ترکیبات ۱

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی)

میر شهرام صدر

در این سری مقاله‌ها ابتدا به یادآوری رابطهٔ روی مجموعهٔ شمارش‌پذیر و خواص مربوط به آنها خواهیم پرداخت و به دنبال راههایی ساده‌تر و جذّابتر برای بررسی خواصّ رابطه‌ها هستیم. به همین سبب، متناظر با هر رابطه یک گراف جهت‌دار و متناظر با آن یک ماتریس مجاورت را نسبت می‌دهیم و ترکیب رابطه‌ها را مطالعه می‌کنیم. سپس یکی از ابزارهای مهّم شمارش به نام «اصل شمول و عدم شمول» را معرفی کرده و کاربرد این اصل را در حلّ مسأله‌های ترکیبیات بررسی خواهیم کرد.

رابطه

دو مجموعهٔ $A=\{a,b\}$ و $B=\{c\}$ را درنظر بگیرید، اکنون $A\times B$ را به دست می‌آوریم:

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A,\, y\in B\}=\{(a,c),(b,c)\}$$

سپس همهٔ زیر مجموعه‌های $A\times B$ را می‌نویسیم؛ چون $A\times B$ ۲ عضو دارد، پس تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر $2^2=4$ است: $R_1=\varnothing$، $R_2=\{(a,c)\}$، $R_3=\{(b,c)\}$ و $R_4=\{(a,c),(b,c)\}$ بنابه تعریف، R_1، R_2، R_3، R_4 را رابطه‌هایی از مجموعه A به مجموعهٔ B گوییم.

تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند، هر یک از زیرمجموعه‌های $A\times B$ را یک رابطهٔ از A به B می‌گوییم. اگر R رابطه‌ای از A به B باشد و $(a,b)\in R$، آن‌گاه می‌گوییم a با b رابطه دارد و می‌نویسیم aRb.

نکته. اگر مجموعهٔ A دارای n عضو و مجموعهٔ B دارای m عضو باشد، آن گاه $A\times B$ دارای $m\times n$ عضو است و تعداد رابطه‌ها از A به B برابر با $2^{m\times n}$ است.

دامنهٔ یک رابطه

فرض کنیم R رابطه‌ای از A به B باشد. مجموعهٔ حاصل از مؤلّفه‌های اوّل زوجهای مرتّب رابطهٔ R را دامنه R می‌نامیم و آن را با D_R نمایش می‌دهیم؛ واضح است که $D_R\subset A$.

برد یک رابطه

فرض کنیم R رابطه‌ای از A به B باشد. مجموعهٔ حاصل از مؤلفه‌های دوم زوجهای مرتّب رابطهٔ R را برد R می‌نامیم و آن را با R_R نمایش می‌دهیم؛ واضح است که $R_R \subset B$.

مثال. مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۶\}$ را درنظر بگیرید. رابطهٔ $R = \{(x\,,y) \mid x^۲ \le y\}$ را روی مجموعه A مشخص کنید، سپس دامنه و برد رابطهٔ R را بیابید.

حل.

$$R = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۶),(۲,۶)\}$$

$$D_R = \{۱,۲\} \qquad ; \qquad R_R = \{۱,۲,۳,۶\}$$

تذکر. اگر A یک مجموعه باشد، هریک از زیر مجموعه‌های $A \times A$ را یک رابطه روی A می‌گوییم.

نکته. اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، آن‌گاه $A \times A$ دارای $n^۲$ عضو است و تعداد رابطه‌ها روی A برابر $۲^{n^۲}$ است.

خواص رابطه ها

۱ـ رابطهٔ انعکاسی یا بازتابی

فرض کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد. R خاصیت بازتابی دارد؛ اگر و تنها اگر برای هر عضو A، داشته باشیم $(a\,,a) \in R$ یا aRa . رابطهٔ R روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی ندارد؛ هرگاه $x \in A$ ای وجود داشته باشد؛ به طوری که $(x,x) \notin R$.

مثال. مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ را درنظر بگیرید، آیا رابطهٔ $R = \{(a,b) \mid a,b \in A, a \le b\}$ روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی دارد؟

حل. ابتدا رابطهٔ R را روی A مشخص می‌کنیم:

$$R = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۴)\}$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید، ۱R۱ ، ۲R۲ ، ۳R۳ و ۴R۴ ؛ یعنی هر یک از عضوهای A با خودش در رابطه است، پس R روی A دارای خاصیت بازتابی است.

نکته. مجموعهٔ $A = \{a_۱,a_۲,a_۳,\dots,a_n\}$ را در نظر بگیرید، رابطهٔ R روی A خاصیت بازتابی دارد؛ هرگاه داشته باشیم:

$$\{(a_۱,a_۱),(a_۲,a_۲),(a_۳,a_۳),\dots,(a_n,a_n)\} \subseteq R$$

مثال: مجموعهٔ $A = \{۲,۳,۴\}$ را درنظر بگیرید. آیا رابطهٔ $R = \{(x,y) \mid x,y \in A, x \mid y\}$ روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی دارد؟

حل. ابتدا رابطه Rرا روی A مشخص می‌کنیم:

$$R = \{(۲,۲),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۴)\}$$

چون $\{(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\} \subseteq R$ ، پس R روی A دارای خاصیت بازتابی است.

مثال. مجموعهٔ دو عضوی $A = \{a,b\}$ را در نظر بگیرید، تعداد رابطه‌های انعکاسی روی مجموعهٔ A را مشخص کنید؟

حل.

$$A \times A = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$

در صورتی که R یک رابطهٔ انعکاسی روی مجموعه A باشد، R باید شامل دو عضو (a,a) و (b,b) باشد. همچنین R می‌تواند بجز این دو عضو، شامل عضوهای (a,b) یا (b,a) باشد.

اکنون اگر همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B = \{(a,b),(b,a)\}$ را بنویسیم و به هریک از این زیرمجموعه‌ها، دو عضو (a,a) و (b,b) را اضافه کنیم، همهٔ رابطه‌های انعکاسی روی Aبه دست می‌آید، که تعداد رابطه‌های انعکاسی روی A برابر ۴ است:

$$\{(a,b)\} \subseteq B \qquad ; \quad R_۱ = \{(a,a),(b,b),(a,b)\}$$

$$\{(b,a)\} \subseteq B \qquad ; \quad R_۲ = \{(a,a),(b,b),(b,a)\}$$

$$\{(a,b),(b,a)\} \subseteq B \qquad ; \quad R_۳ = \{(a,a),(b,b),(a,b)(b,a)\}$$

$$\varnothing \subseteq B \qquad ; \quad R_۴ = \{(a,a),(b,b)\}$$

تعداد رابطه‌های بازتابی روی مجموعهٔ n عضوی A

در حالت کلی اگر $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ یک مجموعهٔ n عضوی باشد، می‌دانیم $A\times A$ دارای n^2 عضو است و تعداد عضوهای A^2 که به صورت (x_i,x_i) $\quad 1\le i\le n$ هستند، برابر n است ؛ بنابراین مجموعهٔ $B=\{(x_i,x_j)\mid i\neq j,\ 1\le i,j\le n\}$ وجود دارد که دارای n^2-n عضواست. اکنون اگر به هر یک از زیرمجموعه‌های B عضوهای مجموعهٔ $A=\{(a_1,a_1),(a_2,a_2),\dots,(a_n,a_n)\}$ را بیفزاییم، رابطه‌های انعکاسی روی A به دست می‌آید ؛ چون B دارای 2^{n^2-n} زیرمجموعه است، پس تعداد رابطه‌های انعکاسی (بازتابی) روی مجموعهٔ n عضوی A برابر 2^{n^2-n} است.

تست. روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ چند رابطهٔ بازتابی می‌توان تعریف کرد؟

۱) 2^{15} ۲) 2^{20}

۳) 2^{10} ۴) 2^{30}

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا تعداد اعضای A برابر ۵ است، پس تعداد رابطه‌های بازتابی روی A برابر است با :

$$2^{n^2-n}=2^{5^2-5}=2^{20}$$

۲ ـ رابطهٔ تقارنی

فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعه A باشد، R رابطهٔ تقارنی است، هرگاه برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم :

$$(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R \text{ یا } aRb\Rightarrow bRa$$

مثال. مجموعهٔ $A=\{-1,0,1\}$ را درنظر بگیرید، آیا رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x,y\in A,\ y=|x|\}$ روی A دارای خاصیت تقارنی است؟

حل. ابتدا رابطهٔ R را روی A مشخص می‌کنیم :

$$R=\{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$$

چون $(-1,1)\in R$ ، ولی $(1,-1)\notin R$ ؛ بنابراین R خاصیت تقارنی روی A ندارد.

مثال. مجموعهٔ سه عضوی $A=\{a,b,c\}$ را درنظر بگیرید، تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ A را مشخص کنید؟

حل.

$$A\times A=A^2=\left\{\begin{matrix}(a,a),(a,b),(a,c),(b,a)\\ ,(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\end{matrix}\right\}$$

مجموعهٔ $A_1=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ دارای ۳ عضو است ؛ بنابراین مجموعهٔ :

$$A_2=A^2-A_1=\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$$

دارای $3^2-3=6$ عضو است و مجموعهٔ A_2 دارای $\frac{1}{2}(3^2-3)=3$ زیرمجموعهٔ به صورتهای $A_3=\{(a,b),(b,a)\}$ ، $A_4=\{(a,c),(c,a)\}$ ، $A_5=\{(b,c),(c,b)\}$ است. برای نوشتن رابطهٔ متقارن R روی A ، می‌توانیم هریک از عضوهای A_1 را در R قرار دهیم یا ندهیم. همچنین می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_3 یا A_4 یا A_5 را در R قراردهیم یا ندهیم ؛ بنابراین طبق اصل ضرب تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ A برابر است با :

$$\text{تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعه } A=2^3\times2^{\frac{1}{2}(3^2-3)}=2^{\frac{1}{2}(3^2+3)}=2^6$$

تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ n عضوی

در حالت کلی، مجموعهٔ n عضوی $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $A\times A$ دارای n^2 عضو است و مجموعهٔ $A_1=\{(x_i,x_i)\mid 1\le i\le n\}$ دارای n عضو است. بنابراین مجموعهٔ $A_2=A^2-A_1=\{(x_i,x_j)\mid i\neq j,\ 1\le i,j\le n\}$ دارای n^2-n عضو است و مجموعهٔ A_2 دارای $\frac{1}{2}(n^2-n)$ ، زیرمجموعهٔ به صورت $A_{ij}=\{(x_i,x_j),(x_j,x_i)\}$ است. برای نوشتن رابطهٔ متقارن R روی مجموعهٔ A، می‌توانیم هریک از عضوهای A_1 را در R قرار دهیم یا ندهیم. همچنین می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را در R قرار دهیم یا ندهیم. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ A به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\text{تعداد رابطه‌های تقارنی روی یک مجموعهٔ } n \text{ عضوی}=2^n\times2^{\frac{1}{2}(n^2-n)}=2^{\frac{1}{2}(n^2+n)}$$

تست. روی مجموعهٔ $A=\{۲,۳,۵,۷,۸\}$ چند رابطهٔ متقارن می‌توان تعریف کرد؟

۱) $۲^{۱۷}$ ۲) $۲^{۱۰}$

۳) $۲^{۲۲}$ ۴) $۲^{۱۵}$

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا مجموعه A دارای ۵ عضو است، بنابراین:

$$۲^{\frac{۱}{۲}(n^۲+n)}=۲^{\frac{۱}{۲}(۵^۲+۵)}=۲^{۱۵}$$

تذکر. برای نوشتن رابطهٔ R که تقارنی و انعکاسی باشد، کافی است عضوهای مجموعهٔ $A_۱$ را در R قرار دهیم و می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را در R قرار دهیم یا ندهیم؛ بنابراین تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی مجموعهٔ n عضوی A برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{A_{ij} \mid i\neq j, i\leq i,j\leq n\}$ است، چون مجموعهٔ B دارای $\frac{۱}{۲}(n^۲-n)$ عضو است؛ بنابراین داریم:

$۲^{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)}=$ تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی یک مجموعهٔ n عضوی

۳ـ رابطهٔ تعدی یا تراگذاری

فرض کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد. R خاصیت تعدی دارد؛ هرگاه برای هر $c\in A$ و b و a داشته باشیم:

$$(a,b)\in R \text{ و } (b,c)\in R\Rightarrow (a,c)\in R$$

مثال. مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶\}$ را درنظر بگیرید. هریک از رابطه‌های زیر روی مجموعهٔ A رابطه‌های تعدی هستند:

$$R_۱=\{(۲,۲)\}\ ;\ R_۲=\{(۲,۴)\}\ ;R_۳=\{(۲,۴),(۴,۶),(۲,۶)\}$$
$$R_۴=\{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶)\}\ ;\ R_۵=\{(۲,۲),(۴,۴),(۲,۴)\}$$

امّا رابطه $R_۶=\{(۲,۴),(۴,۲),(۲,۲)\}$ روی A رابطهٔ تعدی نیست؛ زیرا:

$$(۴,۲)\in R \text{ و } (۲,۴)\in R\Rightarrow (۴,۴)\notin R$$

تذکر. فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعهٔ $A=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ باشد. رابطهٔ $R=\{(a_i,a_j)\}$ روی مجموعهٔ A یک رابطهٔ تعدی است؛ این مطلب را می‌توانیم به برهان خلف به صورت زیر ثابت کنیم: فرض کنیم رابطهٔ $R=\{(a_i,a_j)\}$ روی A تعدی نباشد (فرض خلف)، بنابراین باید در رابطهٔ R داشته باشیم $(a_i,a_j)\in R$ و $(a_j,a_k)\in R$، امّا $(a_i,a_k)\notin R$؛ چون (a_j,a_k) را نمی‌توان در R درنظر گرفت، بنابراین به تناقض رسیده‌ایم؛ پس فرض خلف باطل و R رابطهٔ تعدی است.

۴ـ رابطهٔ هم‌ارزی

رابطهٔ R روی مجموعهٔ A یک رابطهٔ هم‌ارزی است؛ هرگاه R سه خاصیت زیر را داشته باشد:

۱. رابطهٔ R انعکاسی یا بازتابی باشد؛ یعنی برای هر $a\in A$ داشته باشیم: $(a,a)\in R$.

۲. رابطهٔ R تقارنی باشد؛ یعنی برای $a,b\in A$ اگر $(a,b)\in R$، آن گاه $(b,a)\in R$.

۳. رابطهٔ R تعدی باشد؛ یعنی برای $c\in A$ و b و a، اگر $(a,b)\in R$ و $(b,c)\in R$، آن گاه $(a,c)\in R$.

نکته. تعداد رابطه‌های هم‌ارزی که می‌توانیم روی مجموعهٔ A تعریف کنیم، برابر با تعداد افرازهای A است.

مثال. روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ چند رابطهٔ هم‌ارزی می‌توان تعریف کرد؟

حل. تعداد رابطه‌های هم‌ارزی روی A برابر با تعداد افرازهای A است؛ بنابراین تمام افرازهای A را می‌نویسیم:

$$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}\ ,\ \{\{a,b\},\{c\}\}\ ,\ \{\{a,c\},\{b\}\}$$
$$\{\{b,c\},\{a\}\}\ ,\ \{\{a,b,c\}\}$$

بنابراین ۵ رابطهٔ هم‌ارزی می‌توان روی A تعریف کرد.

برای یافتن رابطهٔ هم‌ارزی که توسط افراز $\{\{a,c\},\{b\}\}$ روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به وجود می‌آید، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A_۱=\{a,c\}\times\{a,c\}=\{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c)\}$$
$$A_۲=\{b\}\times\{b\}=\{(b,b)\}$$
$$R=A_۱\cup A_۲=\{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c),(b,b)\}$$

۵ـ رابطهٔ پاد تقارنی

فرض کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد. R خاصیت پادتقارنی دارد؛ در صورتی که برای $a \neq b$ ، اگر $(a,b)\in R$ ، آن گاه $(b,a)\notin R$.

مثال. آیا رابطهٔ $R=\{(a,b)|$ a بر b بخش‌پذیر است $\}$ روی مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4\}$ یک رابطهٔ پادتقارنی است؟

حل. ابتدا رابطهٔ R را می‌نویسیم:

$$R=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید، برای هر دو عضو متمایز a و b از A، اگر aRb، آن گاه $b\not R a$.

مثال. آیا رابطهٔ $\varnothing$ روی مجموعهٔ ناتهی A یک رابطهٔ پادتقارنی است؟

حل) برهان خلف. فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی، اگر $\varnothing$ روی A پادتقارنی نباشد (فرض خلف) آن گاه باید در $\varnothing$ ، aRb و bRa که این غیرممکن است؛ بنابراین فرض خلف باطل و $\varnothing$ رابطهٔ پادتقارنی است.

مسأله. ثابت کنید تعداد رابطه‌های پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی A برابر $P_n=2^n\times 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ است.

حل. این مسأله را به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$n=1:\ P_1=2^1\times 3^0=2$$

به ازای $n=1$ رابطه درست است؛ زیرا روی مجموعهٔ یک عضوی $A=\{a_1\}$ دو رابطهٔ پادتقارنی $R_1=\{(a_1,a_1)\}$ و $R_2=\varnothing$ را می‌توان تعریف کرد.

$$n=k:\ P_k=2^k\times 3^{\frac{k(k-1)}{2}} \quad \text{فرض استقرا}$$
$$n=k+1:\ P_{k+1}=2^{k+1}\times 3^{\frac{(k+1)k}{2}} \quad \text{حکم استقرا}$$

مجموعهٔ $k+1$ عضوی $B=\{a_1,a_2,\ldots,a_i,a_k,a_{k+1}\}$ رادرنظر می‌گیریم، اگر a_i را از این مجموعه حذف کنیم، یک مجموعهٔ k عضوی مانند C به دست می‌آید که طبق فرض استقرا دارای $P_k=2^k\times 3^{\frac{k(k-1)}{2}}$ رابطهٔ پادتقارنی است، اکنون a_i را به مجموعهٔ C اضافه می‌کنیم، در این صورت ملاحظه خواهیم کرد که B^2 علاوه بر اعضای مجموعهٔ C^2 دارای اعضای مجموعه‌های زیر است:

$$D=\{(a_i,a_i)\}$$
$$A_j=\{(a_i,a_j),(a_j,a_i)\ |i\neq j\}\ ;\ (1\leq j\leq k+1)$$

در رابطه پادتقارنی R می‌توان عضو مجموعه D را قرار دهیم یا ندهیم؛ یعنی دو حالت وجود دارد. همچنین در رابطهٔ پادتقارنی R می‌توان (a_i,a_j) یا (a_j,a_i) یا هیچ کدام آنها را از A_j درنظر گرفت؛ یعنی سه حالت وجود دارد؛ چون K مجموعه به صورت A_j داریم، پس 3^k حالت وجود دارد؛ بنابراین داریم:

$$P_{k+1}=2^k\times 3^{\frac{k(k-1)}{2}}\times 2\times 3^k=2^{k+1}\times 3^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

تعداد رابطه‌های پادتقارنی مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی

تست. روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ چند رابطهٔ پادتقارن می‌توان تعریف کرد؟

۱) 2^{10} ۲) $2^4\times 3^6$
۳) $2^4\times 3^{10}$ ۴) 3^{10}

حل. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$n=4\ ;\ P_4=2^4\times 3^{\frac{4(4-1)}{2}}=2^4\times 3^6$$

نکته. تعداد رابطه‌های تقارنی و پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی A برابر 2^n است.

تذکر. تعداد رابطه‌هایی که خاصیت پادتقارنی و تقارنی دارند، با تعداد رابطه‌هایی که سه خاصیت پادتقارنی، تقارنی و بازتابی را دارند، برابر است.

نکته. تعداد رابطه‌های پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ که شامل (a_i,a_j) باشند، برابر با $2^n\times 3^{\frac{n(n-1)}{2}-1}$ است.

■