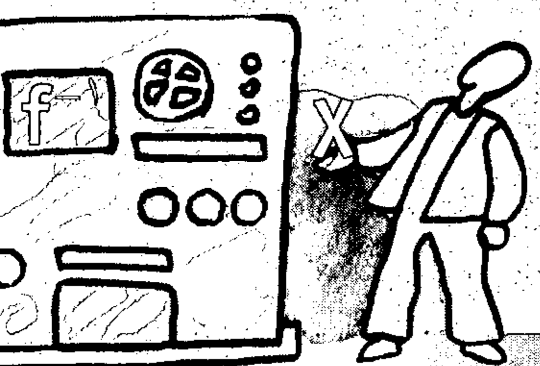


احمد قندهاری

تابع معکوس: f^{-1}

برای دانش‌آموزان سال سوم

پیش از بحث دربارهٔ تابع معکوس، باید تابع یک به یک را یادآوری کنیم.

تابع $f: A \to B$ را یک به یک گوییم؛ هرگاه: هیچ دو زوج مرتّب متمایز آن، دارای مؤلّفه‌های دوّم برابر نباشد. برای مثال، اگر دو تابع f و g به صورت‌های زیر باشند:

$f = \{(1,4),(2,5),(3,7)\}$ و $g = \{(1,4),(2,5),(3,4)\}$،

آن‌گاه تابع f یک به یک است؛ ولی تابع g یک به یک نیست؛ زیرا در تابع g دو زوج اول و سوّم، دارای مؤلّفهٔ دوم برابرند.

۱. تابع یک به یک:

تابع f را در بازهٔ $[a,b] \subset D_f$، وقتی یک به یک گوییم که:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad : \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال (۱): نشان دهید تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + 5$ در $D_f = \mathbb{R}$ یک به یک است.

حل:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 + 5 = x_2^3 + 5 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع f در $\mathbb{R}$ یک به یک است.

مثال (۲): ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + 5x + 2$ در $D_f = \mathbb{R}$ یک به یک است.

حل:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 + 5x_1 + 2 = x_2^3 + 5x_2 + 2 \Rightarrow$$

$$x_1^3 - x_2^3 + 5x_1 - 5x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) + 5(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 5) = 0$$

الف: $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

در این جا نمی‌توان نتیجه گرفت که تابع فوق، یک به یک است؛ بلکه باید ثابت شود معادلهٔ پرانتز دوم مساوی صفر، ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب: $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 5 = 0$

فرض می‌کنیم، مجهول معادلهٔ x_1 باشد؛ این معادله را بر حسب x_1 مرتّب می‌نویسیم.

$$x_1^2 + \underbrace{x_2}_{b} x_1 + \left(\underbrace{x_2^2 + 5}_{c}\right) = 0 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = x_2 \\ c = x_2^2 + 5 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = x_2^2 - 4(x_2^2 + 5) = -3x_2^2 - 20 < 0$$

چون $\Delta < 0$ پس معادلهٔ پرانتز دوم مساوی صفر، ریشهٔ حقیقی ندارد؛ در نتیجه می‌توان گفت که تابع f در $\mathbb{R}$، یک به یک است.

مثال (۳): ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{2x + 1 + 3\sqrt{2x - 1}}$ در دامنه‌اش یک به یک است.

$$\begin{cases} 2x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2} \\ 2x+1+3\sqrt{2x-1}>0 \end{cases}$$

$$D_f=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$$

با شرط $x\geq \frac{1}{2}$ برقرار است

حال بررسی یک به یک بودن تابع:

$$\forall x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right) \quad : f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$$

$$\sqrt{2x_1+1+3\sqrt{2x_1-1}}=\sqrt{2x_2+1+3\sqrt{2x_2-1}}$$

فرض می‌کنیم

$$2x_1-1=a\Rightarrow 2x_1=a+1$$
$$2x_2-1=b\Rightarrow 2x_2=b+1$$

$$\sqrt{a+2+3\sqrt{a}}=\sqrt{b+2+3\sqrt{b}}\Rightarrow$$
$$a+2+3\sqrt{a}=b+2+3\sqrt{b}\Rightarrow$$
$$(a-b)+3\sqrt{a}-3\sqrt{b}=0\Rightarrow$$
$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+3\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=0$$
$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\underbrace{\sqrt{a}+\sqrt{b}+3}\right)=0\Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}=0\Rightarrow$$

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}\Rightarrow a=b\Rightarrow 2x_1-1=2x_2-1\Rightarrow$$
$$2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

پس این تابع در $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$، یک به یک است.

بیان دیگر تابع یک به یک:

تابع مشتق‌پذیر f را در بازهٔ $[a,b]\subset D_f$، وقتی یک به یک گوییم که: در این بازه $f'(x)\geq 0$ یا $f'(x)\leq 0$؛ به شرطی که معادلهٔ $f'(x)=0$، یا ریشه نداشته و یا ریشه‌های قابل شمارش داشته باشد.

مثال (۱): تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^4+4x^2$ در $\mathbb{R}^+$ یک به یک است زیرا:

$$f'(x)=4x^3+8x=4x\left(x^2+2\right)\geq 0$$

$f'(x)=0$ یک ریشه دارد. $f'(x)=0\Rightarrow x=0$

مثال (۲): تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\mathrm{Cos}x$ در $\mathbb{R}$، یک به یک است زیرا:

$$f'(x)=1-\mathrm{Sin}x\geq 0$$

$$1-\mathrm{Sin}x=0\Rightarrow \mathrm{Sin}x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ (k\in z)$$

جواب‌هایی که از رابطهٔ $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ به دست می‌آید، قابل شمارش است؛ چون $f'(x)\geq 0$، پس این تابع در $\mathbb{R}$، یک به یک است.

مثال (۳): اگر در تابع f داشته باشیم: $D_f=\mathbb{R}$ و

$$f'(x)=-x^2(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2\cdots(x-n)^n\ ,\ n\in N$$

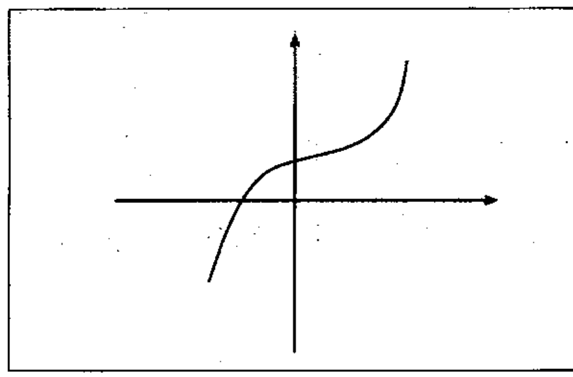
آن‌گاه: $f'(x)\leq 0$ و معادلهٔ $f'(x)=0$، n تا ریشه دارد که

قابل شمارش است. پس تابع f در $\mathbb{R}$ ، یک به یک است.

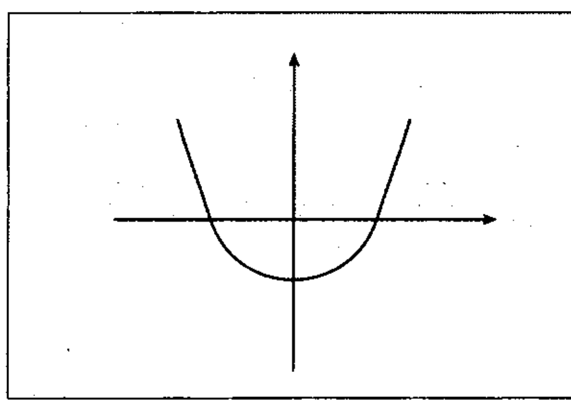
سؤال: نمودار یک تابع در چه صورت، نمودار یک تابع یک به یک است؟

جواب: وقتی که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

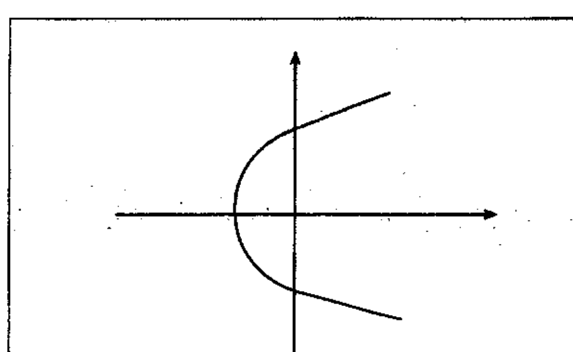
به نمودارهای زیر توجه کنید:



تابع هست، ولی یک به یک است



تابع هست، ولی یک به یک نیست



تابع نیست

۲. تابع معکوس:

اگر f تابعی به صورت $f=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ و g تابعی به صورت $g=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$ باشند، آن‌گاه این دو تابع را معکوس یکدیگر گوییم. ملاحظه می‌کنیم که جای مؤلّفه‌های زوج مرتّب تابع f را عوض کرده‌ایم و تابع g به دست آمده است.

حال این سؤال مطرح می‌شود که: اگر در هر تابع، جای مؤلّفه‌های زوج مرتّب آن را عوض کنیم، آن‌گاه آیا تابع جدیدی به دست می‌آید که معکوس تابع اصلی است؟

پاسخ این سؤال منفی است؛ مگر این که تابع اصلی، یک به یک باشد.

تعریف: اگر f تابعی به صورت $f=\{(x,y)\mid y=f(x)\}$ ؛ چنانچه تابعی مانند g وجود داشته باشد، به طوری که $g=\{(y,x)\mid x=g(y)\}$ ؛ آن‌گاه دو تابع f و g را معکوس یکدیگر گوییم.

از این تعریف نتیجه می‌شود که تابع g وقتی وجود دارد که تابع f یک به یک باشد.

پس:

۱. تابع f را در بازهٔ $[a,b]\subset D_f$ وقتی معکوس‌پذیر گوییم که این تابع در این بازه یک به یک باشد.

۲. تابع معکوس تابع f را با نماد f^{-1} نشان می‌دهیم (توجه کنیم که $f^{-1}\neq\frac{1}{f}$)

۳. برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس یک تابع معکوس‌پذیر، باید متغیر را از تابع اصلی پیدا کرد، سپس جای تابع و متغیر را عوض کرد (شرایط مسأله را در آن درنظر می‌گیریم).

۴. اگر $A(x,y)$ یک نقطه از تابع f باشد، آن‌گاه $A'(y,x)$ متناظر نقطهٔ A روی تابع f^{-1} است.

۵. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} قرینهٔ یکدیگر نسبت به خط $y=x$ هستند.

مثال: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x\ ,\ x\geq 1$ مفروض است:

الف ـ تحقیق کنید f معکوس‌پذیر است.

ب ـ ضابطهٔ تابع معکوس تابع f را بیابید.

ج ـ نمودارهای هر دو تابع f و f^{-1} را در یک شکل رسم کنید.

حل الف. $f(x) = x^2 - 2x \quad , \quad x \geq 1$

زیرا: $f'(x) = 2x - 2 \geq 0 \quad , \quad x \geq 1$

چون $f'(x) \geq 0$ و معادلهٔ $f'(x) = 0$، یک ریشه دارد، پس تابع f یک به یک است؛ در نتیجه معکوس‌پذیر است.

حل ب.

$$y = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 = y + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = y + 1 \Rightarrow x - 1 \underset{x \geq 1}{=} \sqrt{y+1} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{y+1} + 1$$

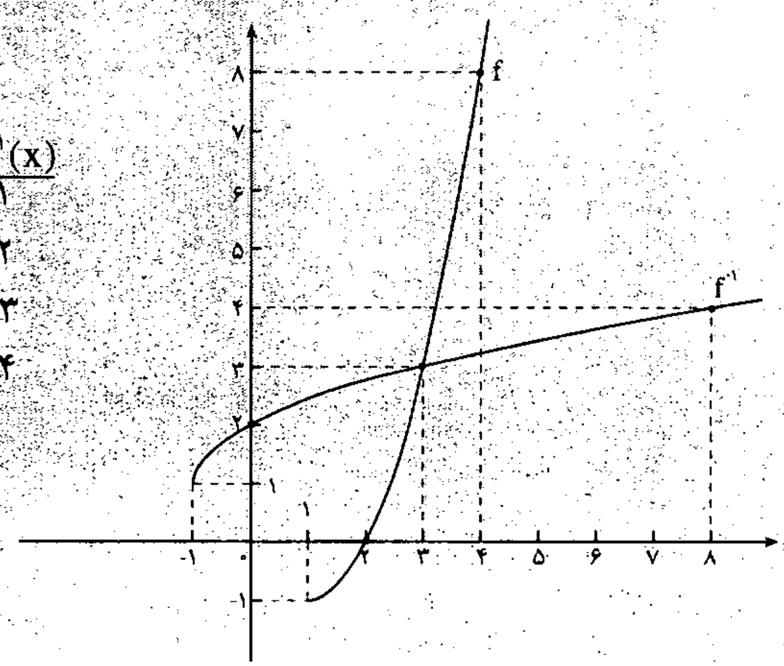
جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = \sqrt{x+1} + 1 = f^{-1}(x) \quad , \quad x \geq -1$$

حل ج.

x	f(x)
۱	۱-
۲	۰
۳	۳
۴	۸

x	$f^{-1}(x)$
۱-	۱
۰	۲
۳	۳
۸	۴



مثال: تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^4 - 8x^2$ با شرط $0 \leq x \leq 2$ مفروض است:

الف. ثابت کنید این تابع در بازهٔ $[0,2]$ معکوس‌پذیر است.

ب. ضابطهٔ تابع معکوس، تابع f را بیابید.

حل الف.

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \;,\; \pm 2$$

چون معادلهٔ $f'(x) = 0$ در بازهٔ $[0,2]$ دو ریشه ۰ و ۲ دارد و در بازه (۲ و ۰) ریشه ندارند، پس عبارت $f'(x)$ در بازه $[0,2]$ مثبت و صفر یا منفی و صفر است. در هر دو صورت، تابع f در بازه $[0,2]$ یک به یک است، پس f در این بازه، معکوس‌پذیر است.

حل ب.

$$y = x^4 - 8x^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = y + 16 \Rightarrow$$

$$(x^2 - 4)^2 = y + 16 \Rightarrow x^2 - 4 \underset{0 \leq x \leq 2}{=} -\sqrt{y+16} \Rightarrow$$

$$x^2 = 4 - \sqrt{y+16} \underset{0 \leq x \leq 2}{\Rightarrow} x = +\sqrt{4 - \sqrt{y+16}}$$

حال جای x و y را با هم عوض می‌کنیم:

$$y=\sqrt{4-\sqrt{x+16}}=f^{-1}(x)\quad,\quad -16\le x\le 0$$

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3x^2+3x-5$ مفروض است:

الف. ثابت کنید این تابع در $D_f=\mathbb{R}$ یک به یک است.

ب. ضابطهٔ تابع معکوس تابع f را بیابید.

حلّ الف.

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3\left(x^2-2x+1\right)=3(x-1)^2\ge 0$$

پس $f'(x)\ge 0$، بنابراین f در $\mathbb{R}$ یک به یک است؛ پس f در $\mathbb{R}$ معکوس‌پذیر است.

حل ب.

$$y=x^3-3x^2+3x-5\Rightarrow$$
$$x^3-3x^2+3x-5=y\Rightarrow x^3-3x^2+3x-1=y+4\Rightarrow$$
$$(x-1)^3=y+4\Rightarrow x-1=\sqrt[3]{y+4}\Rightarrow x=1+\sqrt[3]{y+4}$$

حال جای x و y را عوض می‌کنیم، پس:

$$y=1+\sqrt[3]{y+4}=f^{-1}(x)\quad,\quad x\in\mathbb{R}$$

تذکر: در تست‌ها برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس، از جایگذاری نقاط متناظر استفاده می‌کنیم؛ یعنی یک نقطه مانند A را از تابع f می‌یابیم، سپس A' را به دست می‌آوریم. نقطه A' در هر گزینه که صدق کرد، آن گزینه درست است. چنانچه نقطهٔ A' دو گزینه صدق کند، مختصات نقطهٔ دیگری مانند B را از تابع f درنظر می‌گیریم و B' را می‌یابیم و B' را در آن دو گزینه قرار می‌دهیم.

۶. اگر نمودارهای دو تابع f و f^{-1} متقاطع باشند، معمولاً نقطهٔ تقاطع روی خط، $y=x$ است؛ مگر این که تابع نقاط متناظرپذیر باشد، که در آن صورت، بعضی از نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1}، روی خط $y=x$ نیستند. معمولاً برای تعیین مختصات نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1}، معادلهٔ یکی از آنها را با خط $y=x$ تقاطع می‌دهیم.

مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع تابع به معادلهٔ $f(x)=x^2-4x\quad,\quad x\ge 2$ را با تابع معکوس آن بیابید.

حل: منحنی به معادلهٔ $y=x^2-4x$ را با خط $y=x$ تقاطع می‌دهیم؛ با شرط $x\ge 2$.

$$\begin{cases}y=x^2-4x\\ \\ y=x\end{cases}\quad x^2-5x=0\;\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غیرقابل قبول}\\ \\ x=5 & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

$$x=5\;\Rightarrow\;y=5$$

نقطهٔ تقاطع دو تابع f و f^{-1}: $M(5,5)$

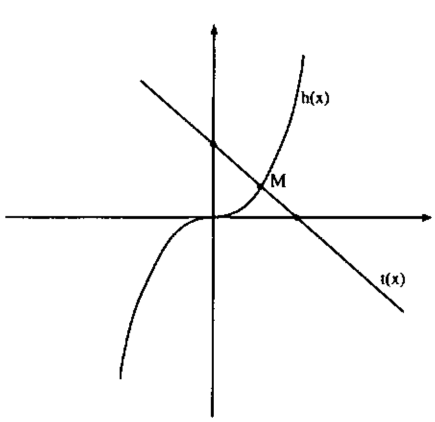
مثال: مختصات نقاط تقاطع تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^3+1$ را با تابع معکوس آن بیابید.

حل: منحنی به معادلهٔ $y=-x^3+1$ را با خط $y=x$ تقاطع می‌دهیم.

$$\begin{cases}y=-x^3+1\\ \\ y=x\end{cases}\Rightarrow\; x^3+x-1=0\qquad(1)$$

این معادله به سادگی قابل حل نیست (حداقل می‌توان گفت، در محدودهٔ ریاضی نظام جدید، قابل حلّ نیست)؛ ولی می‌توان ثابت کرد که یک ریشه دارد.

نمودارهای دو تابع $h(x)=x^3$ و $t(x)=-x+1$ را در یک شکل رسم می‌کنیم.



همان‌طوری که در شکل صفحهٔ قبل ملاحظه می‌کنید، نمودارهای دو تابع h و t یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس معادلهٔ (۱) یک ریشه دارد، که یکی از نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1} است. برای تعیین مختصات نقاط تقاطع دیگر، به ناچار باید معادله‌های دو تابع f و f^{-1} را با یکدیگر تقاطع دهیم، پس معادلهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم.

$$y=-x^3+1 \Rightarrow x^3=1-y \Rightarrow x=\sqrt[3]{1-y}$$

جای x و y را با هم عوض می‌کنیم.

$$y=\sqrt[3]{1-x}=f^{-1}(x)$$

حال معادله‌های f و f^{-1} را با هم تقاطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} y=-x^3+1 \\ y=\sqrt[3]{1-x} \end{cases} \Rightarrow 1-x^3=\sqrt[3]{1-x} \Rightarrow$$

$$(1-x)\left(1+x+x^2\right)=\sqrt[3]{1-x}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(1-x)^3}\left(1+x+x^2\right)-\sqrt[3]{1-x}=0$$

$$\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{(1-x)^2}\left(1+x+x^2\right)-1\right)=0$$

نقطهٔ تقاطع: $\sqrt[3]{1-x}=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1 \ : \ N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

$$\sqrt[3]{(1-x)^2}\left(1+x+x^2\right)-1=0 \Rightarrow \sqrt[3]{(1-x)^2}\left(1+x+x^2\right)=1$$

حلّ این معادله، از حوصلهٔ این مقاله خارج است؛ فقط باید گفت که $x=0$ یکی از ریشه‌های آن است، پس $P\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ نیز یک نقطهٔ تقاطع است. ملاحظه می‌کنید که دو نقطهٔ تقاطع $N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ و $P\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ روی دو منحنی f و f^{-1} قرار دارند (نقاط تقاطع آنها هستند)؛ ولی هیچ کدام روی خط $y=x$ قرار ندارد.

فقط با در دست داشتن نقطهٔ تقاطع $N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ می‌توان به نقطهٔ تقاطع $P\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ دست یافت؛ زیرا:

$N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f است $\Rightarrow$ $N'\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f^{-1} است

$N'\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f است $\Rightarrow$ $N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f^{-1} است

پس نقاط N و N' هر دو روی هر دو تابع f و f^{-1} هستند، پس نقاط تقاطع آنهاست (که هیچ‌کدام روی خط $y=x$ نیستند).

۷. ترکیب دو تابع f و f^{-1}، تابعی همانی است؛ یعنی:

$$\left(f o f^{-1}\right)(x)=x \qquad \left(f^{-1} o f\right)(x)=x$$

۸. اگر از رابطهٔ $\left(f^{-1} o f\right)(x)=x$ نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$f'(x)\times\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)=1 \Rightarrow \boxed{\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)=\frac{1}{f'(x)}}$$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ $P(a,b)$، برابر m است. شیب خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ $P'(a,b)$ را بیابید.

حل: $m=f'(a)$ و $P\left|\begin{matrix}a=x\\b=f(x)\end{matrix}\right.$

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)=\frac{1}{f'(x)} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{m}$$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^5+x+1$ در نقطهٔ A به طول (۱)، برابر چه عددی است؟ از آن‌جا شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} را در نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A بیابید.

$x_A = 1 \Rightarrow y_A = 1+1+1 = 3 \quad A\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right.$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ A:

$A\left|\begin{matrix}1=a=x\\3=b=f(x)\end{matrix}\right. \quad , \quad f'(x)=5x^4+1 \Rightarrow f'(1)=6$

شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} در نقطهٔ A' :

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)=\frac{1}{f'(x)} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$$

نتیجهٔ (۱): اگر شیب خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A، برابر m باشد، آن‌گاه شیب خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} (تابع معکوس f) در نقطهٔ A' متناظر A، برابر $\frac{1}{m}$ است.

نتیجهٔ ۲: اگر شیب خط قائم بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A، برابر k باشد، آن‌گاه شیب خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر A، برابر $\frac{1}{k}$ است.

۹. خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A، تابع معکوس خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A است.

۱۰. خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A، تابع معکوس خط قائم بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A است.

مثال: اگر خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A به صورت $y=2x-4$ باشد، آن‌گاه خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر A، چنین است.

جای x و y را با هم عوض می‌کنیم

$$y=2x-4 \Rightarrow 2x=y+4 \Rightarrow x=\frac{1}{2}y+2$$

معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر A $y=\frac{1}{2}x+2$

۱۱. اگر $x=a$ مجانب قائم تابع معکوس‌پذیر f باشد، آن‌گاه $y=a$ مجانب افقی تابع f^{-1} است.

۱۲. اگر $y=b$ مجانب افقی تابع معکوس‌پذیر f باشد، آن‌گاه $x=b$ مجانب قائم تابع f^{-1} است.

۱۳. اگر $y=ax+b$ مجانب مایل تابع معکوس‌پذیر f باشد، آن‌گاه $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ (تابع معکوس $y=ax+b$) مجانب مایل تابع f^{-1} است.

مثال: نکتهٔ (۱۳) را در تابع با ضابطه $y=\sqrt{x^2+2x+3}$ و $x \geq -1$ تحقیق کنید.

۱۴. اگر دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشند، آن‌گاه $D_f=R_g$ و $R_f=D_g$، باید توجه داشت که این گزارهٔ شرطی است، نه دو شرطی؛ یعنی:

دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشند. $\Rightarrow \begin{cases}D_f=R_g\\R_f=D_g\end{cases}$

یعنی اگر در دو تابع f و g داشته باشیم $\begin{cases}D_f=R_g\\R_f=D_g\end{cases}$، آن‌گاه نتیجه نمی‌شود که حتماً دو تابع f و g معکوس یکدیگرند.

۱۵. تابع‌های چند ضابطه‌ای، وقتی معکوس‌پذیرند که:

اولاً: اشتراک دوبه‌دو بردهای ضابطه‌ها تابع تهی باشند.

ثانیاً: هر ضابطه، معکوس‌پذیر باشد.

مثال: ضابطهٔ تابع معکوس تابع f به معادلهٔ $f(x)=\begin{cases}2x & , \ x\geq 1\\x+1 & , \ x<1\end{cases}$ را بیابید و آنها را در یک شکل رسم کنید.

حل:

$$f(x)=\begin{cases}y_1=2x & , \ x\geq 1 \Rightarrow y_1\geq 2 \ \text{برد تابع}\\y_2=x+1 & , \ x<1 \Rightarrow y_2<2 \ \text{برد تابع}\end{cases}$$

به طوری که ملاحظه می‌شود $y\geq 2$ و $y<2$، پس اشتراک بردها تهی است. در ضمن، هر ضابطهٔ تابع f معکوس‌پذیر است.

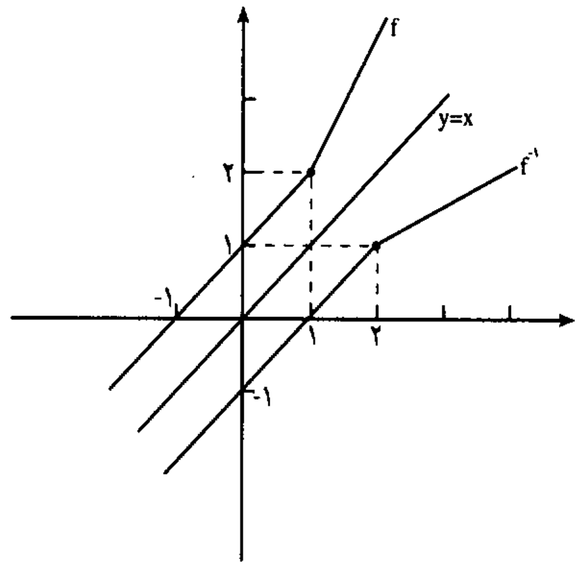
$$y_1=2x \Rightarrow x=\frac{y_1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{2} \quad , \quad x\geq 2$$

$$y_2=x+1 \Rightarrow x=y_2-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=x-1 \quad , \quad x<2$$

پس ضابطهٔ تابع معکوس چنین است:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & , \quad x\ge 2\\ x-1 & , \quad x<2\end{cases}$$

حال دو تابع f و f^{-1} را در یک شکل رسم می‌کنیم.



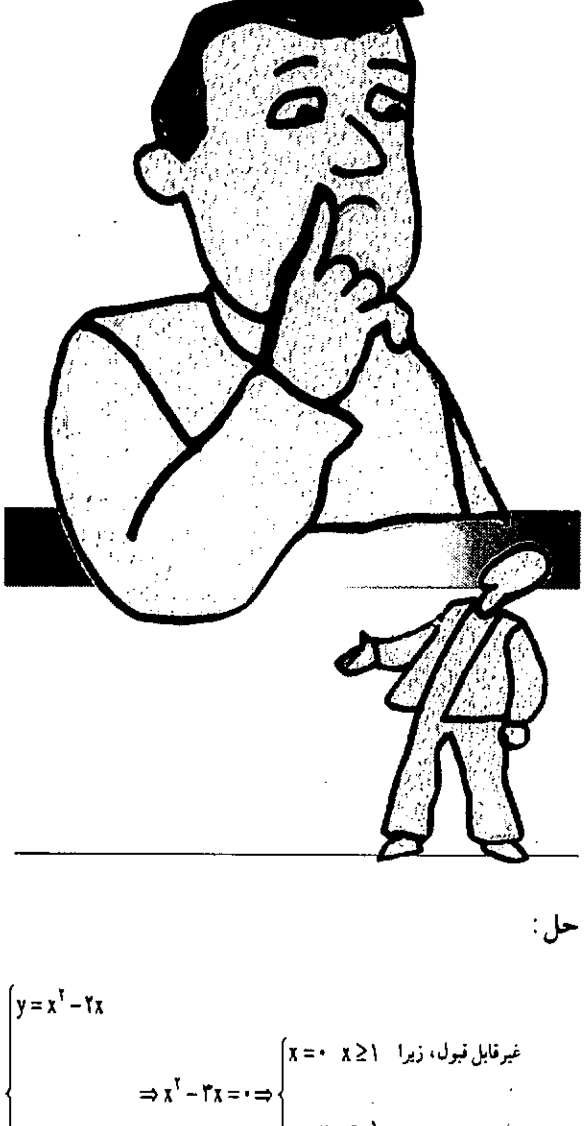
۱۶. اگر تابع معکوس‌پذیر f در بازهٔ $[a,b]$ صعودی اکید باشد، آن‌گاه تابع f^{-1} در بازهٔ $[f(a),f(b)]$ نیز صعودی اکید است.

چنانچه تابع معکوس‌پذیر f در بازهٔ $[a,b]$ نزولی اکید باشد، آن‌گاه تابع f^{-1} در بازهٔ $[f(b),f(a)]$ نیز نزولی اکید است.

۱۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ، $(c\neq 0)$ وقتی بر تابع معکوس خودش منطبق است که: $\boxed{a+d=0}$

زاویهٔ حادّه بین دو منحنی f و f^{-1} (f تابعی معکوس‌پذیر باشد) با بیان یک مثال، مطلب روشن خواهد شد.

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x \quad , \quad x\ge 1$ مفروض است، زاویهٔ بین دو منحنی f و f^{-1} را در نقطهٔ تقاطع آنها بیابید.



حل:

$$\begin{cases}y=x^2-2x\\ \\ y=x\end{cases}\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 \quad x\ge 1 \text{ غیرقابل قبول، زیرا}\\ \\ x=3 \quad \text{طول نقطهٔ تقاطع دو تابع f و } f^{-1}\end{cases}$$

$f'(x)=2x-2\Rightarrow f'(3)=4=m \quad , \quad m'=\dfrac{1}{4}$ شیب مماس بر منحنی f^{-1}

زاویهٔ بین دو منحنی f و f^{-1}:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{4-\frac{1}{4}}{1+1}\right|=\frac{15}{8}\Rightarrow\alpha=\operatorname{Arc}\tan\frac{15}{8}$$