تابع

● احمد قندهاری

برای دانش آموزان پایه‌ی دوم و سوم

مفهوم تابع اولین بار در سال ۱۶۹۴ میلادی توسط لایپ‌نیتز بیان شد و سپس دانشمند بزرگ، اویلر آن را کمی دقیق‌تر بیان کرد. در آن زمان، دامنه و برد تابع‌ها، مجموعه‌ی اعداد حقیقی در نظر گرفته می‌شد. بعدها تعریف تابع دقیق‌تر شد و دامنه و برد تابع می‌توانست زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ باشد.

۱. حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A و B

اگر مجموعه‌های A و B زیر مجموعه‌هایی از R باشند، حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ شامل همه‌ی زوج‌های مرتبی است که مؤلفه‌ی اول آن‌ها عضو مجموعه‌ی A و مؤلفه‌ی دوم آن‌ها عضو مجموعه‌ی B باشند. برای مثال، اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{k,p\}$، آن‌گاه حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ به صورت زیر خواهد بود:

$$A \times B = \{(۱,k),(۱,p),(۲,k),(۲,p),(۳,k),(۳,p)\}$$

چون مجموعه‌ی $A \times B$ دارای شش عضو متمایز است و $۶۴ = ۲^۶$، پس مجموعه‌ی $A \times B$، ۶۴ زیرمجموعه دارد.

۲. رابطه

هر زیر مجموعه‌ای از $A \times B$ را یک رابطه از A به B گوییم. R را به عنوان علامت رابطه درنظر می‌گیریم. پس یک رابطه از A به B را به صورت: $R: A \to B$ نشان می‌دهیم.

۳. تعریف تابع

اگر مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه تابع f از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B که آن را به صورت $f: A \to B$ نشان می‌دهیم، زیر مجموعه‌ای از حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ است که هیچ دو زوج مرتب متمایز آن دارای مؤلفه‌ی اول مساوی نباشد. در مثال قبل داشتیم: $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{k,p\}$ و

$$A \times B = \{(۱,k),(۱,p),(۲,k),(۲,p),(۳,k),(۳,p)\}$$

حال اگر بنویسیم: $f: A \to B$ و $f = \{(۱,k),(۲,p)\}$، آن‌گاه f یک تابع از A به B است.

هم‌چنین، اگر بنویسیم: $g: A \to B$ و $g = \{(۱,k),(۲,k)\}$، آن‌گاه g هم یک تابع از A به B است.

و اگر بنویسیم: $h: A \to B$ و $h = \{(۱,k),(۲,p),(۳,k)\}$ آن‌گاه h هم یک تابع از A به B است.

اما چنان‌چه بنویسیم:

$t: A \to B$ و $t = \{(۱,p),(۲,k),(۱,k)\}$، آن‌گاه t یک تابع از A به B نیست، زیرا دو زوج متمایز $(۱,p)$ و $(۱,k)$ عضوهای مجموعه‌ی t هستند. چون مؤلفه‌های اول آن‌ها برابر است ولی مؤلفه‌ی دوم آن‌ها برابر نیست، پس t یک تابع از A به B نیست.

مثال: اگر f به صورت زیر تعریف شده باشد و f یک تابع شامل دو زوج مرتب متمایز باشد، آن‌گاه a و b را بیابید.

$$f = \{(۱, a^۲ - ab),(۳,b),(b-۱,۳)\}$$

حل: $b - ۱ = ۱ \Rightarrow b = ۲$

$a^۲ - ab = ۳ \Rightarrow a^۲ - ۲a - ۳ = ۰ \Rightarrow a = -۱$ یا $a = ۳$

توجه: اگر $b = ۴ \Rightarrow b - ۱ = ۳$، در نتیجه f تابع نخواهد شد.

۴. ضابطه‌ی تابع

فرض می‌کنیم:

$A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B = \{۲,۵,۱۰,۱۷,۲۰\}$.

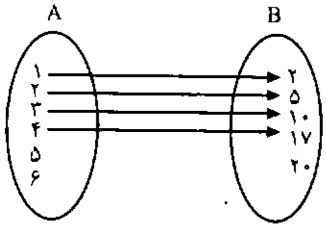
اگر $f: A \to B$ به صورت زیر باشد:

$$f = \{(1,2),(2,5),(3,10),(4,17)\}$$

با توجه به مطالب قبل، f یک تابع از A به B است.

مؤلفه‌های اول این تابع مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ است که زیر مجموعه‌ای از A محسوب می‌شود. اگر بخواهیم تابع را دقیق‌تر بیان کنیم، باید بگوییم: تابع $f: A \to B$، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که مؤلفه‌های اول این زوج‌های مرتب، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A است و هیچ دو زوج مرتب و متمایز آن، دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشند.

این تابع را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



ضابطه‌ی این تابع یک رابطه‌ی جبری است که عدد ۱ را به ۲ و عدد ۲ را به ۵ و عدد ۳ را به ۱۰ و عدد ۴ را به ۱۷ مربوط کند. پس ضابطه‌ی این تابع چنین است:

$$f(x) = x^2 + 1 \ , \ x \in N \ , \ x < 5$$

در حالت کلی ضابطه‌ی تابع، فرمولی است که توسط آن، مؤلفه‌های دوم زوج مرتب تابع، از روی مؤلفه‌های اول آن محاسبه می‌شود. اگر در حالت کلی زوج مرتب تابع f را $(x, f(x))$ بنامیم، آن‌گاه فرمول یا ضابطه‌ی تابع f به این صورت است: $y = f(x)$.

ریاضی علم دقیقی است و سهل‌انگاری در آن به هیچ وجه جایز نیست. در بسیاری از کتاب‌ها دیده می‌شود که می‌نویسند: «تابع $y = f(x)$»، در صورتی که باید گفته شود: «تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$»، زیرا $y = f(x)$ تابع نیست، بلکه ضابطه یا قانون تابع است.

توجه: اگر ضابطه‌ی تابع در دست باشد، به ازای هر x تعریف شده در آن، $f(x)$ به راحتی محاسبه می‌شود، ولی یافتن ضابطه‌ی تابع از روی زوج مرتب تابع گاهی مشکل است.

مثال: اگر تابع f به صورت $f = \{(1,1),(2,6)(0,0)\}$، و ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f(1) = a + b + c = 1 \Rightarrow a + b = 1 \\ f(2) = 4a + 2b + c = 6 \Rightarrow 4a + 2b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \ , \ b = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - x \ , \ x \in N \ , \ x \in \{0,1,2\}$$

تعریف تابع با زوج مرتب، تعریف درستی است، ولی کارایی زیادی در حل مسائل ندارد. به همین علت تعریف کامل‌تری از تابع ارائه می‌شود.

۵. تعریف تابع

یک رابطه از IR به IR بین x و y مانند $y=f(x)$ را، وقتی یک تابع از x به y گوییم که: به ازای هر x، حداکثر یک مقدار برای y به دست آید.

مثال: رابطه‌ی $f: IR \to IR$ با ضابطه‌ی $y = f(x) = \sqrt{x-1}$ یک تابع است، زیرا اگر به x هر عددی عضو IR را نسبت دهیم، یا یک عدد برای y به دست می‌آید یا عددی برای y به دست نمی‌آید.

$x = 0 \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = 1 \Rightarrow y = 0$
$x = -1 \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = 2 \Rightarrow y = 1$
$x = -\sqrt{2} \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = 3 \Rightarrow y = \sqrt{2}$
$x = -2 \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$
$x = -4 \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = 4 \Rightarrow y = \sqrt{3}$

در این تابع عددی عضو IR وجود ندارد که اگر آن را به x نسبت دهیم، دو مقدار یا سه مقدار یا... برای y به‌دست آید.

الف) مجموعه‌ی $\{x | x \in IR \ , \ x \ge 1\}$، که به ازای هر x عضو آن، فقط و فقط یک مقدار برای y به‌دست می‌آید؛ این مجموعه را دامنه‌ی تعریف تابع یا به‌طور خلاصه دامنه‌ی تابع می‌گوییم.

ب) این تابع در مجموعه‌ی $\{x | x \in IR \ , \ x < 1\}$ تعریف نشده است، یعنی به ازای هر x از این مجموعه، مقداری برای y به‌دست نمی‌آید.

ج) مجموعه‌ی $\{y | y \in IR \ , \ y \ge 0\}$ را بُرد تابع گوییم.

برای آشنایی بیشتر با انواع تابع، به مثال بعدی توجه کنید.

مثال: روابط زیر از $IR \to IR$ بر حسب x و y با ضابطه‌های زیر، معادله‌ی یک تابع از x به y است.

۱) $y = 2$	۲) $y = 2x - 5$
۳) $y = x^2 - 2x$	۴) $y = x^3 + 3x - 1$
۵) $y = x^4 - 4x^2$	۶) $y = \frac{1}{x}$
۷) $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$	۸) $y = \frac{x^2 - x}{x - 4}$

۹) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ ۱۰) $y=\sqrt{x-2}$

۱۱) $y=\sqrt{x^2-2x}$ ۱۲) $y=\sqrt{-x^2+4x}$

۱۳) $y=\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$ ۱۴) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

۱۵) $y=\sqrt[3]{x^3-1}$ ۱۶) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$

۱۷) $y=|2x-1|$ ۱۸) $y=|x^2-2x|$

۱۹) $y=\lfloor x-1\rfloor$ ۲۰) $y=\sin^2 x-\sin x$

۲۱) $y=\cos^2 x-1$ ۲۲) $y=\tan x+\cot x$

۲۳) $y=\dfrac{\sin x}{\sin x-1}$ ۲۴) $y=\dfrac{\cos^2 x}{\cos x-1}$

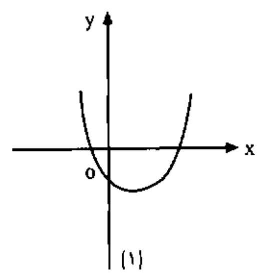
۲۵) $y=\mathrm{Arc}\sin(2x-1)$ ۲۶) $y=\mathrm{Arc}\cos(2x+3)$

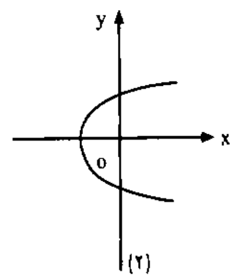
۲۷) $y=\mathrm{Arc}\tan(x-1)$ ۲۸) $y=\mathrm{Arc}\cot\dfrac{x}{x-1}$

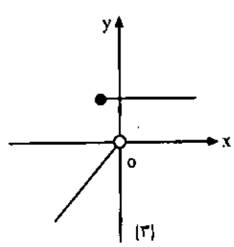
۲۹) $y=\log(2x-1)$ ۳۰) $y=2^x$

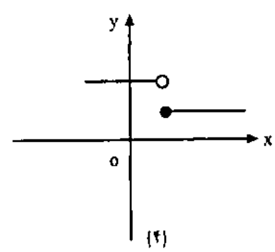
سؤال: یک نمودار در صفحه‌ی محورهای مختصات xoy، چه وقت نمودار یک تابع است؟

پاسخ: وقتی که هر خط عمود بر محور xها، آن نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.









شکل‌های ۱ و ۴ نمودارهای تابع‌اند، ولی شکل‌های ۲ و ۳ نمودارهای تابع نیستند.

مثال: نشان دهید، روابط ذیل $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بین x و y یک تابع از x به y نیست.

باید نشان دهیم، حداقل برای یکی از x ها، دو مقدار یا بیشتر برای y به‌دست می‌آید.

۱) $y=\pm\sqrt{2x-1}$ $\quad x=2\Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$

۲) $|y|=4x-1$ $\quad x=1\Rightarrow |y|=3\Rightarrow y=\pm 3$

۳) $\lfloor y\rfloor=x-1$ $\quad x=2\Rightarrow \lfloor y\rfloor=1\Rightarrow 1\le y<2$

۴) $y^3-4y-x=0$ $\quad x=0\Rightarrow y^3-4y=0\Rightarrow y(y^2-4)=0$

$\Rightarrow y=0\ ,\ y=\pm 2$

۶. تابع حقیقی

بنابر قرارداد، تابعی را حقیقی گوییم که برد آن زیرمجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد. ولی ما با تابع‌هایی سروکار داریم که دامنه و برد آن‌ها زیرمجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد.

۷. تابع چند ضابطه‌ای

هرگاه دامنه‌ی یک تابع را به چند زیرمجموعه‌ی جدا از هم افراز کنیم، به طوری‌که اجتماع آن‌ها برابر مجموعه‌ی دامنه تابع باشد، و روی هر یک از زیرمجموعه‌های دامنه، ضابطه‌ای مجزا تعریف کنیم، در این صورت این تابع را تابع چند ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال: تابع f، $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\ge 1\\ 1-x^2 & x<1\end{cases}$$

این تابع را یک تابع دو ضابطه‌ای و تابع y، $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$y(x)=\begin{cases}1+x & x>0\\ 2 & x=0\\ 1-x & x<0\end{cases}$$

را یک تابع سه ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=2|x-1|+x$ را به دو ضابطه تبدیل کنید. $D_f=\mathbb{R}$

حل:

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$

$$x\ge 1\Rightarrow |x-1|=x-1$$

$$\Rightarrow f(x)=2(x-1)+x\Rightarrow f(x)=2x-2+x$$

$$\Rightarrow f(x)=3x-2$$

$$x<1\Rightarrow |x-1|=1-x$$

$$f(x)=2(1-x)+x\Rightarrow$$

$$f(x)=2-2x+x\Rightarrow f(x)=1-x$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}3x-2 & x\ge 1\\ 1-x & x<1\end{cases}$$