برهان خلف

در خلاف آمدِ عادت بطلب کام، که من
کسب جمعیّت از آن زلفِ پریشان کردم
«حافظ»

غلامرضا یاسی‌پور

روش اثبات غیرمستقیم[1] که آن را برهان خُلف[2] نیز می‌نامند برای جمیع کسانی که هندسهٔ مقدماتی[3] خوانده‌اند آشناست. اقلیدس در استخراج قضایایش[4]، غالباً کار را با فرض[5] مقابل[6] چیزی که می‌خواهد آن را ثابت کند، آغاز می‌کند؛ در این صورت اگر فرض[7] مزبور به کاذبی[8] منجر شود، باید دروغ[9] باشد، و بنابراین نقیض[10] آن، یعنی قضیهٔ مورد اثبات باید راست[11] باشد.

اثبات غیرمستقیم، درستی[12] استدلالی[13] مفروض را، با فرض نقیض نتیجه‌اش[14]، به عنوان مقدمه‌ای[15] اضافی، و بعد استخراج کاذبی آشکار از مجموعهٔ فزودهٔ[16] مقدمات مزبور، بنا می‌کند. به این ترتیب، اثبات غیرمستقیم درستی استدلال

$A \Rightarrow (B \wedge C)$
$(B \vee C) \Rightarrow E$
$D \vee A$
$\therefore E$

را می‌توان به‌طریق زیر انجام داد:

1 . $A \Rightarrow (B \wedge C)$	
2 . $(B \vee D) \Rightarrow E$	
3 . $D \vee A$	$/ \therefore E$
4 . $\sim E$	I.P. (Indirect Proof)
5 . $\sim (B \vee D)$	2, 4, M.T.
6 . $\sim B \wedge \sim D$	5, DeM.
7 . $\sim D \wedge \sim B$	6, Com
8 . $\sim D$	7, Simp.
9 . A	3, 8, D.S.
10. $B \wedge C$	1, 9, M.P.
11. B	10, Simp.
12. $\sim B$	6, Simp.
13. $B \wedge \sim B$	11, 12, Conj.

در این جا سطر ۱۳ کاذبی آشکار است. بنابراین برهان[17] کامل است، زیرا درستی استدلال اصلی از قاعدهٔ اثبات غیرمستقیم نتیجه می‌شود.

آسان است که نشان دهیم که از یک کاذب هر نتیجه‌ای را به درستی می‌توان استنتاج کرد. به‌عبارت دیگر، هر استدلال به‌صورت

p
$\sim p$
$\therefore q$

بی‌توجه به این‌که چه گزاره‌هایی به‌جای متغیرهای p و q قرارداده می‌شود، درست است. به این ترتیب، از سطرهای ۱۱، ۱۲ ی اثبات قبل، می‌توان نتیجهٔ E را تنها با دو سطر دیگر استنتاج کرد، و ادامهٔ کار به‌ترتیب زیر است:

14. $B \vee E$	11 , Add.
15. E	12,14, D.S.

درنتیجه امکان دارد که اثبات غیرمستقیم درستی یک استدلال

معلوم را نه به‌عنوان استنتاج درستی آن از این حقیقت که کاذبی به‌دست آورده‌ایم، بلکه بیشتر به‌عنوان استنتاج نتیجهٔ استدلال از خود کاذب، درنظر بگیریم. به‌این ترتیب به‌جای درنظر گرفتن برهان خلف به‌عنوان رسیدن به کاذب، می‌توانیم رسیدن از کاذب به نتیجهٔ استدلال اصلی را درنظر بگیریم. اگر ترکیب عطفی[18] مقدمات یک استدلال را به‌صورت P و نتیجهٔ آن را به‌صورت C علامتی کنیم، دراین صورت اثبات غیرمستقیم درستی

P
$\therefore C$

با استفاده از اثبات صوری[19] درستی استدلال

P
$\sim C$
$\therefore C$

به‌دست می‌آید. اما بین دو استدلال

P P
$\therefore C$ و $\sim C$
$\therefore C$

چه رابطه‌ای موجود است که اثبات درستی اولی برای انجام درستی دومی کفایت می‌کند؟ اثبات صوری درستی دومی اثبات شرطی[20] درستی استدلال سوم

P
$\therefore \sim C \Rightarrow C$

را بنا می‌کند. اما نتیجهٔ استدلال سوم منطقاً معادل[21] نتیجهٔ استدلال اوّل است. بنابه‌تعریف استلزام مادی[22]، $\sim C \Rightarrow C$ منطقاً معادل $\sim\sim C \vee C$ که بنا به‌اصل نقیض دوگانه[23] منطقاً معادل $C \vee C$ است، می‌باشد. $C \vee C$ و C نیز بنا به اصل صادق[24] منطقاً معادلند. از آن‌جا که استدلالهای اول و سوم مقدمات یکسان و نتایج منطقاً معادل دارند، هر اثبات درستی اولی اثبات درستی دیگری نیز هست. اثبات درستی استدلال دوم، هم اثبات شرطی سومی، هم اثبات غیرمستقیم اولی است. به‌این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که بین روشهای اثبات غیرمستقیم و شرطی، یعنی بین قانون اثبات شرطی و قانون اثبات غیرمستقیم رابطهٔ نزدیکی وجود دارد.

اضافه کردن قانون اثبات غیرمستقیم به تقویت دستگاه اثباتمان کمک می‌کند. درستی هر استدلالی که نتیجه‌اش صادق است را می‌توان با استفاده از روش جدولهای ارزش[25] و بی‌توجه به این‌که مقدماتش چیست، نشان داد. اما اگر نتیجهٔ صادق استدلالی گزاره‌ای شرطی نباشد، و مقدماتش با یکدیگر موافق و با آن نتیجه کاملاً بی‌ارتباط باشند، در این صورت درستی آن استدلال را نمی‌توان با روش قیاس[26] بدون استفاده از قانون اثبات غیرمستقیم اثبات کرد. بنابراین هرچند که درستی استدلال

A
$\therefore B \vee (B \Rightarrow C)$

را باکمک قوانین مشروح در قسمتهای قبل نمی‌توان ثابت کرد، می‌توان درستی آن را با استفاده از قانون اثبات غیرمستقیم به‌سادگی معلوم کرد. یکی از اثباتهای درستی این استدلال عبارت‌است از:

1. $A \,/\, \therefore B \vee (B \Rightarrow C)$	
2. $\sim [\, B \vee (B \Rightarrow C) \,]$	I.P.
3. $\sim [\, B \vee (\sim B \vee C) \,]$	2, Impl.
4. $\sim [\, (B \vee \sim B) \vee C \,]$	3, Assoc.
5. $\sim (B \vee \sim B) \wedge \sim C$	4, DeM.
6. $\sim (B \vee \sim B)$	5, Simp.
7. $\sim B \wedge \sim\sim B$	6, DeM.

به این ترتیب نوزده قانون استنتاجمان[27] همراه با قوانین اثبات شرطی و غیرمستقیم روش استنتاجی به‌دست‌مان می‌دهند که کامل است، و هر استدلالی راکه درستیش را بتوان با استفاده از جدولهای ارزش ثابت کرد، می‌توان بااستفاده از روش استنتاجی که در قسمتهای پیشین (به‌شماره‌های ۳، ۴، ۵ برهان رجوع کنید) شرح داده شده اثبات‌کرد. امااین موضوع دراین‌جا اثبات نخواهد شد.

اثبات صادقها

روشهای اثبات شرطی و غیرمستقیم نه‌تنها می‌توانند در

اثبات درستی استدلالها به کار روند، بلکه در اثبات این‌که گزاره‌ها و صورتهای گزاره‌ای معینی صادق‌اند نیز به کار می‌روند. به یک معنی، هر گزارهٔ شرطی متناظر با استدلالی است که تنها مقدمه‌اش مقدم[28] آن گزارهٔ شرطی، و نتیجه‌اش تالی[29] آن می‌باشد، و این گزارهٔ شرطی صادق است اگر و فقط اگر آن استدلال درست باشد. درنتیجه با استنتاج تالی یک گزارهٔ شرطی از مقدمش، با استفاده از یک رشته استدلالات درست مقدماتی، ثابت می‌شود که آن گزارهٔ شرطی صادق است. به این ترتیب، با استفاده از همان دنبالهٔ سطرهایی که درستی استدلال

$A \wedge B$

$\therefore A$

را ثابت می‌کند، ثابت می‌شود که گزارهٔ $(A \wedge B) \Rightarrow A$ صادق است. قبلاً نیز به این مطلب اشاره شده که روش شرطی را می‌توان کراراً در یک اثبات به کار برد. بنابراین صادق بودن گزارهٔ شرطی

$$(Q \Rightarrow R) \Rightarrow [\ (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\ ]$$

را می‌توان با استفاده از

1. $Q \Rightarrow R$	$/ \therefore (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	(C.P.)
2. $P \Rightarrow Q$	$/ \therefore P \Rightarrow R$	
3. $P \Rightarrow R$	1,2, H.S.	

ثابت کرد. این روش اثبات در مورد بعضی از گزاره‌های شرطی مرکب آسانتر و ساده‌تر از رسم جدولهای ارزش است.

صادقهای بسیاری وجود دارند که به‌صورت شرطی نیستند، و روش قبل را در مورد آنها نمی‌توان به کار برد. اما راستی هر صادق را با استفاده از روش غیرمستقیم می‌توان ثابت کرد، و در این مورد همان‌طور که درمورد استدلالها عمل شد، روش غیرمستقیم اثبات درستی با اضافه کردن نقیض نتیجهٔ استدلال به‌مقدمات آن و سپس با استنتاج کاذبی از دنبالهٔ استدلالات درست مقدماتی، انجام می‌گیرد، و همین‌ترتیب در مورد گزاره‌ها عمل می‌شود، یعنی روش غیرمستقیم اثبات صادق بودن آنها، با درنظرگرفتن نقیضشان به‌عنوان مقدمه و سپس با استنتاج کاذب واضحی از دنبالهٔ استدلالات درست مقدماتی انجام می‌پذیرد. به‌این ترتیب، صادق بودن گزارهٔ $B \vee \sim B$ با استفاده از اعمال زیر اثبات می‌شود:

1. $\sim (B \vee \sim B)$	$/ \therefore B \vee \sim B$	(I.P.)
2. $\sim B \wedge \sim\sim B$	1,DeM.	

گفتن این که یک گزاره صادق است اظهار این است که راستیش غیرشرطی است، بنابراین می‌توان راستی آن را بدون توسل به گزاره‌های دیگر اثبات کرد. طریق دیگر اظهار همین مطلب، که شاید خیلی گمراه‌کننده نباشد، بیان درستی «استدلالی» است که گزارهٔ مورد بحث را به‌عنوان «نتیجه» دارد، اما مقدمه ندارد. به‌این ترتیب اگر این «نتیجه» صادق باشد در این‌صورت روش استنتاج، با استفاده از قانون اثبات شرطی یا قانون اثبات غیرمستقیم، مجازمان می‌کند که ثابت کنیم که «استدلال» مذکور علی‌رغم این‌که مقدمه ندارد درست است. راستی هر صادق را می‌توان با استفاده از روش قیاس اثبات کرد، اما در این‌جا به‌آن نمی‌پردازیم.

یادداشتها

1. Indirect Proof
2. Reductio ad Absurdum

بوعلی سینا این کلمه را به فتح اول، یعنی خَلْف، می‌داند و آن‌را به‌معنی پشت‌می‌گیرد.

3. Elementary Geometry
4. Theorems
5. Assuming
6. Opposite
7. Assumption
8. Contradiction
9. False
10. Negation
11. True
12. Validity
13. Argument
14. Conclusion
15. Premiss
16. Augmented Set
17. Demonstration
18. Conjunction
19. Formal Proof
20. Conditional Proof
21. Equivalent
22. Material Implication
23. Double Negation
24. Tautology
25. Truth Tables
26. Method of Deduction
27. Rule of Inference
28. Antecedent
29. consequent

مراجع: Irving M. Copi, Symbolic Logic