تابع های متناوب و روش های محاسبهٔ دورهٔ تناوب آن ها

۲

برای دانش آموزان سال سوم متوسطه

هوشنگ شرقی

در شمارهٔ قبل، دربارهٔ تابع های متناوب بحث کردیم و ۱۲ روش از روش های محاسبهٔ دورهٔ تناوب آن ها را بیان کردیم. اکنون مطلب را ادامه می دهیم:

۱۳. اگر f و g توابعی متناوب با دورهٔ تناوب T_1 و T_2 باشند و T_1 و T_2 دارای کوچک ترین مضرب مشترک نباشند (مثلاً یکی گویا و دیگری گنگ باشد)، آن گاه $f \pm g$ و $f.g$ و f/g متناوب نیستند.

مثال: توابع $f(x)=\sin 2x$ و $g(x)=\cos \pi x$ هر دو متناوب و به ترتیب با دورهٔ تناوب $T_1=\pi$ و $T_2=2$ هستند. ولی مجموع آن ها، یعنی تابع با ضابطهٔ $h(x)=\sin 2x+\cos \pi x$ متناوب نیست.

۱۴. توابع با ضابطهٔ $f(x)=kx-[kx]$ و $f(x)=[kx]+[-kx]$ با دورهٔ تناوب $(k \neq 0)$ $T=\frac{1}{k}$ متناوبند.

$$f(x)=kx-[kx] \Rightarrow f(x+t)=k(x+t)-[k(x+t)]$$
$$=kx+kt-[kx+kt]=f(x)=kx-[kx] \Rightarrow$$
$$kt-[kx+kt]=0-[kx]$$

اگر $Kt \in Z$ باشد، می تواند از جزء صحیح خارج و از Kt بیرون جزء صحیح کم شود و یک برابری صحیح به دست آید. بنابراین، به ازای $Kt \in Z$ تابع متناوب است و چون کوچک ترین عدد صحیح و مثبت ۱ است. پس $Kt=1$ و $t=\frac{1}{k}$ استدلال برای تابع دوم، به عهدهٔ خواننده است.

مثال: دورهٔ تناوب هریک از توابع زیر را به دست آورید:

۱) $f(x)=2x-[2x]$

۲) $f(x)=tg\frac{\pi x}{2}+[3x]+[-3x]$

۳) $f(x)=tg\pi x-\cot g\pi x+3x-[3x]$

حل:

۱. مطابق قضیهٔ گفته شده، داریم: $T=\frac{1}{2}$

۲. برای $tg\frac{\pi x}{2}$، $T_1=2$ و برای $[3x]+[-3x]$،

$T_2 = \frac{1}{3}$ است و از آن‌جا :

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 = \frac{6}{3} \\ T_2 = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{6}{3} \quad T = 2$$

۳. برطبق قضیهٔ ۱۱، تابع $g(x) = tg\pi x - \cot g\pi x$ با دورهٔ تناوب $T_1 = \frac{1}{2}$ متناوب است و $h(x) = 3x - [3x]$ نیز، با دورهٔ تناوب $T_2 = \frac{1}{3}$ متناوب است. بنابراین، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \\ T_2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{6}{6} \quad T = 1$$

تمرین: دورهٔ تناوب توابع زیر را به‌دست آورید:

۱) $f(x) = 3x - [3x] - \sin^3 \frac{\pi x}{6}$

۲) $f(x) = 5x - [3x] - [2x] + \sin^2 \frac{\pi x}{2}$

۳) $f(x) = [4x] + [-4x] + tg\frac{\pi x}{3} - \cot g\frac{\pi x}{3} - \left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$

۱۵. تابع با ضابطهٔ $f(x) = (-1)^{kx}$ با دورهٔ تناوب $T = \frac{2}{k}$ متناوب است (برهان به عهدهٔ خواننده).

مثال۱: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = (-1)^{2x}$ برابر با $T = \frac{2}{2} = 1$ است.

مثال: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = (-1)^x (x - [x])$ را به‌دست آورید.

حل: تابع با ضابطهٔ $(-1)^x$ با دورهٔ تناوب $T_1 = 2$ متناوب است و تابع با ضابطهٔ $x - [x]$ با دورهٔ تناوب $T_2 = 1$ متناوب است. بنابراین: $T=2$

تمرین: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $g(x) = (-1)^{2x}([3x] + [-3x])$ را به دست آورید.

۱۶. تابع ثابت، تابعی است متناوب با دورهٔ تناوب هر عدد حقیقی و مثبت.

برهان: روشن است که برای $f(x) = c$، $f(x+t) = c$ است. پس همواره $f(x+t) = f(x)$ کافی است $T > 0$ باشد.

این نمونه، نشان می‌دهد که ممکن است کوچک‌ترین دورهٔ تناوب را نتوان مشخص کرد.

حالت‌های خاص در تعیین دورهٔ تناوب توابع

طبقه‌بندی حالت‌های گوناگون در تعیین دورهٔ تناوب توابع، نمی‌تواند تمام کنندهٔ بحث باشد ودر همه حال، باید نگاهی هم به تعریف اصلی تابع متناوب داشت. مثال‌های زیر می‌توانند گویای این مطلب باشند.

مثال: می‌خواهیم دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=tgx.cotgx$ را تعیین کنیم.

حل: اگر به این تابع، به چشم یک تابع مثلثاتی مرکب از tgx و cotgx بنگریم، شاید بتوان در نظر اول، دورهٔ تناوب آن را $T = \pi$ گرفت. ولی با کمی دقت می‌توان دریافت که با تبدیل x به $x + \frac{\pi}{2}$، tgx به cotgx- و cotgx به tgx- تبدیل می‌شوند. بنابراین حاصل ضرب آن‌ها تغییری نمی‌کند. یعنی: $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x)$. که دورهٔ تناوب آن، $T = \frac{\pi}{2}$ است. از طرف دیگر، ممکن است به نظر آید که این تابع، با تابع ثابت $f(x)=1$ برابر است که در این صورت دورهٔ تناوب آن، هر عدد حقیقی و مثبتی می‌تواند باشد. ولی چنین نیست. چراکه دامنهٔ تعریف این تابع با دامنهٔ تعریف تابع ثابت $f(x)=1$ یکسان نیست.

نمودار این تابع، ما را به درستی نتیجه‌گیری خود مطمئن می‌سازد؛ ابتدا دامنهٔ تعریف این تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = tgx \cot gx \Rightarrow \sin x \neq 0 \;,\; \cos x \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq k\pi \;,\; x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

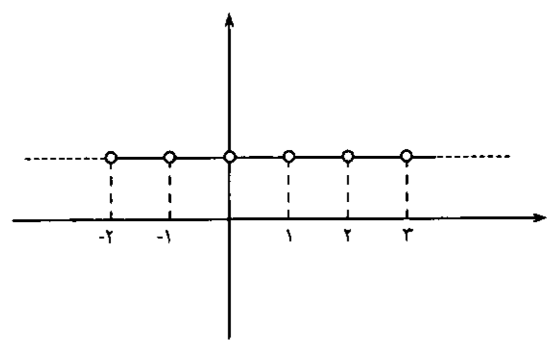
مجموعه جواب مخرج کسرها را، می‌توان به صورت $x = \frac{k\pi}{۲}$ در نظر گرفت؛ یعنی:

$$Df = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{۲} | k \in Z \right\}$$

بنابراین، تابع فوق با تابع معرفی شده در زیر، برابر است:

$$f(x) = ۱ \quad x \neq \frac{k\pi}{۲} \quad k \in Z$$

و نمودار آن، همان خط راست y=۱ است که در $x = \frac{k\pi}{۲}$ دارای نقاط انفصال است:



و این نمودار نشان می‌دهد که دورهٔ تناوب تابع $\frac{\pi}{۲}$ است.

مثال: می‌خواهیم دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sin^۴ x + \cos^۲ x$ را تعیین کنیم.

حل: اگر از قضیه‌های ۲ و ۴ برای به‌دست آوردن دورهٔ تناوب این تابع استفاده کنیم، به‌دست می‌آید: $T = \pi$. که دورهٔ تناوبی برای f به حساب می‌آید. ولی کوچک‌ترین دورهٔ تناوب این تابع $T = \frac{\pi}{۲}$ است؛ زیرا $f(x + \frac{\pi}{۲}) = \cos^۴ x + \sin^۲ x$ که به صورت زیر می‌توان ثابت کرد، برابر ضابطهٔ f(x) است:

$$\cos^۴ x + \sin^۲ x = (۱ - \sin^۲ x)^۲ + \sin^۲ x =$$
$$۱ + \sin^۴ x - ۲\sin^۲ x + \sin^۲ x = \sin^۴ x + ۱ - \sin^۲ x =$$
$$\sin^۴ x + \cos^۲ x = f(x)$$

چند تعریف دیگر

تابع پاد متناوب یا ضد متناوب(۱)

تابع f را پاد متناوب گوئیم؛ هرگاه برای هر $x \in Df$، حداقل یک مقدار مثبت T یافت شود؛ به قسمی که: $f(x+T)=f(x)$. T را دورهٔ تناوب آن می‌خوانیم.

برای مثال تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin x$ و دورهٔ تناوب $T = \pi$، پاد متناوب است. یعنی:

$$f(x + \pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x = -f(x)$$

تمرین۱: نشان دهید هریک از توابع $f(x) = \cos ۲x$ و $g(x) = tg^۳ x$ پاد متناوب هستند و دورهٔ تناوب آن‌ها را به دست آورید.

تمرین۲: ثابت کنید توابع با ضابطه‌های $f(x) = \sin^۲ x$ و $g(x) = x - [x]$ پاد متناوب نیستند؛ ولی تابع با ضابطهٔ $f(x) = (-۱)^x$ پاد متناوب است.

تابع شبه‌متناوب(۲)

تابع f را شبه‌متناوب گوئیم؛ هرگاه برای هر $x \in Df$، دو مقدار مثبت T و T′ وجود داشته باشند؛ به قسمی که داشته باشیم:

$$f(x + t) = f(x) + T'$$

برای مثال، تابع f با ضابطهٔ $f(x) = [x]$ شبه متناوب است و در آن $T = T' = ۱$؛ زیرا اگر $f(x + t) = f(x) + T'$ باشد، می‌توان نوشت:

$$[x + T] = [x] + T'$$

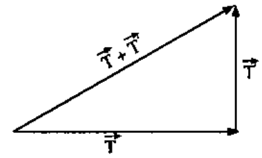
به روشنی می‌توان تشخیص داد که لازم است $T = T' \in Z$ باشد و از آن‌جا کوچک‌ترین مقدار T و T′ مساوی ۱ است.

تمرین: نشان دهید توابع با ضابطه‌های $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = x + \sin x$ هردو شبه متناوب هستند و مقادیر T و T′ را برای آن‌ها بیابید.

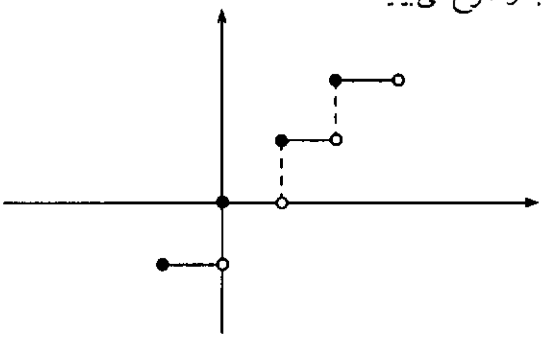
۱۷. تعبیر هندسی تابع شبه‌متناوب

تابع شبه‌متناوب نیز مانند تابع متناوب، خاصیت انتقالی دارد و نمودار آن را می‌توان در یک فاصله به طول T رسم

کرد. (مثلاً در فاصلهٔ $[0,T]$)، آن‌گاه آن را با یک بردار در جهت محور xها، به اندازهٔ طول T و با بردار دیگری در جهت محور yها به اندازهٔ طول T'، انتقال داد. یا این‌که با بردار برآیند این دو بردار، انتقال داد:

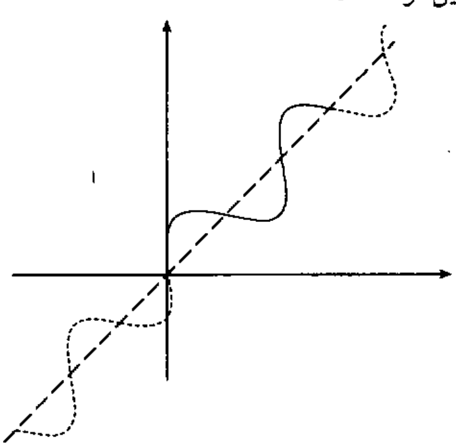


این موضوع را در نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$، به وضوح می‌بینید:



هریک از پاره‌خط‌ها را می‌توان با یک بردار به طول $\sqrt{2}$ در امتداد خطی که با محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد، رسم کرد تا تمام نمودار تابع به دست آید:

همچنین در تابع شبه‌متناوب $f(x)=x+\sin x$ نیز همین گونه است:



در واقع، اگر این تابع حول محور xها و محور yها 45° در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، نمودار آن، به یک تابع متناوب تبدیل می‌شود.

ادب ریاضی

نیوتون، ابتدا شاگردی متوسط بود و درخششی از خود نشان نمی‌داد. تا این‌که از حسنِ اتفاق، یکی از همسالانش با او به زد و خورد پرداخت و بر او غلبه کرد؛ به زبان ساده‌تر، کتک مفصلی به او زد. راهی برای انتقام مستقیم نبود؛ زیرا حریف خیلی از نیوتون نیرومندتر بود. ناچار تصمیم گرفت، رقیب را در درس عقب بگذارد. با این هدف، جدیت بیش‌تری در درس از خود نشان داد و چنان شوق و ذوقی به کار برد که شاگرد اول مدرسه شد. حق با فیگ‌لیؤ است. وی دربارهٔ نوجوانی که نیوتون را کتک زد، گفته است: «هیچ کس چنین مشت موفقیت‌آمیزی نزده است.»

جواب: