بررسی تقارن محوری و مرکزی

در تابعهای sin x و cos x

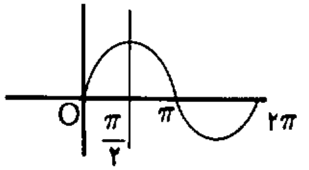
علی حسن‌زاده ماکوئی

الف : تقارن محوری: اگر در بازهٔ $[-a,a]$ و $a>0$ تابع $y=f(x)$ زوج باشد محور yها محور تقارن نمودار آن است. اگر تابع $f(x)$ درفاصلهٔ مذکور فرد باشد، و یا، نه‌فرد باشد ونه زوج ولی با انتقال مبدأ مختصات به نقطهٔ $O'(\alpha,0)$ تابع $Y=f(X+\alpha)$ در دستگاه‌جدیدتابع زوجی‌شود خط $x=\alpha$ (محور yهای‌جدید) ، محور تقارن منحنی است.

اینك مطالب فوق را در تابعهای مثلثاتی: $\sin x$ و $\cos x$ بررسی می کنیم.

۱. تابع ، $y=\sin x$ را در نظر می‌گیریم : اگـر مبدأ مختصات را به نقطهٔ $O'(\frac{\pi}{2},0)$ منتقل کنیم:خواهیم‌داشت:

$$y=Y+0 \text{ و } x=\alpha+X \Longrightarrow Y=\cos X$$



باتوجه به زوج‌بودن تابع $y=\cos x$ ، به‌نظرمی‌رسدکه خط $x=\frac{\pi}{2}$ یکی‌از محورهای تقارن‌منحنی، $y=\sin x$ است. ولی‌باید توجه داشت‌که درتابعهای مثلثاتی متناوب مسألهٔ تقارن به سادگی‌تابعهای جبری نیست. بستگی به دامنهٔ تغییرات تابع دارد.

مثلا در تابع ، $y=\sin x$ اگر فاصلهٔ تغییرات x بـازهٔ $[0,2\pi]$ باشد، منحنی‌فاقد محورتقارن است بلکه قسمتهایی از آن‌که درفاصلهٔ $[0,\pi]$ و $[\pi,2\pi]$ قرار دارند، هریك‌جداگانه دارای محورتقارن می‌باشندکه به‌ترتیب عبارتنداز:

$$x=\frac{3\pi}{2} \text{ و } x=\frac{\pi}{2}$$

درصورتی‌که اگر فاصلهٔ تغییرات را بازهٔ $[0,3\pi]$ یا ... و یا $[0,(2n+1)\pi]$ و $n\in N$ اختیارکنیم منحنی تابع‌در هریك‌از فاصله‌های مزبور دارای یك محور تقارن می‌باشندکه به ترتیب عبارتنداز:

$$3\frac{\pi}{2}\ ,\ \dots\ ,\ (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

بنابراین بیان این مطلب‌که منحنی تابع، $y=\sin x$ درفاصلهٔ ، $[0,(2n+1)\pi]$ و $n\in N$ دارای $(2n+1)$ محور تقارن است، نادرست می‌باشد.

مثال : تابع $y=\sin x$ را درنظرمی‌گیریم. تحقیق‌کنید اولا: منحنی‌تابع درفاصلهٔ $[0,2\pi]$ محورتقارن‌ندارد. ثانیا: در فاصلهٔ $[0,3\pi]$ خط $x=\frac{3\pi}{2}$ محورتقارن آن است.

حل . اولا اگر خط $x=\frac{\pi}{2}$ محور تقارن تـابـع باشد داریم :

و $y=\sin(\frac{\pi}{2}+X)=\cos X$

$$0\leqslant x\leqslant 2\pi \Longrightarrow \frac{-\pi}{2}\leqslant X\leqslant\frac{3\pi}{2}$$

با توجه به کرانه‌های دامنه که متقارن نیستند. تابع $\cos X$ درفاصلهٔ مزبور زوج نیست. درنتیجه: منحنی فاقد محور تقارن است.

ثانیا:

$$y=\sin(\frac{3\pi}{2}+X)=-\cos X$$

$$0\leqslant x\leqslant 3\pi \Longrightarrow \frac{-3\pi}{2}\leqslant X\leqslant\frac{3\pi}{2}$$

با توجه به کرانه‌های دامنه، تابع $y=-\cos X$ زوج است.

پس محور yها یعنی خط $x=\frac{3\pi}{2}$ محور تقارن منحنی است.

با توجه به مطالب فوق به آسانی می‌توان تحقیق کرد که

• منحنی تابع: $y=\sin x$ در فاصلهٔ:

$$k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+(2n+1)\pi \ , \ k\in Z \ , \ n\in N$$

فقط دارای یک محور تقارن به معادلهٔ:

$$x=(k+n+\frac{1}{2})\pi$$

است. زیرا:

$$y=\sin[(k+n+\frac{1}{2})\pi+X]=(-1)^{k+n}\cos X$$

و $-(n+\frac{1}{2})\pi\leqslant X\leqslant(n+\frac{1}{2})\pi$

۲. با استفاده از مطالب فوق بـه آسانی می‌توان نتیجه گرفت، منحنی تابع $y=\cos x$ در هریک از فاصله‌های:

$$[0,2n\pi] \ , \ n\in N \ , \ \cdots \ , \ [0,2\pi]$$

یک محور تقارن دارد که به ترتیب عبارتند از:

$$x=n\pi \ , \ \cdots \ , \ x=\pi$$

درحالت کلی منحنی تابع: $y=\cos x$ درفاصلهٔ

$$k\pi\leqslant x\leqslant(k+2n)\pi \ , \ k\in Z \ , \ n\in N$$

یک محور تقارن به معادلهٔ: $x=(k+n)\pi$ دارد.

ب: تقارن مرکزی. بـه ازای $n\in N$ و $k\in Z$ به آسانی می‌توان تحقیق کرد که:

۱. درفاصلهٔ $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+2n\pi$ نقطهٔ:

$$\omega\left|\begin{array}{l}(k+n)\pi\\ 0\end{array}\right.$$

مرکز تقارن منحنی $y=\sin x$ است.

۲. درفاصله $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+(2n+1)\pi$ نقطهٔ:

$$\omega\left|\begin{array}{l}(k+n+\frac{1}{2})\pi\\ 0\end{array}\right.$$

مرکز تقارن منحنی $y=\cos x$ است.

۳. درمورد تقارن تابعهای: tgx و $cotgx$ متذکر می‌شود که منحنی این تابعها محور تقارن ندارند و مرکز تقارن آنها به ترتیب عبارتند از:

در فاصلهٔ $(k-\frac{1}{2})\pi<x<(k+\frac{1}{2})\pi$ نقطهٔ

$$\omega(k\pi,0)$$

مرکز تقارن منحنی tgx است.

در فاصلهٔ $k\pi<x<(k+1)\pi$ نقطهٔ

$$\omega(k\pi+\frac{\pi}{2} \ , \ 0)$$

مرکز تقارن منحنی $cotgx$ است.