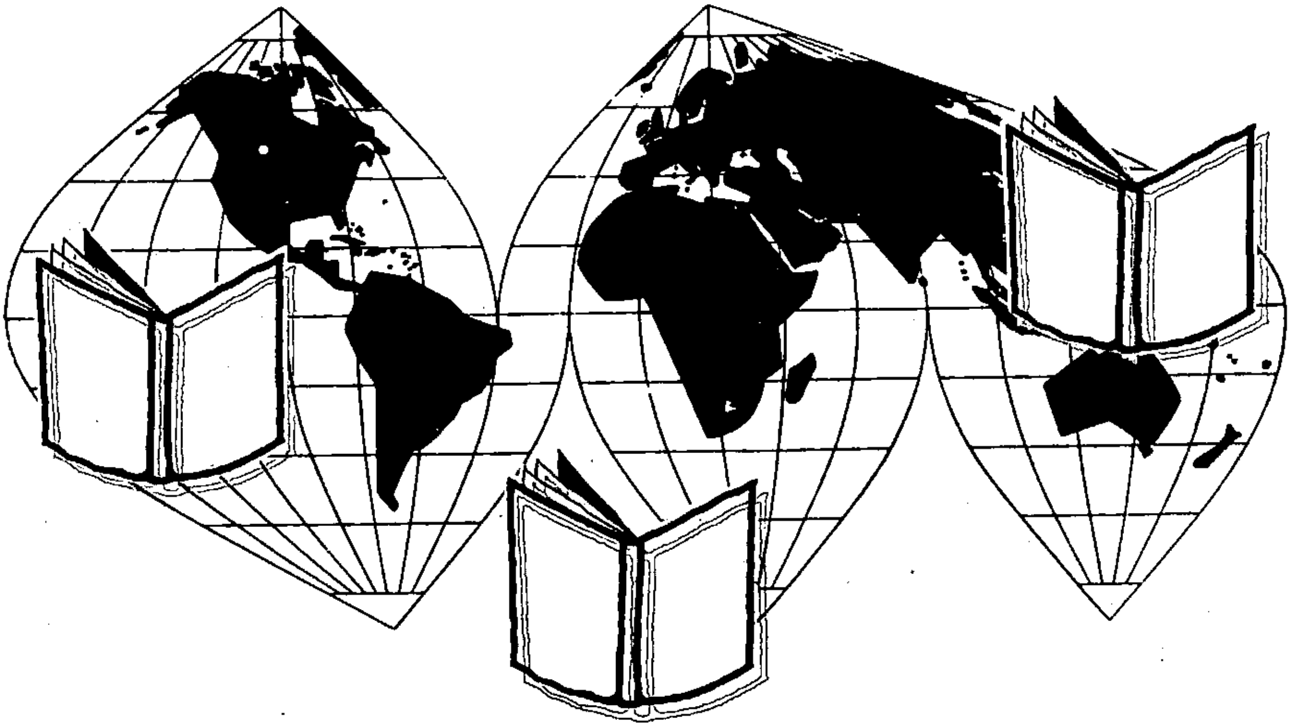


مقاله‌های کوتاه از مجلّه‌های ریاضی معتبر جهان (۲۴)

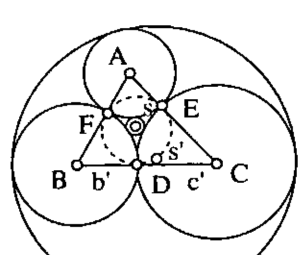
تحقیق در هندسه مثلث به کمک کامپیوتر

(قسمت دوم)

Adrion Oldknow
The mathematical gazette
Volume 79 Number 485 July 1995

● ترجمه: غلامرضا یاسی پور

با این سابقه، به بررسی بیشتر مسأله‌ای بپردازیم که توسط **فردریک سُدی** «Frederick Soddy»، شیمیدان برندهٔ جایزهٔ نوبل، به آن پرداخته شد و در ۱۹۳۶ به چاپ رسید. ممکن است در نظر اوّل آشکار نباشد؛ اما در مورد هر مثلث ABC مجموعهٔ یکتایی از سه دایره، به مراکز A، B و C موجود است که مماس برونی یکدیگرند. (سه مقطع مخروطی را به تصور آورید.) این دایره‌ها در نقطه‌های D، E و F واقع بر BC، CA و AB بر یکدیگر مماس برونیند که در آنها ID عمود بر BC و غیره است (شکل ۴).



شکل ۴

DEF را می‌توان *مثلث تماس* «Contact Triangle» مربوط به دایرهٔ محاطی O_I نامید و ABC *مثلث مماس* «Tangent Triangle» متناظر است. به این ترتیب، ID مماس مشترک دایره‌های O_B و O_C است.

فرض می‌کنیم a'، b' و c' شعاعهای سه‌تایی سُدی «Soddy Triplet» شامل دایره‌های O_A، O_B و O_C باشد. در این صورت $a = b'+c'$ و غیره، و پیرامون

$$2S = a+b+c = 2(a'+b'+c')$$

بنابراین $a' = S-a$ و غیره، در نتیجه:

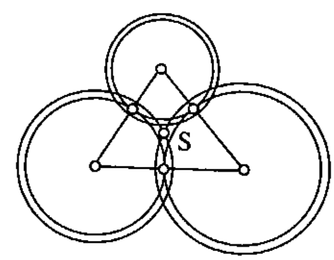
$$\Delta^2 = Sa'b'c' \quad \text{و} \quad S = a'+b'+c'$$

به این ترتیب، سه‌تایی سُدی به دایرهٔ کوچکی مماس می‌شود که در رخنه‌ای بین آنها قرار دارد. این دایره، *دایرهٔ درونی سُدی* «Inner Soddy Circle» O_S با شعاع t است.

سه‌تایی مزبور، توسط دایرهٔ بزرگی که مماس برونی آنهاست، احاطه می‌شود. این دایره، *دایرهٔ برونی سُدی* «Outer Soddy Circle» O_S با شعاع t' است. سُدی کشف مربوط به رابطهٔ بین شعاعهای

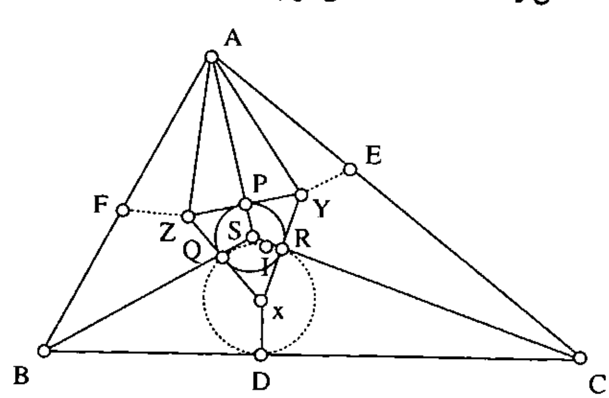
r، 'a، 'b، 'c، t و 't را در شعر [10] «The Kiss Precise» به چاپ رساند. نیاز به تذکر است که این مطلب، پیش از این، توسط **فیلیپ بی‌کرافت** «Philip Beecroft» در ۱۸۴۲، و **رنه دکارت** «René Descartes» در ۱۶۴۳ پیدا شده بود! در هرحال، ترسیم متعارف مراکز سُدی، یا S و 'S، کاری پرزحمت و شامل شماری از انعکاسهای دایره‌ها و خطوط در دایره‌های **آپولونیوس** است.

رهیافت ساده‌تر به مسألهٔ مشخص کردن جای S، یافتن مقدار t ای است که توسط آن باید 'a، 'b و 'c، شعاعهای سه‌تایی سُدی، برای گذار دادن آنها از نقطه‌ای منفرد، افزایش یابند (شکل ۵). این نقطه، نقطهٔ S و این مقدار t شعاع O_S خواهد بود.



شکل ۵

امتحان این روش با استفاده از شکلهای متعدد، برای موقع S، تقریبی به قدر کافی مناسب، برای زدن حدسهای زیر به‌دست می‌دهد. فرض می‌کنیم O_S به O_A در P مماس باشد و غیره، و مماسهای مشترک در Q، R در X تلاقی کنند ـ بنابراین، PQR مثلث تماس و XYZ مثلث مماس مربوط به O_S است (شکل ۶).



شکل ۶

حدسها

(الف) X بر ID واقع است و غیره.

(ب) YZ از A به زاویهٔ α دیده می شود که نصف زاویهٔ BAC است و غیره.

(ج) X خط ID را به نسبت

$$IX : XD = \tan\beta + \tan\gamma : 1 = aa' : D$$

تقسیم می کند و غیره.

اثباتها

(الف) دایره‌های O_S، O_B و O_C تشکیل یک سه‌تایی مماس‌شونده می‌دهند و بنابراین، مماسهای مشترکشان در نقاط تماس D، Q و R جمیعاً در X، مرکز دایرهٔ محاطی درونی SBC تلاقی می کنند. در نتیجه XD بر BC عمود است و X بر ID قرار دارد.

(ب) Y بر نیمساز $C\hat{A}S$، Z بر نیمساز $B\hat{A}S$ قرار دارد، در نتیجه $B\hat{A}Z = Z\hat{A}S$ و $S\hat{A}Y = Y\hat{A}C$.

$$B\hat{A}C = B\hat{A}Z + Z\hat{A}S + S\hat{A}Y + Y\hat{A}C$$
$$= 2(Z\hat{A}S + S\hat{A}Y) = 2Z\hat{A}Y = 2\alpha$$

و غیره.

(ج) فرض می کنیم r_A شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث SBC باشد، بنابراین:

$$IX : XD = r - r_A : r_A$$

اما $r = b\tan\beta$ و غیره، و محاسبه‌های مثلثاتی پیچیده رابطهٔ

$$r = r_A.(1 + \cos\alpha\sec\beta\sec\gamma)$$

و غیره را به دست می‌دهد. از این روابط، و $r = \Delta/S$، $\Delta^2 = Sa'b'c'$، نتیجه‌های مورد نظر به‌دست می‌آیند.

به این ترتیب، تولید ترسیم مستقیم نقطهٔ X، با استفاده از رسم خطی گذرنده از I به موازات BC و مشخص کردن طولهایی برابر $r\tan\beta$، $r\tan\gamma$ و $r.IX' = r\tan\gamma$،

$$IX'' = X'X''' = r\tan\beta\ ,\ X'''X'''' = ID = r$$

ممکن است، و بنابراین، XX'' موازی DX'''' است.

هنگامی که X پیدا شد، می‌توان Y و Z را به همان ترتیب، یا با دَوَران X حول B، به اندازهٔ β و حول C به اندازهٔ γ ترسیم کرد. در این صورت، S، به عنوان مرکز دایرهٔ محاطی درونی XYZ رسم می‌شود و P، Q و R تقاطعهای SA با YZ و غیره‌اند.

بعضی محاسبه‌های نمادین با *درایو* «Drive» رابطهٔ بسیار ظریف

$$r = t(۲ + \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma)$$

را ایجاد می‌کند که فرمول دکارت را برای t، شعاع دایرهٔ درونی سُدی، یعنی :

$$\frac{۱}{t} = \frac{۲}{r} + \frac{۱}{a'} + \frac{۱}{b'} + \frac{۱}{c'}$$

را به دست می‌دهد.

زمانی که نقاط X، Y، Z، S، P، Q و R در نرم‌افزار هندسی بدقت ترسیم شوند، تغییر دادن مقیاس بسادگی امکان‌پذیر است و جست‌وجوی مفصّلی را آغاز کنیم که ملاحظهٔ آن با ترسیمهای دقیق قراردادی عملی نیست. با استفاده از این روش، قادر به ارائهٔ حدس زیر در کنفرانس ایستر ۱۹۹۴ انجمن ریاضی شدم.

خطوط AX، BY و CZ در نقطهٔ Oای منطبقند که بر خط IS قرار دارد.

دو مثلث ABC و XYZ ی را که دارای این ویژگی هستند که خطوط واصل رأسهای متناظرشان از نقطهٔ Oای می‌گذرد دو مثلث در *پرسپکتیو با مرکز O* می‌گویند. این ملاحظهٔ به ظاهر بی‌اهمیت، در دورهٔ کوتاهی از زمان، به یک رشته از کشفیات مرتبط با هم می‌انجامد. این نتایج را تنها همراه با اطلاعاتی کافی مطرح خواهیم کرد تا خوانندهٔ علاقه‌مند، ترسیمها را خود انجام دهد و/ یا رابطه‌های جبری مورد بحث را خود تأیید کند.

نسبتهای

$$d = \Delta /aa' \ , \ e = \Delta /bb' \ , \ f = \Delta /cc'$$

در مطالبی که بعد از این می‌آیند، نقشی مهم دارند و ما آنها را *وزنهای رأسی* «Vertex Weights» A، B و C می‌نامیم.

محاسبه‌های مثلثاتی ساده انتخابهای سه ـ خطی «Trilinear» زیر را برای نقاط D، E، F، X، Y، Z، S و O برحسب مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، یعنی، I(۱,۱,۱) به‌دست می‌دهند :

$$D = (۰, e, f) \ , \ X(۱, ۱+۲e, ۱+۲f) = ۱+۲D \ ,$$
$$P = (۱+۲d \ , \ ۱+e \ , \ ۱+f)$$

و غیره.

$$S = (۱+d, ۱+e, ۱+f) \ , \ O = (۱+۲d, ۱+۲e, ۱+۲f)$$

می‌دانیم مثلثهای ABC به مرکز G، **نقطهٔ ژرگون** «Gergonne Point» در پرسپکتیوند. AD، BE و CF در نقطهٔ $G = (d, e, f)$ تقاطع می‌کنند.

خواننده می‌تواند چنین اظهاراتی را بسادگی، برای همخطی مثلاً ADG با قرار دادن در دترمینان (۳) آزمایش کند :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = ۰$$

اکنون، به همین ترتیب و بسادگی، می‌توان نشان داد که چهار نقطهٔ I، S، O و G همخطند.

در سه خطیهای دقیق، I دارای صورت r(۱,۱,۱) و G دارای صورت h(d, e, f) است که در آن :

$$\frac{۲}{h} = \frac{۱}{a'} + \frac{۱}{b'} + \frac{۱}{c'} \qquad (۷)$$

و بنابراین هر نقطهٔ K ی واقع بر خط IG، دارای صورت سه‌خطی دقیق

$$(۱-\lambda)r(۱,۱,۱) + \lambda h(d, e, f)$$

به ازای مقداری از پارامتر λ، و در نتیجه انتخاب :

$$K = (۱,۱,۱) + k(d, e, f) = ۱ + kG$$

به ازای مقداری از پارامتر تبدیل شدهٔ k است (که در آن، k به ازای نقطهٔ G، مقدار ∞ را اختیار می‌کند). در نتیجه :

$$S = I + G$$

و :

$$O = I + ۲G$$

و همخط بودن واضح است.