تثلیث زاویه

(قسمت دوم)

● سیامک جعفری

امتناع

حل یک مسأله هندسی، همیشه به روش هندسی، ساده یا ممکن نیست. بلکه گاهی نیز مسائل هندسه به روشهای مثلثاتی یا جبری قابل حل است. یکی از برهانهای دقیق امتناع تثلیث زاویه، به کمک دو ابزار هندسیِ پرگار و خط‌کش، شبیه‌سازی جبری است.

شبیه‌سازی: بعضی مسائل هندسی را با شبیه‌سازی آن در جبر حل و بحث می‌کنند و پدیدهٔ شبیه‌سازی امروزه درحل و طرح مسائل روش کاربردی مورد توجه است.

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin^4 x+\cos^4 y+2=4\sin x.\cos y$$

با جایگزینی $u=\sin x, v=\cos y$

معادلهٔ اصلی به شکل زیر خواهد شد :

$$u^4+v^4+2=4u.v$$

و اکنون پس از شبیه‌سازی در جبر، این معادله را حل خواهیم کرد.

$$\Rightarrow (u^4+1)+(v^4+1)-4u.v=0$$

$$\Rightarrow (u^4-2u^2+1)+(v^4-2v^2+1)+2u^2+2v^2-4u.v=0$$

$$\Rightarrow (u^2-1)^2+(v^2-1)^2+2(u-v)^2=0$$

مجموع مربعات سه عدد، برابر صفر شده است.

بنابراین $u-v=0$ و $v^2-1=0$ و $u^2-1=0 \Rightarrow$

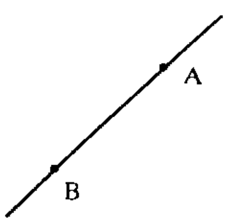
و حل این معادله‌ها ساده خواهد بود و در نهایت با جایگذاری برگشتی، چنین خواهد شد :

$$x_1=\frac{\pi}{2}+2n\pi \qquad y_1=2k\pi$$

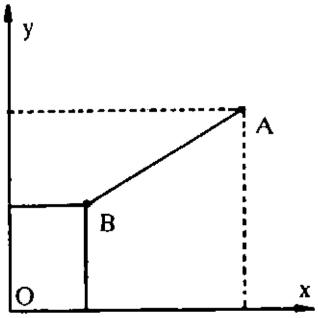
$$(n\text{و}k\in z)$$

$$x_2=-\frac{\pi}{2}+2n\pi \qquad y_2=\pi+2k\pi$$

به‌خاطر دارید که هر دو نقطه متمایز، نمایش یک خط راست است.



ش ۱



ش۲

معادلهٔ خط راستی که از دو نقطهٔ متمایز می‌گذرد به‌صورت زیر است :

$$(y-y_A)(x_B-x_A)=(y_B-y_A)(x-x_A)$$

روی محور طول‌ها اگر، x_A و x_B معلوم باشند، آشکار است که (x_B-x_A) نیز معلوم خواهد بود. دربارهٔ (y_B-y_A) همین‌طور خواهد بود. معادلهٔ بالا را ساده می‌کنیم.

$$(x_B-x_A)y+(y_A-y_B)x+y_A(x_A-x_B)+x_A(y_B-y_A)=\circ$$

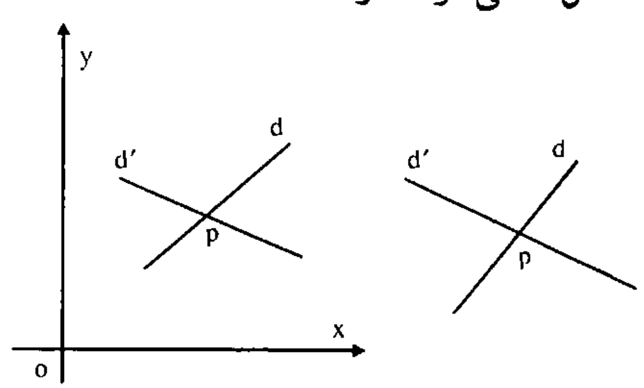
در هندسهٔ مقدماتی خوانده‌اید که : $x_A(y_B-y_A)$ و $y_A(x_A-x_B)$ را می‌توان به کمک خط‌کش به‌دست آورد. آشکار است که هر نقطه به مختصات (x , y) را می‌توان به کمک این وسیله تعیین کرد. بازهم معادلهٔ خط را ساده‌تر می‌کنیم.

$$Ay+Bx+C=\circ$$

بنابراین هرگاه A، B وC به کمک خط‌کش قابل نمایش باشند، هر نقطه روی این خط نیز به کمک این وسیله قابل نمایش است. به یاد داشته باشیم که منظور از خط‌کش، ابزاری است که دو نقطهٔ متمایز را به هم وصل می‌کند و نمایش خط راست عبور کننده از دو نقطه متمایز است.

اکنون باز می‌گردیم به هندسه و مطلب دیگری را در جبر مدل‌سازی خواهیم کرد.

● محل تلاقی دوخط راست



ش۴ ش۳

دو خط به معادله‌های زیر درنظر بگیریم

$$Ax+By+C=\circ$$
$$A'x+B'y+C'=\circ$$

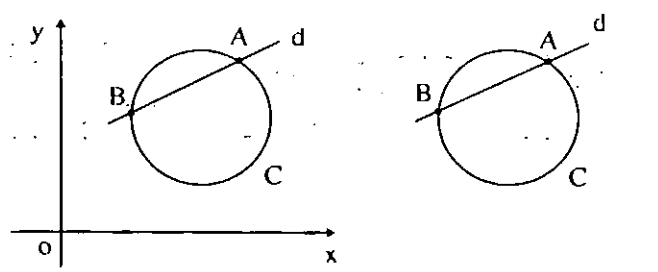
ضرایب A,B,C,A',B' و C' از نوع ضرایب ساختنی به کمک خط‌کش می‌باشند. محل تلاقی دوخط، چنین خواهد شد :

$$x=\frac{C'B-CB'}{AB'-A'B}\ ,\ \ y=\frac{CA'-C'A}{AB'-A'B}$$

در هندسهٔ مقدماتی، خوانده‌اید که اگر دو قطعه خط با طول‌های معلوم داشته باشیم، دراین صورت به راحتی می‌توان با روش‌های ساده (به کمک خط‌کش)، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، دو قطعه را ترسیم کرد. بنابراین (x , y) را می‌توان به کمک ترسیم به‌دست آورد.

ملاحظه می‌کنید تمام چیزهایی را که ممکن است با مثلاً واحد طول به وسیلهٔ اعمال گویای جمع و تفریق و ضرب و تقسیم حاصل شود، با خط‌کش رسم کنیم و عبارتند از تمام اعمال گویا بر روی اعداد گویا $\frac{a}{b}$، که a و $b \neq \circ$ اعداد صحیح هستند. این مجموعه، نسبت به این اعمال بسته است. هرمجموعه‌ای که دارای این خاصیت باشد، هیأت (میدان) نامیده می‌شود.

پرگار نیز مانند خط‌کش، به کمک مدل‌سازی جبری قابل بحث است. به‌یاد دارید که خط و دایره یا دو دایره نسبت به هم چه حالتهایی داشتند. اکنون، حالت متقاطع را بررسی خواهیم کرد :



ش۶ ش۵

مطابق شکل ۶ معادله دایره و خط راست، خواهد شد :

$$Ax+By+C=\circ$$
$$x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}+\text{۲}\alpha x+\text{۲}\beta y+\gamma=\circ$$

فرض کنید A, B, C, α, β و γ درمیدان F قرار دارند. با حذف y بین این دو معادله، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر به‌دست می‌آید.

$$ax^{\text{۲}}+bx+c=\circ$$
$$a=A^{\text{۲}}+B^{\text{۲}} \text{ و } b=\text{۲}(AC+B^{\text{۲}}\alpha-AB\beta)\ ,$$
$$c=C^{\text{۲}}-\text{۲}BC\beta+B^{\text{۲}}\gamma$$

الف: ملاحظه می‌کنید که ضرایب a , b و c با اعمال گویا به‌دست می‌آیند، بنابراین درمیدان F هستند.

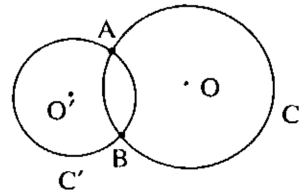
ب : جوابهای معادله به صورت زیر است :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}$$

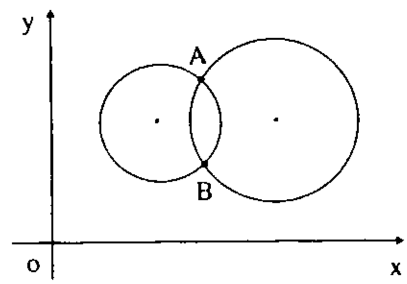
یا

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^{2} - 4ac} = p + q\sqrt{k}$$

در آینده، نتایجی را از تساوی اخیر به‌دست می‌آوریم.
اکنون، حالت تقاطع دو دایره را درنظر بگیرید :



ش۷



ش۸

معادله‌های دو دایره :

$$x^{2} + y^{2} + 2ax + 2by + c = 0$$
$$x^{2} + y^{2} + 2a'x + 2b'y + c' = 0$$

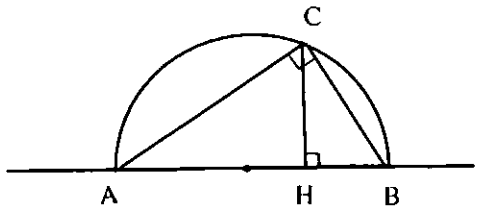
طرفین معادلهٔ دوم را از طرفین معادلهٔ اوّل کم می‌کنیم، معادلهٔ فصل مشترک و خط راست، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$2(a - a')x + 2(b - b')y + c - c' = 0$$

در حالتی که a و b در میدان F باشند، ملاحظه می‌کنید، ازآنجا که اعمال گویای اصلی در کار باشد، [مانند خط راست عابر بر دو نقطه متمایز، محل تلاقی دوخط راست، محل تلاقی دو دایره] می‌توان با عمل خط‌کش و ترسیم خطوط راست مسأله را حل کرد. ولی در حالت تلاقی خط با دایره، عنصر $\sqrt{k}$ وارد شد که در میدان F نیست.

در این حال، مجموعه‌ای جدید را که اعضای آن به شکل $a + b\sqrt{k}$ است، تعریف می‌کنیم و اگر k برابر ۹ باشد، به همان مجموعه اوّل F برمی‌گردد. در این صورت، مجموعهٔ جدید را توسیع مجموعه قبل می‌نامند.

در دورهٔ دبیرستان، با توسیع میدان اعداد حقیقی به مجموعهٔ اعداد مختلط آشنا شدید. اکنون به ترسیم $\sqrt{k}$ توجه کنید :



ش۹

با توجه به خواص مثلث‌قائم‌الزاویه، اگر $BH = 1$ و $AH = k$ باشد، آنگاه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی دو قطعه‌ای است که بر وتر ایجاد می‌کند. یعنی : $CH = \sqrt{k}$

بنابراین اگر قطعه خط k معلوم باشد، دراین صورت می‌توان $\sqrt{k}$ را با خط‌کش و پرگار رسم کرد. به‌طور کلی به کمک خط‌کش و پرگار اعمال زیر یا مسایل هندسی را که به اعمال زیر می‌انجامد، می‌توان حل کرد :

۱ ــ خطی رسم کنیم که از دو نقطه معلوم (متمایز) بگذرد.
۲ ــ نقطه تلاقی دوخط راست را به‌دست آوریم.
۳ ــ دایره‌ای با مرکز معلوم و شعاع معین رسم کنیم.
۴ ــ نقاط تلاقی دایره با خط راست را به‌دست آوریم.
۵ ــ نقاط تلاقی دایره با دایرهٔ دیگر را به‌دست آوریم.

اکنون که به کمک پرگار عدد $\sqrt{k}$ را ساختیم ــ که در هیأت اعداد گویا قرار ندارد ــ می‌توانیم به وسیلهٔ اعمال گویا، تمام اعدادی را که به‌صورت زیر هستند، با ترسیم به‌دست آوریم :

$$Z = a + b\sqrt{k}$$

چهار عمل اصلی برای میدان توسیع F_1 به‌سادگی به‌دست می‌آیند. این میدان را با وارد کردن $\sqrt{k_1}$, $\sqrt{k_2}$ و ... می‌توان وسیع‌تر کرد.

اگر میدان اولیه را F_0 و توسیع آن F_1 و ... نشان دهیم، می‌توان نشان داد که اعداد هیأت F_1 همگی ریشه معادله درجهٔ دوم و اعداد هیأت F_2 در حالت کلی ریشه معادله درجهٔ چهارم هستند و ... اعداد هیأت F_k ریشه‌های معادله‌ای از درجهٔ 2^{k} با ضرایب گویا هستند. موضوع بالا را برای F_2 ثابت می‌کنیم :

$$x = p + q\sqrt{k}$$

p و q و k عضو F_1 هستند، یعنی :

$$p = p_1 + q_1\sqrt{k_1}$$
$$q = p_2 + q_2\sqrt{k_1}$$
$$k = p_3 + q_3\sqrt{k_1}$$

معادلهٔ بالا به راحتی قابل تبدیل است :

$x^2 - 2px + p^4 = q^2 k$

ملاحظه می‌کنید که ضرایب این معادله در F_1 قراردارند.

برحسب $\sqrt{k_1}$، خواهد شد :

$x^2 + ux + v = \sqrt{k_1}(rx + t)$

که در آن u, t, s, r و v اعداد گویا هستند. اگر طرفین معادله را به توان ۲ برسانیم،

$(x^2 + ux + v)^2 = k_1(rx + t)^2$

معادله‌ای درجهٔ چهارم که ضرایب آن همگی گویا هستند و حکم ثابت شد.

دیدید که از میدان F_0 شروع کردیم تا به F_k رسیدیم، و معادله‌ای از درجهٔ 2^k به‌دست آمد. عکس این مطلب نیز درست است، می‌توان نشان داد که هر x متعلق به هیأت F_k، در معادله درجه دومی صدق می‌کند که ضرایب آن متعلق به میدان F_{k-1} می‌باشد، و این روش ادامه می‌یابد تا به F_0 برسیم.

تعریف: عددی جبری است که در معادله، $n \geq 1$، با ضرایب صحیح زیر صدق کند :

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$

می‌توان نشان داد که همهٔ اعداد قابل ترسیم، جبری هستند.

مثال: اعداد $(\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1)$ عضو F_1 هستند و ریشه‌های معادله زیر خواهند شد :

$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

اکنون معادله‌ای می‌سازیم که ضرایب آن از F_1 باشند، به‌طور مثال :

$(1+\sqrt{0})x^2 + (2+\sqrt{4})x + (1+\sqrt{2}) = 0$

یا $x^2 + 4x + (1+\sqrt{2}) = 0$

از نوع F_2 خواهد بود. با بردن $\sqrt{2}$ به‌طرف دیگر و به توان ۲ رساندن، معادله مشخصه آن به‌دست می‌آید. ریشه‌های این معادله $-2-\sqrt{3-\sqrt{2}}$ و $-2+\sqrt{3-\sqrt{2}}$ است.

$x = -2 + \sqrt{3-\sqrt{2}} \Rightarrow x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 1 = 0$

این اعداد، جبری و قابل ترسیم هستند.

مطالبی را دربارهٔ معادلات یادآوری می‌کنیم :

الف) اگر معادله‌ای دارای ضرایب درست باشد و درضمن، ضریب بزرگترین درجهٔ مجهول آن برابر ۱+ باشد، در آن صورت، هر ریشهٔ درست معادله باید مقسوم علیه درستی از مقدارثابت (جملهٔ آزاد) معادله خواهد بود.

ب) اگر هیچ‌یک از مقسوم‌علیه‌های درست مقدار ثابت در معادله صدق نکند، به معنای آن است که معادلهٔ مفروض دارای ریشهٔ گویا نیست.

ج) هرمعادله‌ای که دارای ریشه‌های گویا باشد، به کمک رادیکال‌هایی با فرجهٔ ۲ قابل حل است.

به سبب اهمیت مسأله، بخش ج را برای معادلهٔ درجهٔ سوم حل می‌کنیم [البته متن آن را کمی تغییر خواهیم داد.]

متن اول: یک معادلهٔ درجهٔ سوم، به شرطی که ریشه گویا نداشته باشد، نمی‌توان به کمک ریشه های دوم حل کرد.

متن دوم: اگرمعادلهٔ درجهٔ سومی با ضرایب گویا، دارای ریشهٔ گویا نباشد. دراین صورت، اگر ساختمان هندسی را ابتدا از میدان اعداد گویای F_0 شروع کرده باشیم، هیچ‌یک از این ریشه‌ها را نمی‌توان با خط‌کش و پرگار رسم کرد.

اثبات متن ۱:

معادلهٔ کلی درجهٔ سه زیر

$Z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$

با تبدیل $Z = x - \frac{A}{3}$ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود :

$x^3 + ax = b$

اکنون با توجه به روابط بین ضرایب و ریشه‌ها :

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

این ریشه‌ها گویا نیستند و با رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ قابل بیان نیستند.

برهان خلف: فرض کنیم x_1 برحسب رادیکال با فرجه ۲ قابل بیان باشد. بنابراین $x_1 = m + n\sqrt{k}$

k ، m و n متعلق به حوزه قبلی اعمال گویاست. x_1 در معادله صادق است، بنابراین

$(m + n\sqrt{k})^3 + a(m + n\sqrt{k}) = b$

خواهد شد : $M + N\sqrt{k} = 0$

$M = m^3 + 3mn^2k + am - b, N = 3m^2n + n^3k + an$

پس، M، N و K متعلق به حوزه عمل‌های گویای قبلی هستند. ولی $\sqrt{k}$ متعلق به آن نخواهد بود. امّا

$M + N\sqrt{k} = 0 \Rightarrow \sqrt{k} = -\frac{M}{N}$

این تساوی نمی‌تواند برقرار باشد، مگر وقتی که $M = 0$ و $N = 0$ که دراین حال $m - n\sqrt{k}$ نیز در معادله صدق خواهد

کرد، (امتحان کنید) پس :

$$x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow x_3=-(x_1+x_2)$$
$$\Rightarrow x_3=-(m+n\sqrt{k}+m-n\sqrt{k})$$
$$\Rightarrow x_3=-2m$$

x_3، متعلق به حوزهٔ قبلی می‌شود، و x_1 یا x_2 باید به حوزهٔ پیش ازاین تعلق داشته باشند و به همین ترتیب، تا آنجا که به میدان اعداد گویا می‌رسیم. یعنی با فرض بیان کردن یکی از ریشه‌ها برحسب رادیکالی با فرجهٔ ۲، به این نتیجه رسیدیم که یکی از ریشه‌ها، عددی گویا خواهد شد ؛ و این تناقض است.

یک نتیجه کلّی را به‌یاد داشته باشید ؛ هر مسأله‌ای که منجر به معادله‌ای غیر قابل حل به کمک ریشه‌های دوم بشود، نمی‌تواند با رسم خط‌های راست و رسم دایره‌ها (یعنی خط‌کش و پرگار) حل شود.

امتناع:

اتّحاد مثلثاتی

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$$

را درنظر بگیرید، فرض کنید که :

$$2\cos\theta = a \ , \ 2\cos\frac{\theta}{3} = x$$

آنگاه به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$x^3 - 3x = a$$

به معادله‌ای رسیدیم که جهت حل آن بحث کردیم.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی از زوایا وجود دارند که به کمک خط‌کش و پرگار، قابل تثلیث هستند.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی از زوایا وجود دارند که به کمک خط‌کش و پرگار، قابل تثلیث نیستند.

مثال: زاویهٔ $45°$ را به کمک خط‌کش و پرگار تثلیث کنید.

$$2\cos\frac{\pi}{4} = a \Rightarrow a = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$$

ریشه‌های این معادله $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و $-\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ است.

[**مثال:** زاویهٔ $60°$ را نمی‌توان به کمک خط کش و پرگار تثلیث کرد.]

$$2\cos\frac{\pi}{3} = a \Rightarrow a = 1$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x - 1 = 0$$

مقسوم‌علیه‌های (۱) در معادله صدق نمی‌کند، بنابراین ریشهٔ گویا ندارد و در نتیجه قابل بیان برحسب رادیکال با فرجهٔ ۲ نیست، و درنتیجه به کمک خط‌کش و پرگار قابل ترسیم نیست.

اصول مذهب فیثاغورس این بود که چه چیز مهمتر از عدد است و از توافق و هم‌آهنگی چه عامل زیباتری وجود دارد؟ و پیش خود خیال کردند که چون عدد مبدأ هم‌آهنگی موسیقی می‌باشد، ممکن است اساس و مبدأ بسیاری چیزهای دیگر و شاید اساس همه‌چیز باشد. دنیا و آسمان همه از نسبت و توافق به‌وجود آمده‌اند و نتیجه آن شد که گنبد فلکی را یک جعبهٔ بزرگ موسیقی تصور کردند و فواصل سیارات را با فواصل نوتهای موسیقی در یک گام معین وابسته دانستند : از زمین تا ماه یک تون و از ماه تا مریخ نیم تون فاصله است و غیره. برای ما باور نکردنی است که چگونه جمعی مردم باهوش از این قبیل مهملات می‌گفتند ولی نکته اینجاست که در چنین دستگاهی که فیثاغورس بنا نهاد، برای اولین بار زمین را از مقام خود که مرکز عالم بود خارج کرد و آن را در عداد سیاراتی که به دور آتش مرکزی در حرکت‌اند جای داد.

تاریخ علوم، پی‌یرروسو

ترجمه: حسن صفاری