

تجزیه ی یک عبارت جبری، یعنی تبدیل آن عبارت به حاصل ضرب چند عامل نسبت به هم اول. این عمل به کمک فاکتورگیری و اتحادها صورت می گیرد. به مثال های زیر توجه فرمایید.

مثال ۱. عبارت $A = x^2 - 81y^2$ را تجزیه کنید.

حل: بنابر اتحاد مزدوج می توان نوشت:

$$A = x^2 - 81y^2 = (x^2)^1 - (9y^2)^2$$

$$A = \underbrace{(x^2 - 9y^2)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(x^2 + 9y^2) \Rightarrow A = (x - 3y)(x + 3y)(x^2 + 9y^2)$$

مثال ۲. عبارت $A = y^2 - x^2 - 4(y - 1)$ را تجزیه کنید.

$$A = y^2 - x^2 - 4y + 4 \Rightarrow \underbrace{y^2 - 4y + 4}_{\text{اتحاد مزدوج}} - x^2$$

$$A = \underbrace{(y - 2)^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} - x^2 = (y - 2 - x)(y - 2 + x)$$

مثال ۳. عبارت $A = m^2 + 4$ را تجزیه کنید.

حل: در اتحادها داریم: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$. پس:

$$A = (m^2)^1 + (2)^2 = (m^2 + 2)^2 - 4m^2$$

$$A = (m^2 + 2 - 2m)(m^2 + 2 + 2m)$$

مثال ۴. عبارت $A = y^2 + 7y + 10$ را تجزیه کنید.

حل:

با استفاده از اتحاد $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

برای تجزیه ی عبارت A ، دو عدد هم علامت می یابیم که مجموع آن ها ۷ و حاصل ضرب آن ها ۱۰ باشد. به سادگی می توان گفت که این دو عدد ۳ و ۴ هستند.

$$A = y^2 + 7y + 10 = (y + 3)(y + 4)$$

مثال ۵. عبارت $A = 2x^2 + 11x + 12$ را تجزیه کنید.

حل:

$$2A = 4x^2 + 11(2x) + 24 = (2x)^2 + 11(2x) + 24$$

فرض می شود: $2x = y$. پس داریم:

$$2A = y^2 + 11y + 24$$

حال بنابر اتحاد مثال (۴)، دو عدد هم علامت می یابیم که مجموع

آن ها ۱۱ و حاصل ضرب آن ها ۲۴ باشد. به سادگی می توان دریافت که این دو عدد ۳ و ۸ هستند. پس:

$$2A = y^2 + 11y + 24 = (y + 8)(y + 3), \quad y = 2x$$

$$2A = (2x + 8)(2x + 3) \Rightarrow 2A = 2(x + 4)(2x + 3)$$

تجزیه

احمد قندهاری

$$\Rightarrow A = (x + 4)(2x + 3)$$

مثال ۶. عبارت $A = 6x^2 + 13x - 5$ را تجزیه کنید.

$$6A = 36x^2 + 13(6x) - 30 \quad \text{حل:}$$

$$6A = (6x)^2 + 13(6x) - 30$$

فرض می شود: $6x = y$. پس داریم:

$$6A = y^2 + 13y - 30$$

حال دو عدد مختلف علامت می یابیم که مجموع آن ها ۱۳ و

حاصل ضرب آن ها -۳۰ باشد. این دو عدد ۱۵ و -۲ هستند. پس:

$$6A = y^2 + 13y - 30 = (y + 15)(y - 2), \quad y = 6x$$

$$6A = (6x + 15)(6x - 2) = 3(2x + 5)(2)(3x - 1)$$

$$6A = 6(2x + 5)(3x - 1) \Rightarrow A = (2x + 5)(3x - 1)$$

مثال ۷. عبارت $A = n^2 + 4n^2 - 32$ را تجزیه کنید.

$$A = n^2 + 4n^2 - 32 \quad \text{حل:}$$

فرض می شود: $n^2 = y$. پس داریم:

$$A = y^2 + 4y - 32$$

حال دو عدد مختلف علامت می یابیم که مجموع آن ها ۴ و

حاصل ضرب آن ها -۳۲ باشد. این دو عدد ۸ و -۴ هستند. پس:

$$A = y^2 + 4y - 32 = (y - 4)(y + 8), \quad n^2 = y$$

$$A = (n^2 - 4)(n^2 + 8) \Rightarrow A = (n - 2)(n + 2)(n^2 + 8)$$

مثال ۸. عبارت $A = x^2 - 13x^2 + 36$ را تجزیه کنید.

$$A = x^2 - 13x^2 + 36 \quad \text{حل:}$$

$$A = y^2 - 11y + 24 = (y-3)(y-8), \quad y = x^2 - 1$$

$$A = (x^2 - 1 - 3)(x^2 - 1 - 8) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$$

$$\Rightarrow A = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

مثال ۱۲. عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$$

حل:

$$A = \underbrace{(x+1)(x+7)}_{x^2+8x+7} \underbrace{(x+3)(x+5)}_{x^2+8x+15} + 15$$

(فرض می شود) $x^2 + 8 = y$ و

$$A = (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15$$

$$A = (y+7)(y+15) + 15 \Rightarrow A = y^2 + 22y + 105 + 15$$

$$A = y^2 + 22y + 120$$

حال دو عدد هم علامت می یابیم که مجموع آن ها ۲۲ حاصل ضرب آن ها ۱۲۰ باشد. این دو عدد ۱۰ و ۱۲ هستند.

$$A = y^2 + 22y + 120 = (y+10)(y+12) \quad \text{و} \quad y = x^2 + 8x$$

$$A = (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12)$$

$$A = (x^2 + 8x + 10)(x+6)(x+2)$$

مثال ۱۳. عبارت $A = x^2(x^2 - 7)^2 - 36x$ را تجزیه کنید.

$$A = x \left[\underbrace{x^2(x^2 - 7)^2 - 36}_{\text{اتحاد مزدوج}} \right]$$

حل:

$$A = x \left[x(x^2 - 7) - 6 \right] \left[x(x^2 - 7) + 6 \right]$$

$$A = x \left[x^2 - 7x - 6 \right] \left[x^2 - 7x + 6 \right]$$

$$A = x \left[x^2 - x - 6x - 6 \right] \left[x^2 - x - 6x + 6 \right]$$

$$A = x \left[x(x^2 - 1) - 6(x+1) \right] \left[x(x^2 - 1) - 6(x-1) \right]$$

$$A = x \left[x(x-1)(x+1) - 6(x+1) \right] \left[x(x-1)(x+1) - 6(x-1) \right]$$

$$A = x(x+1) \left[x^2 - x - 6 \right] (x-1) \left[x^2 + x - 6 \right]$$

$$A = x(x+1)(x-1) \left[(x-3)(x+2) \right] \left[(x+3)(x-2) \right]$$

$$A = x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2)$$

مثال ۱۴. کسر $A = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4ab^2 + 4abc}$

را ساده کنید.

حل: در صورت کسر از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم:

$$A = \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2 + a^2 - b^2 + c^2)}{4ab(b+c)}$$

فرض می شود: $x^2 = y$. پس داریم:

$$A = y^2 - 13y + 36$$

حال دو عدد هم علامت می یابیم که مجموع آن ها ۱۳- و حاصل ضرب آن ها ۳۶ باشد. این دو عدد ۴- و ۹- هستند. پس:

$$A = y^2 - 13y + 36 = (y-9)(y-4), \quad y = x^2$$

$$A = (x^2 - 9)(x^2 - 4) = (x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$$

مثال ۹. عبارت $A = x^6 - 9x^2 + 8$ را تجزیه کنید.

$$A = x^6 - 9x^2 + 8$$

حل:

فرض می شود: $x^2 = y$. پس داریم:

$$A = y^3 - 9y + 8$$

حال دو عدد مختلف علامت می یابیم که مجموع آن ها ۹- و حاصل ضرب آن ها ۸ باشد. این دو عدد ۱- و ۸ هستند. پس:

$$A = y^3 - 9y + 8 = (y-1)(y-8), \quad y = x^2$$

$$A = (x^2 - 1)(x^2 - 8)$$

بنابر اتحاد $a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ می توان نوشت:

$$A = (x-1)(x^2 + x + 1)(x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

مثال ۱۰. عبارت $A = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ را

تجزیه کنید.

حل: فرض می کنیم:

$$(c-a) = z, \quad (b-c) = y, \quad (a-b) = x$$

$$x + y + z = a - b + b - c + c - a = 0$$

دو طرف را به توان ۳ می رسانیم:

$$\Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = (-z)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy(x+y) = -z^2, \quad x+y = -z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy(-z) = -z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

$$\Rightarrow A = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a-b)(b-c)(c-a)$$

مثال ۱۱. عبارت $A = (x^2 - 1)^2 - 11x^2 + 35$ را تجزیه کنید.

$$A = (x^2 - 1)^2 - 11(x^2 - 1) + 35$$

حل:

$(x^2 - 1) = y$ فرض می شود:

$$A = y^2 - 11(y+1) + 35$$

$$\Rightarrow A = y^2 - 11y + 24$$

حال دو عدد مختلف علامت می یابیم که مجموع آن ها ۱۱- و حاصل ضرب آن ها ۲۴ باشد. این دو عدد ۳- و ۸- هستند. پس:

$$\Rightarrow \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, C = \sqrt{A^2 - B}$$

فرمول تجزیه‌ی رادیکال‌ها

مثال ۱. عبارت $P = \sqrt{30 - 12\sqrt{6}}$ را به رادیکال‌های ساده‌تر تبدیل کنید.

حل:

$$P = \sqrt{30 - 12\sqrt{6}} = \sqrt{30 - \sqrt{12^2 \times 6}} = \sqrt{30 - \sqrt{864}}$$

$$\begin{cases} A = 30 \\ B = 864 \end{cases} \quad C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{900 - 864} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{30 - \sqrt{864}} = \sqrt{\frac{30+6}{2}} - \sqrt{\frac{30-6}{2}} = \sqrt{18} - \sqrt{12}$$

$$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

پس: $P = \sqrt{30 - 12\sqrt{6}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

مثال ۲. رادیکال $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ را تجزیه کنید.

حل: ابتدا $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ را تجزیه می‌کنیم. یعنی در واقع عبارت

اصلی را به صورت $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ می‌نویسیم. سپس جواب‌ها را

داخل رادیکال اولی قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{17 + \sqrt{144 \times 2}} = \sqrt{17 + \sqrt{288}}$$

$$\begin{cases} A = 17 \\ B = 288 \end{cases} \quad C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{289 - 288} = \sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{17 + \sqrt{288}} = \sqrt{\frac{17+1}{2}} + \sqrt{\frac{17-1}{2}} = \sqrt{9} + \sqrt{8} = 3 + \sqrt{8}$$

$$\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{17 + \sqrt{288}} = 3 + \sqrt{8} \quad \begin{cases} A = 3 \\ B = 8 \end{cases}$$

$$C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{9 - 8} = 1$$

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

$$A = \frac{(2b^2 - 2c^2)(2a^2)}{2ab(b+c)} = \frac{2(b^2 - c^2)(2a^2)}{2ab(b+c)}$$

$$= \frac{2(b-c)(b+c)(2a^2)}{2ab(b+c)}$$

$$A = \frac{2a^2(b-c)(b+c)}{2ab(b+c)}, b+c \neq 0, a \neq 0 \Rightarrow A = \frac{a(b-c)}{b}$$

مثال ۱۵. کسر $A = \frac{x^5 - ax^2 - a^2x + a^5}{x^2 - ax^2 - a^2x^2 + a^2x}$ را ساده کنید.

حل:

$$A = \frac{x^2(x-a) - a^2(x-a)}{x^2(x-a) - a^2x(x-a)} = \frac{(x-a)(x^2 - a^2)}{x(x-a)(x^2 - a^2)}$$

$$x \neq \pm a, A = \frac{x^2 - a^2}{x(x^2 - a^2)} = \frac{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)}{x(x^2 - a^2)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{x^2 + a^2}{x}$$

تجزیه‌ی رادیکال‌ها

تبدیل عبارت داخل یک رادیکال به عبارت ساده‌تر را تجزیه رادیکال‌ها گویند. فرض کنید می‌خواهیم عبارت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ را به عبارت‌های ساده‌تر تبدیل کنیم. فرض می‌کنیم این عبارت را به صورت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ درآوریم.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

می‌توان نوشت: دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy} \Rightarrow \begin{cases} A = x + y \\ \sqrt{B} = 2\sqrt{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = A \\ 4xy = B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = A = S \\ xy = \frac{B}{4} = P \end{cases}$$

حال معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل می‌دهیم که مجموع دو ریشه‌ی آن A و حاصل ضرب دو ریشه‌ی آن $\frac{B}{4}$ باشد. از حل معادله‌ی حاصل x و y به دست می‌آید.

$$Z^2 - SZ + P = 0 \Rightarrow Z^2 - AZ + \frac{B}{4} = 0$$

$$Z = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

فرض می‌کنیم: $\sqrt{A^2 - B} = C$. داریم:

$$\Rightarrow Z = \frac{A \pm C}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{A+C}{2} \quad \text{و} \quad y = \frac{A-C}{2}$$