● میرشهرام صدر

برای دانش‌آموزان سال دوم

تابع چندجمله ای

چندجمله ای ....

هر عبارت جبری با تعدادی جملات متناهی متشکل از متغیرها و مقادیر ثابتی که بین آن‌ها از عمل‌های جمع، تفریق و ضرب استفاده شده باشد، یک چندجمله‌ای است. نکته‌ی مهم در چندجمله‌ای‌ها این است که توان متغیرها در آن‌ها عددهای صحیح نامنفی است. برای مثال، عبارت جبری $x^2 - 3x + 2$ چندجمله‌ای است که از سه جمله تشکیل شده است. اما عبارت جبری $x^2 - \frac{4}{x} + 3x^{\frac{5}{2}}$ چندجمله ای نیست، زیرا در عبارت $\frac{4}{x}$ که می‌توان آن را به صورت $4x^{-1}$ نوشت، یا در عبارت $3x^{\frac{5}{2}}$، توان x عددی صحیح و نامنفی نیست.

صورت دیگر چندجمله ای........................

هر عبارتی که به‌صورت حاصل ضرب چندجمله‌ای‌ها باشد، می‌تواند با استفاده از قانون توزیع‌پذیری در ضرب چندجمله‌ای‌ها، به‌صورت یک چندجمله‌ای نوشته شود. برای مثال، عبارت جبری $(x+1)^3$ یک چندجمله‌ای به این صورت است:

$$\begin{aligned}(x+1)^3 &= (x+1)(x+1)(x+1)\\ &= (x^2+2x+1)(x+1)\\ &= x^3+3x^2+3x+1\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که عبارت $\frac{1}{(x+2)^2}$ چندجمله‌ای نیست، زیرا:

$$\frac{1}{(x+2)^2} = (x+2)^{-2}$$

در عبارت $(x+2)^{-2}$ توان پرانتز منفی است.

معادلات چندجمله ای........................

به معادله‌ای که در آن یک چندجمله‌ای با چندجمله‌ای دیگر برابر شده باشد، معادله‌ی چندجمله‌ای می‌گوییم.

برای مثال معادله‌ی:

$$۳x^۲ - ۳x + ۲ = x^۲ + ۱ \qquad (۱)$$

یک معادله‌ی چندجمله‌ای است. هدف از حل این معادله، یافتن مقادیری برای متغیر x است که وقتی آن‌ها را در معادله قرار می‌دهیم، به یک برابری درست برسیم. برای این منظور داریم:

$$۳x^۲ - ۳x + ۲ - x^۲ - ۱ = ۰$$
$$۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۱)(۲x - ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow x = ۱, x = \frac{۱}{۲}$$

این معادله دو جواب دارد که آن‌ها را ریشه‌های معادله‌ی ۱ می‌گوییم. زیرا وقتی آن‌ها را در این معادله قرار دهیم، به یک برابری درست می‌رسیم. (خودتان امتحان کنید.)

معادله‌ی چندجمله‌ای می‌تواند به صورت یک اتحاد بین چندجمله‌ای‌ها باشد؛ مانند:

$$(x - ۱)(x + ۱) = x^۲ - ۱$$

این معادله دارای بی‌شمار جواب است، زیرا برای هر مقدار حقیقی که جای‌گزین x کنیم، به یک برابری همیشه درست می‌رسیم. (خودتان امتحان کنید.)

تابع چندجمله‌ای ....

هر تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

که در آن a_iها اعداد حقیقی ثابت باشند، یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی عدد صحیح و نامنفی n (با شرط $a_n \neq ۰$) برحسب متغیر x است؛ برای مثال: $f_۱(x) = ax + b$ $(a \neq ۰)$ ضابطه‌ی یک تابع دوجمله‌ای درجه اول و $f_۲(x) = ax^۲ + bx + c$ $(a \neq ۰)$ ضابطه‌ی یک تابع سه‌جمله‌ای درجه دوم است.

می‌دانیم، نمودار تابع $f_۱$ یک خط راست و نمودار تابع $f_۲$ یک سهمی با راس به طول $x = -\frac{b}{۲a}$ و محور تقارن به معادله‌ی $x = \frac{-b}{۲a}$ است. اگر $a > ۰$ باشد، سهمی در راس خود دارای می‌نیمم است و اگر $a < ۰$، دارای ماکزیمم خواهد بود.

توجه داشته باشید که $x = \frac{-b}{۲a}$ طول نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم است و برای محاسبه‌ی عرض این نقطه کافی است در ضابطه‌ی f به جای xها مقدار $\frac{-b}{۲a}$ را قرار دهیم تا عرض نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم که اصطلاحاً به آن مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم گفته می‌شود، به دست آید.

مثال: تابع درجه دوم f با ضابطه‌ی $f(x) = ۲x^۲ - ۴x + ۱$ مفروض است. راس سهمی و مقدار می‌نیمم تابع f را بیابید. (چون $a = ۲ > ۰$ پس سهمی در راس خود می‌نیمم دارد.)

حل: در این تابع درجه‌ی ۲ داریم: $a = ۲$ ، $b = -۴$ و $c = ۱$. پس:

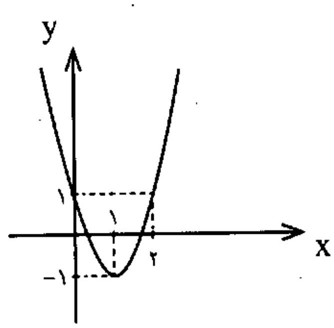
$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۴}{۴} = ۱ \quad \text{طول نقطه‌ی می‌نیمم}$$

$$f(۱) = ۲ \times (۱)^۲ - ۴ \times (۱) + ۱ = -۱ \quad \text{مقدار می‌نیمم تابع}$$

در واقع برای تابع f در دامنه‌ی تعریف خود که $\mathbb{R}$ است، کم‌ترین مقدار ممکن با ۱- برابر است.

به عبارت دیگر، برای هر $k \in \mathbb{R}$ همواره داریم: $f(k) \geq -۱$.

نمودار این سهمی به صورت زیر است:



x	۰	۱	۲
y	۱	-۱	۱

دامنه‌ی توابع چند جمله‌ای، مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است. در مثال بالا، هر عدد حقیقی دل‌خواهی را می‌توان جای‌گزین x در تابع $f(x)$ کرد. بنابراین: $D_f = \mathbb{R}$.

از طرف دیگر، با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار، یعنی $y = f(x)$ همواره بزرگ‌تر یا برابر با ۱- است. در نتیجه با توجه به نمودار، برد این تابع $y \geq -۱$ است. بنابراین: $R_f = [-۱, +\infty)$.

طول محل برخورد نمودار تابع با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم، که برای یافتن آن‌ها کافی است معادله‌ی $f(x) = ۰$ را حل کنیم. در مثال قبل داریم:

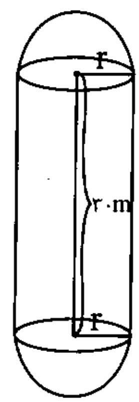
$$f(x) = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{۴ \pm \sqrt{۸}}{۴} = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۲}}{۴} = \frac{۲ \pm \sqrt{۲}}{۲} \quad \text{صفرهای تابع}$$

در نتیجه، محل برخورد نمودار این تابع با محور xها، نقاط

$A_1 \left| \begin{array}{l} \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{array}\right.$ و $A_2 \left| \begin{array}{l} \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{array}\right.$ هستند.

مثال: یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

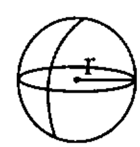


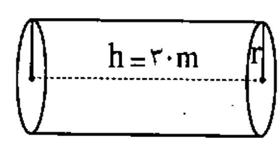
حل: حجم این تانکر از یک استوانه و یک کره که هر دو به شعاع r هستند، تشکیل شده است.

بنابراین داریم:

حجم کره به شعاع r : $y_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$

حجم استوانه به شعاع r و ارتفاع $h = 30$: $y_2 = \pi r^2 h = 30\pi r^2$





حجم تانکر $f(x) = y_1 + y_2 \Rightarrow f(x) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 30\pi r^2$

$\Rightarrow f(x) = \pi r^2(\frac{4}{3}r + 30)$

تمرین: مخزنی از یک استوانه و دو مخروط به شعاع مقطع ۵ در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه و مخروط‌ها h باشد، حجم این مخزن را بر حسب تابعی از h بنویسید.

راهنمایی: حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h، $\frac{1}{3}$ حجم استوانه به شعاع مقطع r و ارتفاع h است.

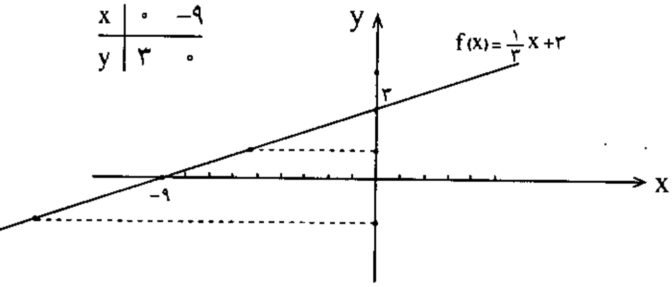
مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و دامنه و برد هر یک را به دست آورید.

۱) $f(x) = \frac{1}{3}x + 3$ ۲) $g(x) = -x^2 + 4x - 3$

حل:

۱. $f(x)$ تابع چند جمله‌ای است، پس: $D_f = \mathbb{R}$. چون این تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی اول است، بنابراین نمودار آن یک خط است که برای رسم آن از دو نقطه استفاده می‌کنیم:

x	0	-9
y	3	0



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم، عرض هر نقطه روی نمودار می‌تواند یک عدد حقیقی از بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ باشد. بنابراین $R_f = \mathbb{R}$.

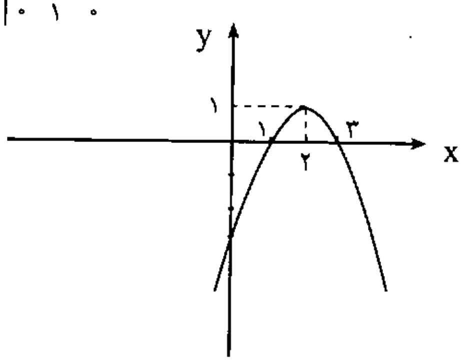
۲. $g(x)$ تابع چند جمله‌ای است، پس: $D_g = \mathbb{R}$. چون این تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی دوم است، بنابراین نمودار آن یک سهمی است.

طول نقطه‌ی ماکزیمم $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$

مقدار ماکزیمم تابع $f(2) = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1$

برای رسم سهمی از مختصات چند نقطه از سهمی استفاده می‌کنیم:

x	1	2	3
y	0	1	0



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی سهمی، همواره کوچک‌تر یا برابر با ۱ است؛ یعنی همواره $f(x) \leq 1$.

در نتیجه داریم: $R_f = (-\infty, 1]$.

مثال: فرض کنیم $f(x)$ یک تابع چند جمله‌ای درجه اول باشد؛ به طوری که در آن $f(-1) = 2$ و $f(2) = -3$. ضابطه‌ی

این تابع را پیدا کنید.

حل: می‌دانیم ضابطه‌ی این تابع به صورت $f(x)=ax+b$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{matrix} f(-1)=2 \Rightarrow a(-1)+b=2 \\ f(2)=-3 \Rightarrow a(2)+b=-3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}-a+b=2\\ 2a+b=-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2a+2b=4\\ 2a+b=-3\end{cases}$$
$$3b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

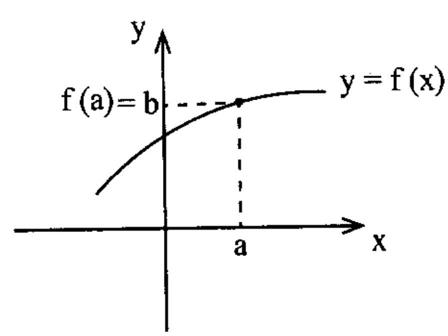
$$b=\frac{1}{3} \Rightarrow -a+\frac{1}{3}=2 \Rightarrow a=-\frac{5}{3} \Rightarrow f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$$

مثال: هرگاه $f(x)=3x-2$ و نقطه‌ی $(m+1,\ 2m-1)$ روی نمودار تابع $f(x)$ باشد، مقدار m را بیابید.

حل: چون این نقطه روی نمودار تابع است، بنابراین داریم:

$$f(m+1)=2m-1 \Rightarrow 3(m+1)-2=2m-1 \Rightarrow m=-2$$

نکته: هر گاه نقطه‌ی (a,b) روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، در این صورت داریم: $f(a)=b$.



مثال: فرض کنیم $f(x)=2x^2-1$ مطلوب است:

الف) $f(\sqrt{2})$ ب) $f(2x)$ ج) $f(x+1)$

حل:

الف) کافی است به جای x در تابع $f(x)$، عدد $\sqrt{2}$ را قرار دهیم:

$$f(\sqrt{2})=2(\sqrt{2})^2-1=4-1=3$$

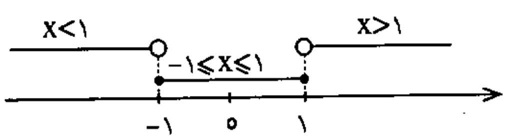
ب)
$$f(2x)=2(2x)^2-1$$
$$=8x^2-1$$

ج)
$$f(x+1)=2(x+1)^2-1$$
$$=2(x^2+2x+1)-1=2x^2+4x+1$$

تابع چند ضابطه‌ای

هر گاه دامنه‌ی یک تابع را به چند مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم کنیم، به طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنه‌ی تابع باشد و روی هر مجموعه ضابطه‌ای متمایز تعریف کنیم، در این صورت یک تابع چند ضابطه‌ای به دست می‌آید.

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x)$ برابر با IR است. ابتدا به صورت زیر، این دامنه را به سه مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم می‌کنیم:



اکنون روی هر مجموعه، ضابطه‌ای متمایز به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ 2 & -1\le x\le 1\\ -2x & x<-1\end{cases}$$

در این صورت به $f(x)$ تابع‌ای سه ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال: نمودار تابع سه ضابطه‌ای مثال قبل را رسم کنید و برد آن را به دست آورید.

برای رسم نمودار این تابع باید نمودار هر ضابطه را در محدوده‌ی دامنه‌اش رسم کنیم. به همین منظور، $f(x)=2$ را برای $x>1$، $f(x)=2$ را برای $-1\le x\le 1$ و $f(x)=-2x$ را برای $x<-1$ رسم می‌کنیم:

$f(x)=2x;$

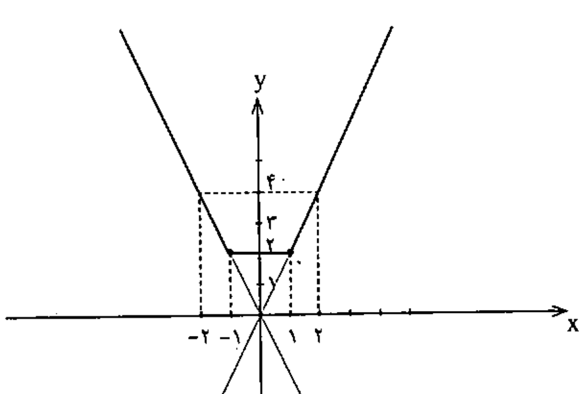
x	۱	۲
y	۲	۴

$f(x)=2;$

x	-۱	۱
y	۲	۲

$f(x)=-2x;$

x	-۱	-۲
y	۲	۴



توجه: نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کردیم و روی هر نمودار، قسمت‌هایی را که در دامنه است، پر رنگ کردیم. ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار این تابع سه ضابطه‌ای، همواره بزرگ‌تر یا برابر با ۲ است. پس داریم:

$R_f=[۲,+\infty)$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۱ & x\ge ۰\\ ۱-۲x & x<۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

حاصل $f(x^۲+۱)$ ، $f(-\sqrt{۲})$ و $f(-\frac{۱}{۲}x^۲-۱)$ را به دست آورید.

حل: چون همواره $x^۲+۱>۰$ ، بنابراین از ضابطه‌ی اول برای محاسبه‌ی $f(x^۲+۱)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x^۲+۱)=-(x^۲+۱)^۲+۱=-(x^۴+۲x^۲+۱)+۱=-x^۴-۲x^۲$$

چون $-\sqrt{۲}<۰$ ، بنابراین برای محاسبه‌ی $f(-\sqrt{۲})$ از ضابطه‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\sqrt{۲})=۱-۲(-\sqrt{۲})=۱+۲\sqrt{۲}$$

چون $-\frac{۱}{۲}x^۲<۰$ بنابراین $-\frac{۱}{۲}x^۲-۱<۰$. در نتیجه برای محاسبه‌ی $f(-\frac{۱}{۲}x^۲-۱)$ از ضابطه‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\frac{۱}{۲}x^۲-۱)=۱-۲(-\frac{۱}{۲}x^۲-۱)=۱+x^۲+۲=x^۲+۳$$

تابع قدر مطلق ....

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ را تابع قدر مطلق می‌نامیم و آن را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای تعریف می‌کنیم:

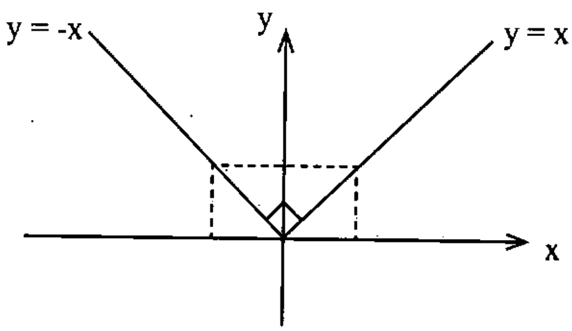
$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\ge ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$$

این تابع به هر عضو از دامنه‌اش ($\mathbb{R}$)، قدر مطلق آن را نسبت می‌دهد. در حقیقت، حاصلِ تأثیر این تابع روی هر عدد حقیقی، یک عدد حقیقی نامنفی است. برای مثال:

$f(۳)=|۳|=۳;\ \ f(-۳)=|-۳|=-(-۳)=۳;\ \ f(۰)=|۰|=۰$

نمودار این تابع به صورت زیر است:

x	-۱	۰	۱
y	۱	۰	۱



دامنه‌ی تعریف این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. از طرف دیگر، عرض هر نقطه واقع بر این تابع، بزرگ‌تر یا برابر صفر است. یعنی همواره $y\ge ۰$. در نتیجه برد این تابع $R_f=[۰,\infty)$ است.

نکته ۱. می‌توان نمودار این تابع را یک زاویه قائمه دانست که رأس آن منطبق بر مبداء و دو ضلع این زاویه نیمسازهای ربع اول و دوم محورهای مختصات هستند.

نکته ۲. تابع قدرمطلق یک به یک نیست، زیرا خطی موازی محور طول وجود دارد که نمودار آن را در دو نقطه قطع می‌کند.

تمرین: نمودار هر یک از تابع‌های چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد هر کدام را به دست آورید.

۱. $f(x)=\begin{cases}x^۲ & -۱\le x\le ۱\\ -x+۲ & x>۱\\ x+۲ & x<-۱\end{cases}$

۲. $g(x)=\begin{cases}-x^۲ & -۱\le x\le ۱\\ x-۲ & x>۱\\ -x-۲ & x<-۱\end{cases}$

۳. تابع $s(x)$ به تابع علامت معروف است.

$s(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$

۴.

$$h(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

۵. با توجه به تابع علامت $s(x)$ که در تمرین ۳ ارائه شده است، مطلوب است محاسبه‌ی $s(x^2)-s(x)$.

جواب ۵ : $s(x^2)-s(x)=\begin{cases} 0 & x\geq 0 \\ 2 & x<0 \end{cases}$.

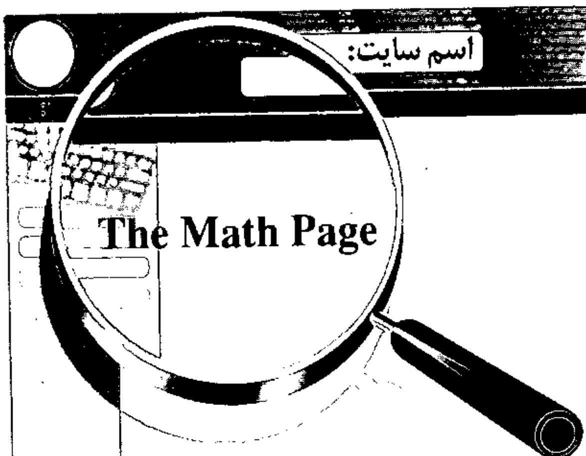
۶. اگر $f(x)=\begin{cases} 4 & x>2 \\ -2 & x\leq 2 \end{cases}$، آن‌گاه حاصل $-5f(\sqrt{3})+4f(\frac{1}{100})+f(100)$ را بیابید.

جواب ۶ :

۷. هرگاه داشته باشیم $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x>2 \\ 4 & x=2 \\ x^2+1 & x<2 \end{cases}$، در این صورت مطلوب است محاسبه‌ی $f(\sqrt{2})$، $f(4)$، $f(2)$ و $f(k-1)$.

جواب ۷ : $f(2)=4$ و $f(k-1)=\begin{cases} 2k-3 & k>3 \\ 4 & k=3 \\ k^2-2k+2 & k<3 \end{cases}$

احسان یارمحمدی



معرفی سایت های ریاضی جهان

آدرس اینترنتی سایت: htttp://www.themathpage.com

صفحه‌ی اصلی این سایت شامل عنوان‌های زیر است، هر یک از این عنوان‌ها شامل زیر عنوان‌هایی است که هر کدام حاوی مطالبی مفصل می‌باشند.

* مهارت در حساب (Skill in Arithmetic)
* هندسه مسطحه (Plane Geometry)
* مهارت در جبر (Skill in Algebra)
* عناوینی در مثلثات (Topics in Trigonometry)
* عناوینی در حسابان مقدماتی (Topics in Pre-Calculus)
* رویکردی به حسابان (An Approach to Calculus)
* سیر تکامل اعداد حقیقی (The Evolution of the Real Numbers)

در پایین صفحه اصلی سایت، آدرس الکترونیکی

E-mail:themathpage@ncy.rr.com

وجود دارد که کاربر می‌تواند از طریق آن با سایت ارتباط داشته باشد.