش انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل است، به شرط آن‌که x_i را تعداد انتخاب‌ها از گل نوع iام فرض کنیم، و برعکس؛ یعنی هر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل، جوابی برای معادله‌ی فوق است. قبلاً ثابت کردیم، تعداد این انتخاب‌ها یا تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی فوق برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

مثال ۹. معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ: راه اول:

$0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow$ ۳ جواب

$1 \quad 1 \quad 2 \rightarrow$ ۳ جواب

$0 \quad 2 \quad 2 \rightarrow$ ۳ جواب

$3 \quad 1 \quad 0 \rightarrow$ ۶ جواب

۱۵ جواب

راه دوم: $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2!} = 15$

مثال ۱۰. معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

پاسخ: x_i ها حداقل می‌توانند ۱ باشند، پس: $k = 4$ و $n = 7 - 4 = 3$. درواقع، این حالت با حالت انتخاب‌های n شاخه گل از بین k نوع گل، با شرط انتخاب حداقل یک شاخه از هر نوع گل معادل و برابر است با: $\binom{n-1}{k-1} = \binom{6}{3}$.

مثال ۱۱. معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$ با شرط $x_2 > 1$ و $x_4 \geq 1$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 - 2 - 1$$

توضیح جبری این جواب:

$x_2 \geq 2 \rightarrow x_2 - 2 \geq 0$ و $x_2 - 2 = y_2 \Rightarrow x_2 = y_2 + 2$

$x_4 \geq 1 \rightarrow x_4 - 1 \geq 0$ و $x_4 - 1 = y_4 \rightarrow x_4 = y_4 + 1$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$$
$$\rightarrow x_1 + y_2 + 2 + x_3 + y_4 + 1 + x_5 = 8$$
$$x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 = \underbrace{8 - 2 - 1}_{5} \Rightarrow$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $= \binom{9}{4}$

این مسئله نیز با حالتی که بخواهیم از بین ۵ نوع گل، ۸ شاخه انتخاب کنیم، با شرط آن‌که از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع چهارم حداقل ۱ شاخه انتخاب شده باشد، معادل است.

مثال ۱۲. معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ با شرط $0 \leq x_i \leq 2$ و $i = 1,2,3$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ:

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 3\}$$
$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 \geq 3\}$$
$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 \geq 3\}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 - 3 = 1 \rightarrow \binom{3}{2} = 3 \Rightarrow |A_1| = 3$$

مجموعه‌ی مورد نظر به صورت زیر است:

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = (\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$
$$\Rightarrow |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}|$$
$$= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 15 - 3 \times 3 = 6$$

$|S| = \binom{6}{2} = 15$ (کل جواب‌ها)

$$|A_1| = 3 = |A_2| = |A_3|$$
$$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = 0$$

(برای محاسبه‌ی $|A_1|$ می‌باید تعداد جواب‌های معادله را با شرط $x_1 \geq 3$ پیدا کنیم که برابر است با تعداد جواب‌های معادله‌ی $y_1 + x_2 + x_3 = 4 - 3$؛ یعنی: $\binom{3}{2}$).

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

نکته:

تعداد جملات بسط $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$؛ یعنی برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.

زیرا هر جمله‌ی بسط فوق شامل عبارت $(a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_k^{x_k})$ است که در آن باید: $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. تعداد جواب‌های معادله‌ی اخیر نیز همان تعداد جملات بسط است.

مثال ۱۳. تعداد جملات بسط $(a+b+c)^9$ را به دست آورید.

$$x + y + z = 9 \to \binom{11}{2} = 55$$

توجه: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت نامعادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_k < n$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n$ $(x_{k+1} > 0)$؛ یعنی برابر است با: $\binom{n-1}{k}$.

مثال ۱۴. تعداد جواب‌های صحیح و مثبت این نامعادله را بیابید.

$$x + y + z < 7$$

$$x + y + z < 7 \Leftrightarrow x + y + z + t = 7 \to \binom{6}{3}$$

نکته:

الف) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_k < n$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n$، با شرط $x_{k+1} \geq 1$، یعنی با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n-1$، یعنی: $\binom{n-1+k}{k}$، برابر است.

ب) در اعداد صحیح همواره می‌توان از نامساوی $a \leq b$ نامساوی $a < b+1$ را نتیجه گرفت. بنابراین، اگر نامعادله با رابطه‌ی کوچک‌تر یا مساوی $(\leq)$ مورد نظر باشد، ابتدا یک واحد به عدد n می‌افزاییم و سپس با توجه به دو نکته‌ی قبل، تعداد جواب‌های مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b+1$$
$$x + y + z \leq 7 \to x + y + z < 8$$

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

پارادوکس (متناقض‌نما)

آیا قبول دارید که پول توجیبی شما همیشه برابر است با پول توجیبی دوستتان!؟ اگر قبول ندارید این مطلب را بخوانید:

فرض کنید پول توجیبی شما A تومان و پول توجیبی دوستتان B تومان باشد. بنابراین میانگین پول شما و دوستتان برابر است با:

$$2C = A + B \quad \text{یا} \quad C = \frac{A+B}{2}$$

با ضرب (A-B) در رابطه قبل داریم:

$$(A-B)(A+B) = (A-B)2C$$
$$A^2 - B^2 = 2CA - 2CB$$
$$A^2 - 2CA = B^2 - 2CB$$

C^2 را به طرفین بیفزاییم:

$$A^2 - 2CA + C^2 = B^2 - 2CB + C^2$$
$$(A-C)^2 = (B-C)^2$$

پس:

$$(A-C) = (B-C)$$

حذف (C-) از طرفین:

$$A=B$$

ادب ریاضی

لابد میل دارید بدانید که «اراتوستن» چگونه برای اندازه‌گیری زمین اقدام کرد. استدلال او، این بود: با توجه به این که محیط دایره به ۳۶۰ درجه تقسیم می‌شود، اگر من بتوانم طول یک درجه‌ی آن را بر حسب استاد «stade» معین کنم (هر استاد تقریباً ۱۵۷٫۵ متر است)، برای تعیین محیط کره‌ی زمین کافی است که عدد حاصل را در ۳۶۰ ضرب کنم. در واقع، مطلب رجوع شده بود به این که طول کمان یک درجه را معین کنند.