تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران (۱۶)

در شمارهٔ ۱۴ مجلهٔ یکان تحت عنوان: «بی‌آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید.» چنین می‌خوانیم:

در یک ردیف خانه پنج زوج زندگی می‌کنند: آقا و خانم صبور، وفا، صبا، غیور و پایا. پنج فروشنده هستند که هیچ‌کدام متأهل نیستند و به‌این خانه‌ها مراجعه می‌کنند. فرض کنیم که اینها بقال و نفت‌فروش و نانوا و قصاب و روزنامه‌فروش باشند. اسامی این فروشنده‌ها عبارت است از صبور، وفا، صبا، غیور و پایا اما نه به‌ترتیب.

خواهر شوهردار قصاب در خانهٔ شماره ۱ زندگی می‌کند.

آقای غیور در همسایگی دیوار به‌دیوار شخصی که همنام نفت‌فروش است زندگی می‌کند.

شخصی که همنام روزنامه‌فروش است خویشاوندی ندارد.

شخصی که همنام قصاب است در خانهٔ شماره ۲ زندگی می‌کند.

آقای غیور با شوهر خواهر قصاب به‌کار می‌رود.

آقای وفا به‌شخصی که همنام نفت‌فروش است در باغچه‌اش کمک می‌کند.

آقای صبا در همسایگی دیوار به‌دیوار شخصی که همنام روزنامه‌فروش است زندگی می‌کند.

خانم صبور و خانم غیور خواهرند.

شخصی که همنام نانواست فقط یک شوهرخواهر دارد که در خانهٔ شمارهٔ ۳ زندگی می‌کند.

آقای پایا در همسایگی دیوار به‌دیوار شخصی که همنام نفت‌فروش است زندگی می‌کند.

آیا می‌توانید بگویید که نام هر یک از فروشنده‌ها چیست؟ همچنین شماره‌های خانهٔ هر یک از این زوجها چیست؟

در همین شماره در نامه‌ای از هوشنگ شریف‌زاده به‌مجله دربارهٔ اعداد فیثاغورسی چنین آمده است:

... در شمارهٔ ۱۳ مجلهٔ یکان مقاله‌ای تحت عنوان «ساده‌ترین راه تعیین اعداد فیثاغورسی» به‌قلم آقای خلیل‌صدیق ارشادی ملاحظه شد. ایشان پس از مطالعه در مورد اعداد فیثاغورسی بیمار و در بیمارستان بستری شدند و در همان موقع موفق به‌کشف دو فرمول شدند که برای اظهارنظر به‌چند نفر از استادان خارجی طی نامهٔ خصوصی ارسال داشته‌اند. این فرمولها که به‌قول خودشان کاملاً بی‌سابقه بوده است عبارت بود از:

$$X^2+[(\frac{X}{2})^2-1]^2=[(\frac{X}{2})^2+1]^2$$

که در آن X عددی است زوج و:

$$Y^2+(\frac{Y^2-1}{2})^2=[(\frac{Y^2-1}{2})^2+1]^2$$

که در آن Y عددی است فرد. جدولی هم برای اعداد از یک تا بیست‌وشش تنظیم فرموده بودند. ایشان مرقوم داشته‌اند «از طریق حل این فرمولها، با دردست داشتن یکی از اعداد می‌توان دو عدد دیگر را پیدا کرد، به‌عبارت دیگر اگر یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه معلوم باشد، ضلع دیگر و وتر آن نیز به‌آسانی تعیین می‌گردد». بنده از آقای مکتشف عزیز سؤال می‌کنم که اگر یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ۲۴ باشد ضلع دیگر چقدر خواهد شد ۷ یا ۱۰ یا ۱۴۳(!؟). خواهشمند است قبلاً به‌جدول مراجعه و بعد پاسخ دهند.

فرمولی که آقای صدیق ارشادی کشف فرموده‌اند! قبل از ایشان به‌وسیلهٔ فیثاغورس، افلاطون و براهما گوپتا در قرون قبل از میلاد بیان شده است و این موضوع در غالب کتب ریاضی مذکور می‌باشد از جمله در کتاب جبر و مقابلهٔ خیام نگارش آقای غلامحسین مصاحب:

۱ ـ فرمولی راکه فیثاغورس به‌دست آورده:

$$(۲n^۲+۲n+۱)^۲=(۲n^۲+۲n)^۲+(۲n+۱)^۲$$

و یا اگر n فرد باشد:

$$n^۲+\left(\frac{n^۲-۱}{۲}\right)^۲=\left(\frac{n^۲+۱}{۲}\right)^۲$$

۲ ـ فرمولی که افلاطون به‌دست داده:

$$(۲n)^۲+(n^۲-۱)^۲=(n^۲+۱)^۲$$

۳ ـ دستوری که براهما گوپتا پیدا کرده به‌صورتهای زیر است:

$$(۲mn)^۲+(m^۲-n^۲)^۲=(m^۲+n^۲)^۲$$

و

$$(\sqrt{m})^۲+\left[\frac{۱}{۲}\left(\frac{m}{n}-n\right)\right]^۲=\left[\frac{۱}{۲}\left(\frac{m}{n}+n\right)\right]^۲$$

* * *

آقای مرتضی صدیقین تذکر داده‌اند که فرمولهای مذکور در مقالهٔ مزبور در کتاب هندسهٔ مسطحهٔ تألیف میرزارضاخان مهندس‌الملک در صفحهٔ ۱۹۸ مذکور می‌باشد. ایشان همچنین تذکر داده‌اند که استعمال این فرمولها خالی از اشکال نبوده و برای دانش‌آموزان ایجاد اشکال می‌نماید.

باز هم در همین شماره در شرح حال دکتر اکبرزاده به‌قلم دکتر هوشنگ منتصری چنین آورده شده است:

— آقای دکتر حسن اکبرزاده در سال ۱۳۰۶ شمسی در شهرستان رشت به‌دنیا آمده، آموزش ابتدایی را در همان شهر و تحصیلات متوسطه را در سال ۱۳۲۶ در دبیرستان البرز خاتمه داده سپس وارد دانشکدهٔ علوم تهران گردیده، در سال ۱۳۲۹ لیسانس در رشتهٔ علوم ریاضی را با احراز رتبهٔ اول و اخذ مدال علمی به‌پایان رسانید.

پس از پایان تحصیلات دانشگاهی در ایران بلافاصله برای ادامهٔ تحصیلات عالیهٔ خود به‌فرانسه مسافرت کرده و در دانشگاه پاریس «سوربون» در مدت دو سال بعد از گذراندن چهار شهادت‌نامه (ریاضیات عمومی ـ مکانیک استدلالی، حساب جامعه و فاضله و هندسهٔ عالی) مجدداً به‌اخذ درجهٔ لیسانس علوم ریاضی نایل گردید. یک سال بعد با دریافت شهادت‌نامهٔ آنالیز عالی کار رسالهٔ دکترای خود را آغاز نمود.

موضوع رسالهٔ آقای دکتر اکبرزاده دربارهٔ «فضاهای فینسلر» می‌باشد. «فینسلر» ریاضیدان سویسی در اوایل قرن بیستم بوده است. در دنبالهٔ مطالعات خود به‌یک نوع از فضاهایی که بعدها به‌نام خود او معروف گردید برخورد نمود، این فضاها نوع عمومیتر و دقیقتری از فضاهای «ریمان» می‌باشد که در رشته‌های «فیزیک ریاضی» موارد استعمال دارد.

ارتباط فضاهای فینسلر با سایل مطروحه در «نسبیت عمومی» و آخرین نظریهٔ انیشتین «نظریهٔ وحدانی» و همچنین در توضیح و تفسیر تئوریهای مکانیک آنالتیک و مکانیک کوانتیک از دیرباز مورد توجه دانشمندان قرار داشته است به‌طوری که در سالهای اخیر بسیاری از مکتبهای ریاضی شالودهٔ تئوریهای مزبور را بر اساس فضاهای فینسلر طرح کرده‌اند.

مطالعات و تحقیقات آقای دکتر اکبرزاده دربارهٔ پی‌ریزی جدید و عمومیت فضاهای فینسلر آنقدر جالب و پرارزش بود که بعد از تهیه و تنظیم دو یادداشت به‌آکادمی علوم پاریس در همان حال که کار رسالهٔ دکترای خود را تعقیب می‌نمود به‌عنوان وابستهٔ تحقیقاتی در «مرکز دولتی تحقیقات علمی» استخدام گردید و پس از آن چهار یادداشت دیگر به‌آکادمی علوم پاریس تقدیم نمود که همهٔ این شش یادداشت به‌صورت جزواتی چاپ گردیده و به‌کلیهٔ مراکز تحقیقاتی و دانشگاهی کشورهای جهان فرستاده شده است.

بالاخره در ۱۳ ژوئن ۱۹۶۱ بعد از یازده سال تحصیل و تحقیق در پاریس رسالهٔ دکترای دولتی خود را با درجهٔ «شایان افتخار» که بالاترین درجات تصویب یک رساله از طرف هیئت قضات می‌باشد گذراند.

پس از پایان تحصیلات آقای دکتر اکبرزاده به‌سمت «مأمور تحقیقاتی» در مؤسسهٔ معروف «کلژدوفرانس» انتخاب گردید.

متن رسالهٔ آقای دکتر اکبرزاده به‌علت اهمیت علمی آن در سالنامهٔ

دانشسرای عالی در پاریس (۱۹۶۳ - ۱۹۶۲) چاپ گردیده و در کلژدوفرانس و همچنین در پاره‌ای از دانشکده‌های خارج از فرانسه نیز تحقیقات این جوان ایرانی با ذکر نام خود او تدریس می‌شود.

کار آقای دکتر اکبرزاده در کلژدوفرانس صرف‌نظر از ادامهٔ تحقیقات، دادن یک سلسله کنفرانسها و هدایت پروفسور آگرژه‌هایی است که مشغول تهیهٔ رسالهٔ تحقیقاتی می‌باشند. ←

در شمارهٔ ۱۵ یکان در مقالهٔ:

نظری اجمالی به‌مبانی ریاضیات

که از دکتر استول و ترجمهٔ جهانگیر شمس‌آوری است و در انجمن معلمان ریاضی در ۲۴ اسفند ۱۳۴۳ ایراد شده چنین می‌خوانیم:

نخستین هدف من از این سخنرانی وصف شرایطی است که بعضی از ریاضیدانان را واداشت که عطف توجهی به‌مبانی ریاضیات مبذول دارند. اجازه بدهید که خیال شما را از این بابت راحت کنم که فرض من بر این بوده است که هیچ آشنایی‌ای با این رشته از دانش که همه خود را وقف آن کرده‌ایم ندارم. نظر من در این خصوص برحسب تجربه‌های شخصی منعکس ساختن این حقیقت است که از میان کسانی که ریاضیات را به‌کار می‌برند، یا خالق آن هستند، تنها چند تنی علاقه و آشنایی با مبانی آن دارند. شاید از روی حسن نیت باشد که اذعان کنیم که مبانی ریاضیات در وضع نسبتاً تأسف‌انگیزی قرار دارد.

اخیراً یکی از پژوهندگان مشهور ریاضیات وضع بنای ریاضیات را به‌یک کشتی تشبیه کرده است که از یک طرف به‌آهستگی در آب فرو می‌رود و از طرف دیگر به‌نظر می‌رسد که به‌علت سرعت خارق‌العادهٔ نمو و توسعهٔ روبنایش در آب بالا می‌آید.

مطالب را با نام بردن از مفاهیم ریاضی که به‌کار خواهم گرفت آغاز می‌کنم.

۱) سلسلهٔ طبیعی اعداد مانند ۱ و ۲ و ۳ و... که به‌منظور شمردن به‌کار گرفته می‌شوند.

۲) مفهوم مجموعه. یک مجموعه، با درک مستقیم و به‌طور کشف و شهود، گرد آمده‌ای از اشیا است. هر یک از اشیای این مجموعه به‌نام عنصر یا عضو مجموعه خوانده می‌شود. چنانچه x عنصر مجموعه A باشد آن را چنین می‌نویسیم: $x\in A$.

مجموعه‌های A و B متساوی‌اند اگر و فقط اگر عضوهای آنها یکی باشد و آن را با علامت چنین می‌نویسیم: $A=B$. به‌مجموعه‌های خود، مجموعهٔ تهی یا خالی را نیز علاوه می‌کنیم و آن مجموعه‌ای است که هیچ عضو ندارد و با علامت چنین نشان داده می‌شود: $\varnothing$.

۳) رابطهٔ شمول برای مجموعه‌ها: اگر A و B مجموعه‌هایی باشند که هر عضو A عضوی از B باشد، A جزء B است که با علامت چنین نوشته می‌شود: $A\subseteq B$. همچنین می‌توان گفت که A زیرمجموعه‌ای از B است اگر داشته باشیم $A\subseteq B$ و $A\neq B$، A زیرمجموعهٔ واقعی B است که با علامت چنین نشان داده می‌شود: $A\subset B$.

۴) چنانچه A مجموعه‌ای باشد، مجموعهٔ تواندار A (که با علامت چنین نمایش داده می‌شود: $P(A)$) مجموعه‌ای است که اعضایش زیرمجموعه‌های مختلف A است. به‌طور مثال اگر A مجموعه‌ای با عنصرهای ۱ و ۲ و ۳ باشد (که چنین نمایش داده می‌شود: $A=\{۱,۲,۳\}$)، مجموعهٔ تواندار آن چنین است:

$$P(A)=\{\varnothing,\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\},\{۱,۲,۳\}\}$$

توجه داشته باشید که $P(A)$ دارای $۸=۲^۳$ عضو است. به‌طور کلی اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، مجموعهٔ تواندار آن دارای ۲^n عضو است.

۵) مفهوم اندازهٔ یک مجموعه. در زندگی روزانه اندازهٔ یک مجموعه را با یک عدد از سلسلهٔ طبیعی اعداد بیان می‌کنیم. می‌گوییم که مجموعهٔ A دارای اندازه‌ای برابر n است (و آن را چنین می‌نمایانیم $\#A=n$) اگر بتوان عضوهای A را در مقابلهٔ عضوهای مجموعهٔ $\{۱,۲,...,n\}$ قرار داد. (به‌زبان دقیق این بدان معنی است که مقابلهٔ یک به‌یک بین اعضای مجموعهٔ A و مجموعهٔ $\{۱,۲,...,n\}$ برقرار است.) مجموعه‌هایی که اندازه‌های آنها را بتوان به‌این وسیله معین کرد مجموعه‌های محدود نامیده می‌شوند. در ریاضیات اغلب مجموعه‌هایی درنظر گرفته می‌شوند که محدود نیستند. چنان مجموعه‌هایی نامحدود خوانده می‌شوند. معمولاً مقایسهٔ اندازه‌های مجموعه‌ها به‌وسیلهٔ معین کردن اندازهٔ هر یک از آنها و بعد مقایسهٔ اعداد به‌دست آمده از نظر ترتیب قرار گرفتنشان در سلسلهٔ طبیعی اعداد به‌عمل می‌آید. به‌طور مثال اگر معلم A بگوید که تعداد شاگردان او بیش از تعداد شاگردان B است، احتمال دارد که به‌این مطالب ضمن مقایسهٔ تعداد شاگردان کلاس خود، که به‌طور مثال ۴۰ تا است، و تعداد شاگردان کلاس معلم B، که به‌طور مثال ۳۰ تا

است، پی برده باشد. اما توجه داشته باشید که حاجتی برای به‌کار بردن اعداد طبیعی در این مثال نیست. بدین معنی که هریک از این دو معلم می‌توانند به‌همان نتیجه برسند چنانچه صورت اسامی شاگردان کلاسهای خود را تهیه و مشاهده کنند که صورت اسامی شاگردان معلم B قابل مقابله با یکی از زیرمجموعه‌های واقعی صورت اسامی شاگردان معلم A است.

مطالبی که تا اینجا بیان شد برای آمادگی کافی است و اکنون به‌موضوع اصلی باز می‌گردم. در سال ۱۸۸۰ کانتور ریاضیدان آلمانی علاقمند به‌مقایسهٔ اندازهٔ بعضی مجموعه‌های نامحدود گشت. تحقیقات وی منجر به‌نظریهٔ مجموعه‌ها و به‌ویژه نظریهٔ حساب ماورای حد که یک رشته از همین حساب معمولی اعداد طبیعی است گشت. تعریف اساسی وی که خواهیم گفت بر پایهٔ آن چیزی است که در آخرین قسمت، یعنی شمارهٔ ۵، از مقدمات بالا آمده است.

تعریف ـ فرض کنید که A و B دو مجموعه باشند. می‌گوییم که A و B دارای یک اندازه هستند و چنین می‌نویسیم: $A \sim B$ اگر و فقط اگر مقابله‌ای یک به‌یک بین عناصر A و B وجود داشته باشد. اندازهٔ مجموعهٔ A بزرگتر از اندازهٔ مجموعهٔ B است (که چنین نوشته می‌شود: $A>B$) اگر و فقط اگر مقابله‌ای یک به‌یک بین عناصر B و زیرمجموعه‌ای از A وجود داشته باشد و برعکس آن چنین نباشد.

هنگامی که مجموعه‌های محدود را به‌کار می‌بریم، تعاریف فوق موافق مفاهیمی است که از اندازه در شمارهٔ ۵ ذکر کردیم.

به‌هر حال آنچه مهم است این که این تعاریف در مجموعه‌های نامحدود نیز قابل استعمال هستند. وقتی که این تعاریف را دربارهٔ مجموعه‌های نامحدود به‌کار می‌بریم با نتایجی مواجه می‌شویم که اغلب برخلاف آن چیزی است که به‌وسیلهٔ شهود و درک مستقیم و محسوسات حاصل می‌آید. به‌طور مثال اندازهٔ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح و اندازهٔ مجموعهٔ همهٔ اعداد مثبت گویا به‌همان اندازهٔ مجموعهٔ N یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی است. بنابراین اندازهٔ مجموعهٔ نامحدود ممکن است که به‌اندازهٔ بعضی از زیرمجموعه‌های واقعی خود باشد!

مجموعه‌های نامحدودی هستند که اندازهٔ آنها بزرگتر از N است. یکی از آنها مجموعهٔ I یعنی مجموعهٔ همه اعداد حقیقی x است به‌قسمی که $1>x>0$. یعنی $I>N$.از طرف دیگر مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی اندازه‌های برابر اندازهٔ مجموعهٔ I دارد. این حقیقت که $I>N$ ما را در برابر این پرسش قرار می‌دهد که آیا زیرمجموعه‌ای وجود دارد به‌قسمی که داشته باشیم $I>S$ و $S>N$. تاکنون پاسخ این پرسش معلوم نشده است.

برای هر مجموعهٔ A ، مجموعهٔ تواندار A دارای اندازهٔ بیشتری است. این قضیه را کانتور عنوان کرده است و تعمیم نتیجه‌ای دربارهٔ مجموعه‌های نامحدود است. زیرا با به‌خاطر آوردن این که اگر A صاحب n عضو باشد، $P(A)$ صاحب 2^n عضو است. مسلم می‌شود که به‌ازای هر عدد n از سلسلهٔ طبیعی اعداد $2^n>n$.

متأسفانه این قضیهٔ کانتور منجر به‌یک تناقض می‌شود. برای نشان دادن این تناقض مجموعهٔ S را که مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است درنظر بگیرید. طبق قضیه $P(S)>S$. از سوی دیگر، چون $P(S)$ خود یک مجموعه است (مجموعه‌ای که عناصرش زیرمجموعه‌های S هستند) $P(S)\subseteq S$. از اینجا عناصر $P(S)$ را می‌توان به‌راه ساده‌ای در مقابلهٔ عناصر یک زیرمجموعه از S قرار داد. اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان متعاکساً عناصر مجموعهٔ S را در مقابلهٔ عناصر زیرمجموعه‌ای از $P(S)$ قرار داد؟ در پاسخ این سؤال اگر فرض کنیم که چنین چیزی امکان دارد می‌توان به‌این نتیجه رسید که $P(S)\sim S$. و این متناقض نتیجه‌ای است که $P(S)>S$. حال اگر فرض کنیم که پاسخ به‌آن پرسش «نه» باشد، نتیجه می‌گیریم که $S>P(S)$ و باز با تناقض مواجه می‌شویم.

این تناقض که به‌نام پارادوکس کانتور مشهور است یکی از چند تناقضی است که با قیاس از نظریهٔ کانتور دربارهٔ مجموعه‌های ماورای حد، درست در همان زمان که نظریهٔ او مورد قبول ریاضیدانان گشت، استنباط شده است. هنگامی که به‌اهمیت این تناقضات پی برده شد، ریاضیدانان، خود و ریاضیات را مواجه با بحرانی حقیقی یافتند. بعضی متحمل بار سنگین به‌نظم درآوردن خانهٔ خود گشتند. کوشش آنان شکلهای مختلفی گرفت. کوششی برای تجدید ساختمان نظریهٔ مجموعه چون یک نظریهٔ اصولی (اکسیوماتیک) انجام گرفت. توصیه‌هایی که از این طریق نیل به‌مقصود مورد بحث قرار گرفت این بود که این تناقضات مربوط به‌مجموعه‌های بسیار بزرگ است (پیش از این، مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها را درنظر گرفتیم) ـ و بنابراین باید حدودی در اطراف مفهوم مجموعه قرار داد تا مجموعه‌های مزاحم طرد شوند. این عمل (آنچنان که بحثش ادامه دارد) ممکن است به‌وسیلهٔ زیرنفوذ درآوردن مفاهیم نظریهٔ مجموعه توسط اصول موضوعه انجام پذیرد، به‌همان طریق که در یک هندسهٔ مستحکم

اقلیدسی «نقطه» و «خط» تحت فرمانبری از اصول موضوعه هستند. نخستین دستگاه اصولی نظریهٔ مجموعه به‌وسیله زرملا در سال ۱۹۰۸ عرضه گشت. پس اصلاحاتی در این نظریه به‌وسیله فرانکل (سال ۱۹۲۰)، سکولم (سال ۱۹۲۰)، وان‌نومان (سال ۱۹۲۰)، برنیز (سال ۱۹۴۰) و گودل (سال ۱۹۴۰) انجام گرفت. وضع موجود اصل‌بندی نظریهٔ مجموعه را که توسط اکثر ریاضیدانان پذیرفته شده است چنین می‌توان توضیح داد: هیچ تناقضی از میان آنها مشتق نشده است. (البته، هر اصل‌بندیی که متضمن تناقضی بوده کنار گذاشته شده است.) از طرف دیگر نامتناقض بودن هیچ یک از آنها ثابت نشده است، یعنی غیرممکن است که مطلبی از نظریه ساخته شود به‌قسمی که هم آن و هم نفی آن قضیه باشند.

راه‌حل اساسی دیگر برای برطرف ساختن بحرانی که به‌وسیلهٔ این تناقضات به‌وجود آمده بود روش بسیار وسیعتری را درنظر گرفت. و آن به‌وسیلهٔ ریاضیدانانی که قادر نبودند یا در جهت توسعهٔ نظریهٔ کانتور دربارهٔ مجموعه یا در اشتقاق تناقضات نظیر آنچه بدان اشاره شد نکته‌ای اساسی بیابند عرضه گشت. آنها به‌موضوع روش استدلال و ناصحیح بودن آن پرداختند. بدین‌ترتیب آنها به‌این نتیجه رسیدند که یک مسئله واقعی که باید به‌حل آن اقدام کرد همان روشن ساختن مفهوم اثبات درست است. تصدیقی که در حدود سال ۱۹۰۰ به‌وسیلهٔ بعضی از ریاضیدانان عرضه گشت مبنی بر این که مفهوم اثبات درست را تحت هیچ قاعده‌سازیی نمی‌توان برحسب اصطلاحهای صریح و ریاضی در آورد مشخص آغاز پژوهشهای نوین در بنیان ریاضیات است.

بخصوص اساس مطالعه‌ای منظم و تحت قاعده به‌وسایل ریاضی دربارهٔ قوانین منطق که قدم به‌قلمرو اثبات ریاضی می‌گذارند نهاده شد. از کارهای اولیهٔ بول و دیگران راسل منطقدان انگلیسی و همکارش وایت‌هد چون یک نظریهٔ اصولی دستگاهی از منطق مناسب برای ریاضیات بیرون کشیده آن را توسعه دادند. (اصلاحی از این نظریه، که عموماً به‌نام حساب مجهولات از رتبهٔ اول خوانده می‌شود در کتابهای درسی نوین منطق ریاضی آمده است.) راسل و وایت‌هد با عدم رضایت از انجام کار، در کتاب تاریخی خود به‌نام اصول ریاضیات، (۱۹۱۳ - ۱۹۱۰) کوشش کردند نشان دهند که همهٔ ریاضیات می‌تواند در چهارچوب دستگاه منطق آنها به‌تکامل بگراید. ماهیت روش آنها در این خصوص در حقیقت تجربی بود چه آنها نشان دادند که چگونه رشته‌هایی از ریاضیات نظیر نظریهٔ مجموعه، نظریهٔ اعداد، و هندسه را می‌توان بر اساس نظریهٔ آنها عرضه داشت و قضایای اصلی این نظریه‌ها را براساسی متحدالشکل و با قاعده استوار ساخت. اما از نظر واقعیت، آنها برای موضوع مورد بحث خود اثباتی ارائه نکرده‌اند. ممکن است که سؤال شود برای اثبات چه می‌توانست ارائه شود؟ یقیناً، اگر همچنان که راسل و وایت‌هد ادعا کردند، ادعا شود که حساب مقدماتی می‌تواند در میان دستگاهی که در کتاب اصول ریاضیات ارائه شده تجلی نماید، آن وقت برای هر فرمول داده شدهٔ حساب باید حالتی باشد که یا آن یانفی آن یک قضیه باشد (یعنی نظریه باید کامل باشد). اینکه اصول ریاضیات کامل نیست (یعنی غیرکامل است) در سال ۱۹۳۱ به‌وسیلهٔ گودل اثبات گردید.

بدین‌ترتیب که وی نشان داد بر اساس محدود کردن توجه به‌آن قسمت از اصول ریاضیات که مناسب برای ظاهر ساختن حساب است فرمولی هست به قسمی که نه آن و نه نفی آن را می‌توان از اصول موضوعه و به‌وسیلهٔ قوانین نتیجه‌گیری فراهم آورده شده اثبات کرد. علاوه بر این اثبات گودل نشان داد که مطالب را با افزودن اصول موضوعهٔ اضافی نیز نمی‌توان ترمیم کرد. بالاخره، (با به‌خاطر آوردن تعریف نامتناقض بودن یا سازگاری که پیش از این گفته شد) گودل ثابت کرد که اگر دستگاهی مانند دستگاهی که در کتاب اصول ریاضیات ذکر شده است نامتناقض باشد، غیرممکن است که بتوان آن حقیقت را یعنی نامتناقض بودن آن را اثبات کرد.

گرچه نتایج مأخوذهٔ گودل پایه‌های تز وایت‌هد و راسل و همچنین امیدهای دیگران را فرو ریخت، ولی مقدری هم برای موضوع بنیانهای ریاضیات یا منطق ریاضی معلوم نساخت بدین‌معنی که هر دوی آنها زینت‌بخش رشته‌های ریاضیات هستند ولی جهت هر یک به‌وسیلهٔ نتایج عمیقی که گودل به دست آورد تغییر یافته است.

در همین شماره در مقالهٔ:

محاسبهٔ Σn^p

که توسط رضا منصوری[1] دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان رهنما، با الهام از روش ابوبکرمحمد کرخی در محاسبهٔ Σn^3 (مذکور در کتاب جبر و مقابلهٔ خیام، تألیف: مصاحب) نوشته شده چنین آمده است:

۱ ـ محاسبهٔ Σn : مربع ABCD را به‌ضلع n (n عدد صحیح مثبت) بنا کرده، مطابق شکل طولهای BB_1 و DD_1 را برابر با واحد جدا می‌کنیم. مساحت سطح محصور به $BB_1C_1D_1DC$ برابر خواهد

بود با:

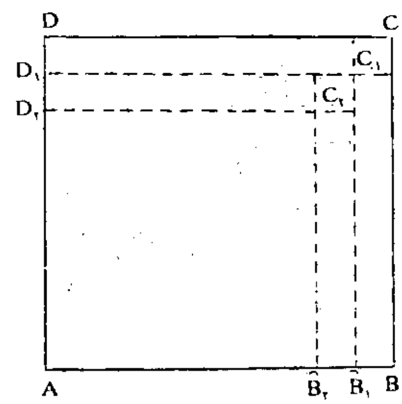
$2n-1$ اگر طولهای B_1B_2 و D_1D_2 را نیز برابر با واحد جدا نماییم مساحت سطح محصور به $B_1B_2C_2D_2D_1C_1$ برابر خواهد شد با $2(n-1)-1$ و با تکرار این عمل نتیجه خواهیم گرفت که سطح مربع ABCD برابر است با:

$$[2n-1]+[2(n-1)-1]+[2(n-2)-1]+\dots$$
$$+[4-1]+[2-1]$$

که برابر می‌شود با $2\Sigma n-n$ و چون مساحت سطح مربع به‌ضلع n برابر n^2 است پس:

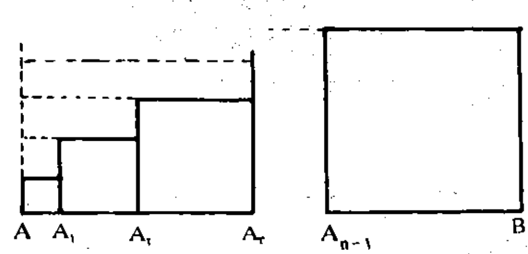
$$2\Sigma n-n=n^2 \quad , \quad \Sigma n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

شکل (۱)



۲ ـ محاسبهٔ Σn^2: قطعه خط AB به‌طول $AB=\Sigma n$ را درنظر می‌گیریم. بر این قطعه خط ابتدا از A قطعه خطهای $AA_1=1$ و $A_1A_2=2$ و... و $A_{n-1}B=n$ را جدا کرده روی هر یک از این قطعه خطها مربعی بنا می‌کنیم. مجموع سطوح این مربعها برابر با Σn^2 است.

شکل (۲)



اگر مجموع سطوح این مربعها را از سطح مستطیل به‌طول AB و به‌عرض n کم کنیم، مساحت سطح باقیمانده برابر است با:

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+[1+2+\dots+(n-1)]$$

یا به‌صورت دیگر:

$$\Sigma(n-1)+\Sigma(n-2)+\dots+\Sigma[n-(n-1)]$$

که برابر می‌شود با:

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\dots+$$
$$\frac{[n-(n-2)][n-(n-1)]}{2}$$

و به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{1}{2}[n^2-n+(n-1)^2-(n-1)+(n-2)^2-(n-2)+\dots]$$

و درنتیجه برابر است با:

$$\frac{1}{2}(\Sigma n^2-\Sigma n)$$

و چون سطح کل مستطیل فوق‌الذکر برابر $n.\Sigma n$ است پس:

$$\Sigma n^2+\frac{1}{2}(\Sigma n^2-\Sigma n)=n\Sigma n$$

و از آنجا به‌دست خواهد آمد:

$$\Sigma n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۳ ـ محاسبهٔ Σn^p: به‌فرض این که Σn^{p-1} معلوم باشد قطعه خط AB را به‌طول Σn^{p-1} اختیار کرده بر آن قطعه خطهای $AA_1=1^{p-1}$ و $A_1A_2=2^{p-1}$ و...و $A_{n-1}B=n^{p-1}$ را جدا کرده بر روی آنها مستطیلهایی می‌سازیم که ارتفاع آنها به‌ترتیب برابر با ۱ و ۲ و ۳ و ... و n باشد. مجموع سطوح این مربع مستطیلها برابر با Σn^p است و چنانچه مجموع این مساحتها را از مساحت مستطیل به‌طول AB و به‌عرض n کم کنیم، مساحت سطح باقیمانده برابر است با:

$$1^{p-1}+(1^{p-1}+2^{p-1})+\dots+$$
$$[1^{p-1}+2^{p-1}+\dots+(n-1)^{p-1}]$$

که برابر است با:

$$\Sigma(n-1)^{p-1}+\Sigma(n-2)^{p-1}+\dots+1$$

شکل (۳)