تثلیث زاویه

(قسمت اول)

●سیامک جعفری

سه مسألهٔ معروف:

تضعیف مکعب، مسأله ترسیم ضلعی از یک مکعب که حجم آن دو برابر حجم یک مکعب مفروض باشد.

تثلیث زاویه، تقسیم یک زاویه مفروض به سه قسمت مساوی به کمک خط‌کش و پرگار.

تربیع دایره، ساختن مربعی که دارای مساحتی برابر با مساحت دایره مفروض است. جستجوی دامنه‌دار برای یافتن پاسخهای این سه مسأله، بر هندسه یونانی اثر عمیقی گذاشت و به کشفیات بسیاری از جمله مقاطع مخروطی انجامید و بسیاری از منحنیهای درجهٔ سوم و چهارم و منحنیهای متعالی به تنوع فراوانی دست یافت. نتیجه‌ای که مدتها بعد، از آن بدست آمد، پیدایش بخشهایی از نظریه معادلات دربارهٔ **حوزه‌های گویا، اعداد جبری و نظریه گروه‌ها** بود.

غیرممکن بودن این سه مسأله با این محدودیت، به کمک خط‌کش و پرگار تا قرن نوزدهم یعنی متجاوز از ۲۰۰۰ سال بعد از آن که این مسائل متصور گشته بودند، ثابت نشده بود. انجام ترسیمها با این دو وسیله، یکی از دل‌انگیزترین بازیهای ریاضی است و ترسیمهایی که فقط با این دو می‌توان به دست آورد، گاهی مایهٔ شگفتی است.

شما در مطالبی که طی چند قسمت خواهد آمد، با برخی از این غیرممکن‌ها آشنا می‌شوید و خود نیز می‌توانید طراح یکی از آنها باشید. به عنوان مثال، قبل از مطالعه این مختصر با پشتیبانی اطلاعات هندسه کلاسیک به مسأله زیر هجوم ببرید، یافتن مرکز یک دایرهٔ مفروض فقط به کمک خط راست (خط‌کش غیرمدرج) غیرممکن است. می‌بینید، این نمونه از مسائل همیشه صورت پیچیده‌ای ندارند.

یکی از این مسائل که ریاضیدانان یونانی را از زمانهای دور به خود مشغول داشت، یافتن روشی بود که در آن با استفاده از خط‌کش و پرگار بتوان یک زاویه مفروض را به سه بخش تقسیم کرد، نشان خواهیم داد که این امر غیرممکن است.

ریاضیات مانند پهنه‌ای گسترده است. براساس آن می‌توان بناهای نوساخت یا بناهای کهنه را از نو پی‌افکند به همین دلیل قضیه‌ها و مسائل در ریاضی همواره حرفهایی برای گفتن دارند. و این امر به زبان، قدرت استدلال و جسارت یک ریاضیدان بستگی دارد.

هیچ مسأله‌ای در ریاضی به طور کامل حل نشده است: حتی قضیه‌هایی که قطعیت آن برای همه محرز است. خلاقیت یک ریاضیدان به تردید داشتن در برهان این مسائل مربوط می‌شود. مسأله ها همیشه قابل بحث و تعمیم هستند و فرصت مناسبی در اختیار دانش‌پژوهان جاه‌طلب می‌گذارند تا با ارائه راه‌حلها و مسائل جدید، نام خود را جاویدان سازند.

اشکال خیلی پیچیده و ساده‌ای طرح و ترسیم شده و به دفتر

مجله‌های ریاضی می‌رسد ؛ که مدعیان توانسته‌اند زاویه مفروضی را به کمک خط‌کش و پرگار به‌صد بخش مساوی تقسیم کنند. در این میان حتی برخی از اساتید دانشگاه نیز به چشم می‌خورند و بنده نیز یک‌بار در سال اوّل دانشگاه قربانی این ادعا شدم. در آن زمان فکر می‌کردم، اگر بتوان کمان روبه‌روی زاویه مورد نظر را به کمک خط‌کش و پرگار به صد بخش تقسیم کرد، کار تمام است. کسانی هم بودند که روش مرا می‌پذیرفتند، اما آنها یا فقط توضیحات خودم را گوش می‌دادند و یا تنها به گفتن جملهٔ «خوب‌است» بسنده می‌کردند. اما به‌هنگام گوش دادن به توضیحات نیز فقط به اشاره‌های من به اضلاع و نقاط، نگاه می‌کردند، که مایل بودم هرچه زودتر نتیجه را اعلام کنم.

در این‌جا یادآوری می‌کنیم که غیرممکن در ریاضی با آنچه در میان مردم رایج است، فرق می‌کند. در یک دستگاه ریاضی مشخص، غیرممکن مانند یک تناقض با اصول متعارف یا اصول موضوعه در آن دستگاه ظاهر می‌شود. امر غیرممکن در این دستگاه نسبی نیست. مانند این گزاره که مجموع دو عدد فرد، عددی فرد است وغیرممکن است، جمع آنها زوج باشد. مانند این که بگویید «غیرممکن است حسن بتواند این وزنه را بلند کند» یا «زمانی غیرممکن بود انسان روی کرد ماد راه برود.»

در هرحال، باید این دو امر را که یکی نسبی و دیگری قطعی است ازهم جدا کرد. تعداد غیرممکن‌ها در ریاضیات کمتر از ممکن‌ها نیست. شاید بتوان با مثالهایی مسأله را روشن ساخت.

غیرممکن است جمع دو عدد زوج، فرد باشد.

غیرممکن است دایره، دو مرکز داشته باشد.

غیرممکن است دو خط موازی، یکدیگر را قطع کنند.

غیرممکن است دو عدد، دو تا ب.م.م داشته باشند.

هردستگاه ریاضی، چه جبری و چه هندسی، برمبنای اصولی استوار است ؛ اصولی که مورد پذیرش در علوم است و به آنها اصول متعارف‌می‌گویند. چنین است که هرچیزی با خودش برابر است. و اصولی که در علم مورد نظر پذیرفته است ؛ مانند مجموع زوایای داخلی مثلث که °۱۸۰ است.

در این دستگاه، «عمل» تعریف می‌شود. ادراک یک دستگاه ریاضی به این *عمل* وابسته است. به‌طور منطقی به کمک اصول و این عمل نتایج نوینی به بارمی‌آید که ساختمان دستگاه ریاضی را بنا می‌کند. هندسهٔ اقلیدسی و غیراقلیدسی، دو نمونه از این دستگاههای ریاضی هستند.

در دستگاه ریاضی مجموعهٔ اعداد طبیعی، اگر سالها جمع کردن میلیونها عدد زوج را تجربه کنید، هرگز جمع دوتای آنها فرد نمی‌شود. امّا اگر دستگاهی بسازید که در آن، هرعدد با تالی بلافصل خود برابر باشد، جمع آنها به ظاهر فرد است (این دستگاه وجود ندارد).

غیرممکن است بتوان با خط‌کش (خط راست) و پرگار، زاویه مفروضی را به سه بخش مساوی تقسیم کرد.

خط‌کش، وسیله‌ای است که تنها برای رسم خط راست، امتداد دادن آن یا اتصال دو نقطه به یکدیگر به‌کار می‌رود.

پرگار، برای رسم دایره یا کمانی از آن است. در این‌جا می‌خواهیم نشان بدهیم که به کمک این دو وسیله به تنهایی نمی‌توان زاویه‌ای را به سه بخش تقسیم کرد.

ابوجعفرخازن، ریاضیدان و منجم ایرانی، بین سالهای ۳۵۰ و ۳۶۰ در نیمهٔ اوّل قرن چهارم، در کتاب خود با عنوان «اصلاح کتاب مخروطات» دربارهٔ مسأله تثلیث زاویه بحث کرده است.

ابوالجود، ریاضیدان ایرانی در نیمه دوم سدهٔ چهارم در حل مسأله، تحقیقاتی داشته و در رساله‌ای به پرسشهای *ابوریحان بیرونی* پاسخ داده است.

ابوالحسن شمسی هروی، ریاضیدان ایرانی که در حدود سدهٔ چهارم می‌زیسته، در رساله‌ای که دربارهٔ تثلیث زاویه تألیف کرده است، راه حلی برای این مسأله بیان می‌کند.

ابوریحان بیرونی، ریاضیدان و منجم ایرانی (۳۶۲ ـ ۴۴۲) از نوابغ روزگار و نمونه کامل هوشمندی، از جمله مفاخر ایران و دنیای دانش و پژوهش است. وی مسألهٔ تثلیث زاویه را به بیش از دوازده مسأله هندسی دیگر، معادل با آن تبدیل کرده است.

صاغانی،منجم و ریاضیدان ایرانی (... ـ ۳۷۹) دو راه حل برای حل مسأله تثلیث زاویه ارائه کرده است. وی بیش از ریاضیدانان دیگر برروی این مسأله کارکرده است.

ابوالوفا بوزجانی، به مسائل حل‌نشدنی کلاسیک هندسی، مانند تثلیث زاویه پرداخته و با کمک تثلیث زاویه، نه ضلعی منتظم را هم می‌سازد و طرز ساختن تقریبی هفت ضلعی منتظم را هم به دست می‌دهد.

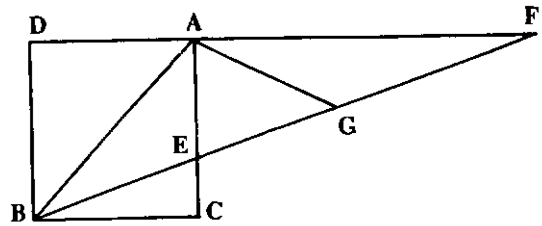
غیاث‌الدین کاشانی، در سدهٔ پانزدهم از تثلیث زاویه، برای تنظیم جدولهای مثلثاتی دقیق که برای محاسبات ریاضی و اخترشناسی لازم بود، استفاده کرد.

مسألهٔ تثلیث زاویه به یقین دربین سه مسأله مشهور، قابل فهم‌تر از همه است. از آنجا که نصف کردن یک زاویه به کمک پرگار، بسیار ساده است، شگفت‌آور خواهد بود که چرا تثلیث

آن، همین‌قدر آسان نیست.

تقسیم پاره‌خط به چندقسمت مساوی با خط کش و پرگار ساده است، و امکان دارد یونانیها نیز به تثلیث زاویه رسیده باشند. شاید نیز در ترسیم نه‌ضلعی منتظم که لزوماً باید یک زاویهٔ ۶۰ درجه را ثلث کرد، به این نتیجه دست یافته باشند.

مسألهٔ میل (Mil)



هر زاویهٔ حاده را می‌توان، زاویه‌ای فرض کرد که قطر مستطیلی مفروض با یکی از اضلاع آن می‌سازد. ما خط BF را طوری رسم کرده‌ایم که $EF = ۲BA$ باشد و G وسط EF است. به سادگی معلوم می‌شود که:

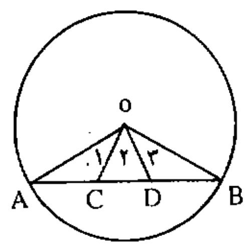
$EG = GF = GA = BA$

$\angle ABG = \angle AGB = \angle GAF + \angle GFA = ۲\angle GFA = ۲\angle GBC$

یعنی خط BEF زاویه $\angle ABC$ را ثلث می‌کند.

در شمارهٔ آینده امتناع مسألهٔ تثلیث زاویه به کمک خط کش غیرمدرج و پرگار را بیان خواهیم کرد.

تمرین: در شکل زیر اگر نقاط C و D، وتر AB را بر سه پاره‌خط برابر تقسیم کنند؛ ثابت کنید سه زاویه ۱ و ۲ و ۳ نمی‌توانند باهم برابر باشند.



مهرداد در مسابقهٔ دوچرخه‌سواری که دریک زمین مدور برگزار می‌شد، شرکت جست. او بعداز چند ساعت متوجه شد که پنجمین نفر از شرکت کنندگان که در جلوی او حرکت می‌کرد، به $\frac{۵}{۶}$ سایر شرکت‌کنندگان که پشت سر او قرار داشتند ملحق شده‌است، و با پیوستن او، مجموع شرکت کنندگان تکمیل شد. چند نفر در مسابقه شرکت داشته‌اند؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکبور

جواب در صفحهٔ ۸۸