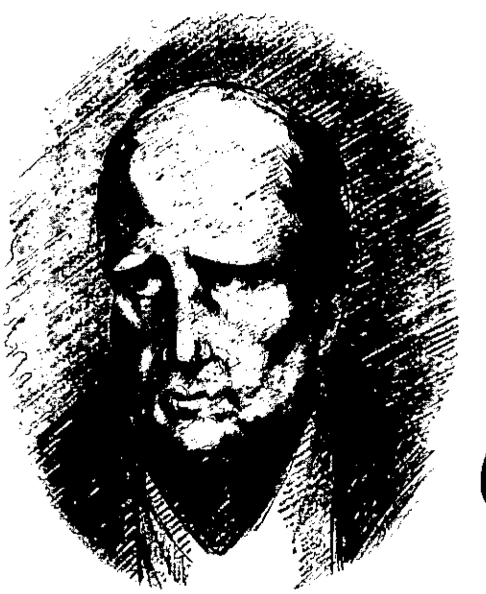

● احسان یارمحمدی

تابع رونسکی

اشاره

جوزف ماریا هوئن رونسکی[1] فیلسوف مسیحی دان اهل لهستان (۲۳آگوست ۱۷۷۸ تا ۸ آگوست ۱۸۵۳)، کسی که روی رشته‌های زیادی از دانش، نه فقط مانند فیلسوف، بلکه مانند ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، حقوق‌دان و اقتصاددان کار کرد، ابداع کننده‌ی تابع رونسکی است که برای حل معادلات دیفرانسیل کاربرد دارد. از آن‌جا که طی عملیات محاسبه‌ی تابع رونسکی با مفاهیم و نکاتی پیرامون مشتق‌گیری و تعیین دترمینان‌ها مواجه هستیم، لذا مطالعه‌ی این مقاله به دانش‌پژوهان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی توصیه می‌شود.

برای n تابع حقیقی $f_1(x), f_2(x), f_n(x)$ که هر یک از آن‌ها در بازه‌ی I، $n-1$ بار مشتق‌پذیر[2] هستند، تابع رونسکی شامل آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \cdots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

مثال۱. تابع رونسکی برای دو تابع $4\sin(2x)$ و $3\sin(2x)$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱. صفر
۲. $\sin^2(x)+\cos^2(x)$
۳. $\dfrac{1}{\sin(x).\cos(x)}$
۴. $3\sin(x)-4\sin^3(x)$

پاسخ: گزینه‌ی ۱، چون:

$$W(3\sin(2x), 4\sin(2x)) = \begin{vmatrix} 3\sin(2x) & 4\sin(2x) \\ \dfrac{d(3\sin(2x))}{dx} & \dfrac{d(4\sin(2x))}{dx} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3\sin(2x) & 4\sin(2x) \\ 6\cos(2x) & 8\cos(2x) \end{vmatrix}$$

$$= 3\sin(2x)\times 8\cos(2x) - 4\sin(2x)\times 6\cos(2x) = 0$$

مثال۲. معادله‌ی خطی که در نقطه‌ای به طول $W(e^x, e^{-x})$، متعلق به خط $y-2x-3=0$ بر همین خط عمود باشد، کدام گزینه است؟ (W نشان‌دهنده‌ی تابع رونسکی است.)

۱. $y=\frac{1}{2}x+2$
۲. $y=-\frac{1}{2}+2$
۳. $y=\frac{1}{2}x-2$
۴. $y=-\frac{1}{2}x-2$

پاسخ: گزینه‌ی ۴، چون:

$$W(e^x,e^{-x})=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}=e^x\times(-e^{-x})-e^{-x}\times e^x=-۱-۱=-۲$$

$$y-۲x-۳=۰\Rightarrow y=۲x+۳\xrightarrow{x=-۲}y=۲(-۲)+۳=-۱\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\end{bmatrix}$$

اکنون باید معادله‌ی خطی را بنویسیم که از نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\end{bmatrix}$ عبور کند و بر خط $y-۲x-۳=۰$ عمود باشد. در ضمن، شیب خط مطلوب برابر $m=-\frac{۱}{۲}$ است.

بنابراین:

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-(-۱)=-\frac{۱}{۲}(x-(-۲))$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}-۲$$

مثال۳. حاصل $W(x^۲,-۲x^۲,۳x^۳)$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱. x ۲. $x-۱$ ۳. صفر ۴. $x+۱$

پاسخ: گزینه‌ی ۳. چون:

$$W(x^۲,-۲x^۲,۳x^۳)=\begin{vmatrix} x^۲ & -۲x^۲ & ۳x^۳ \\ ۲x & -۴x & ۹x^۲ \\ ۲ & -۴ & ۱۸x \end{vmatrix}=x^۲\begin{vmatrix} -۴x & ۹x^۲ \\ -۴ & ۱۸x \end{vmatrix}-(-۲x^۲)\begin{vmatrix} ۲x & ۹x^۲ \\ ۲ & ۱۸x \end{vmatrix}+۳x^۳\begin{vmatrix} ۲x & -۴x \\ ۲ & -۴ \end{vmatrix}$$

$$=x^۲(-۳۶x^۲)-(-۲x^۲)(۱۸x^۲)+۳x^۳(۰)=۰$$

تمرین: حاصل هریک از موارد زیر را به‌دست آورید.

۱. $W(e^x,xe^x)$، پاسخ: $e^{۲x}$

۲. $W(۱,\sin(۲x),\cos(۲x))$، پاسخ: -۸

۳. $W(\sin(x),\cos(x),۲\sin(x)-\cos(x))$، پاسخ: صفر

۴. $W(x^۲,x^۳,x^۴)$، پاسخ: $۲x^۶$

۵. $W(x^{-۲},x^۲,۲-۳x)$، پاسخ: $۳۶x^{-۲}-۳۲x^{-۳}$

۶. $W(x^۳,x^۳+x,۲x^۳-۷x)$، پاسخ: $۴۲x$

۷. $W(x,x-۳,۲x+۵)$، پاسخ: صفر

۸. $W(۷e^{-۳x},۴e^{-۳x})$، پاسخ: صفر

پی‌نوشت

1. Jozef Maria Hoene-Wronski
2. Differentiable

منابع

۱. معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن‌ها. جرج ف سیمونز، ترجمه‌ی علی‌اکبر بابایی و ابوالقاسم میامئی. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۷۷ش.

۲. نگرشی بر معادلات دیفرانسیل معمولی. راینشتاین، آلبرت. ترجمه‌ی سعید فاریابی و محمد جلوداری ممقانی. انتشارات علمی و فنی. ۱۳۷۲ش.