برد تابع

برای دانش‌آموزان سال سوم

احمد قندهاری

در تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ ، مجموعهٔ مقادیر y را که در اثر تأثیر تابع f روی xهای مجموعهٔ دامنهٔ تابع حاصل می‌شود، بُرد تابع می‌گویند. برای تعیین برد تابع تا آن جا که مقدور باشد، از روش‌های زیر می‌توان بهره گرفت.

۱. تشکیل جدول تغییرات تابع

جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم، سطر سوم جدول تغییرات هر تابع، تغییرات برد تابع را نشان می‌دهد.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = x^2 - 5x - 7$ را بیابید.

حل:

$$y'_x = 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y'_x		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{53}{4}$	↗	$+\infty$

برد تابع $R_f = \left[-\frac{53}{4}, +\infty\right)$

۲. محاسبهٔ x از معادلهٔ تابع

از معادلهٔ تابع، x را محاسبه می‌کنیم. سپس محدودهٔ y را چنان تعیین می‌کنیم تا x وجود داشته باشد.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = \frac{2x+1}{x^2+2x+3}$ را بیابید.

حل:

$$y = \frac{2x+1}{x^2+2x+3} \Rightarrow yx^2 + 2yx + 3y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow yx^2 + 2(y-1)x + (3y-1) = 0$$

$$a = y \ , \ b' = y-1 \ , \ c = 3y-1$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{1-y \pm \sqrt{(y-1)^2 - y(3y-1)}}{y}$$

$$= \frac{1-y \pm \sqrt{-2y^2 - y + 1}}{y}$$

برای این که x وجود داشته باشد، باید:

$$-2y^2 - y + 1 \geq 0$$

$$-2y^2 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1, \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{2} \ , \ y \neq 0$$

برد تابع $R_f = \left[-1 \ , \ \frac{1}{2}\right] - \{0\}$

۳. استفاده از اتحاد $x^{2n} \pm kx^n = (x^n \pm \frac{k}{2})^2 - \frac{k^2}{4}$

به کمک اتحاد بالا، می‌توان بُرد بسیاری از تابع‌ها را به دست آورد.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = x^6 - 5x^3 + 3$ را بیابید.

حل:

$$y = x^6 - 5x^3 - 3 = (x^3 - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 3$$

$$y = (x^3 - \frac{5}{2})^2 - \frac{13}{4}$$

کم‌ترین مقدار $(x^3 - \frac{5}{2})^2$، صفر و بیش‌ترین مقدار آن به سمت $+\infty$ میل می‌کند؛ پس برد تابع $y \geq -\frac{13}{4}$ بنابراین:

$$R_f = \left[-\frac{13}{4}\ ,\ +\infty\right)$$

۴. استفاده از صورت ظاهری تابع

در بعضی از تابع‌ها، با استفاده از صورت ظاهری تابع، می‌توان برد تابع را محاسبه کرد.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 5x + 6} + 3$ را بیابید.

حل: حاصل هر رادیکال با فرجهٔ زوج، مثبت یا صفر است. اگر کمی دقت کنیم، به ازای $x = 1$ هر دو رادیکال صفر می‌شود و $y = 3$ و وقتی $x \to \pm\infty$، آن‌گاه $y \to +\infty$؛ پس برد تابع $y \geq 3$ یا $[3\ ,\ +\infty)$ است.

۵. استفاده از مشتق و دامنهٔ تابع

در بعضی از تابع‌ها، به کمک مشتق و دامنهٔ تابع، برد تابع به دست می‌آید.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x + \sqrt{4x - 1}}$ را بیابید.

حل: تابع صعودی اکید است $\Rightarrow$

$$y'_x = \frac{1 + \frac{4}{2\sqrt{4x-1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{4x-1}}} > 0$$

حال دامنهٔ تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$4x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow D_f = \left[\frac{1}{4}\ ,\ +\infty\right)$$

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ ,\ x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

برد تابع $R_f = \left[\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right)$

۶. تغییر متغیر مثلثاتی

به کمک تغییر متغیر مثلثاتی، برد بعضی از تابع‌ها به‌دست می‌آید.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = 2x\sqrt{1 - x^2} + 7$ را بیابید.

حل:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

حق داریم در این مثال، با توجه به تغییرات x، x را مساوی $\sin t$ فرض کنیم.

$$x = \sin t\ ,\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = 2\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} + 7 \Rightarrow y = 2\sin t\sqrt{\cos^2 t} + 7,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = 2\sin t\cos t + 7 \Rightarrow y = \sin 2t + 7$$

برد تابع:

$$\text{Max}(\sin 2t) = 1\ ,\ \text{Min}(\sin 2t) = -1 \Rightarrow 6 \leq y \leq 8$$

۷. تعیین برد تابع به کمک ماکزیمم و می‌نیمم عبارت‌های مثلثاتی

الف. برای تعیین ماکزیمم و می‌نیمم تابع‌های با ضابطه‌های $y_1 = a\sin^2 x + b\sin x + c$ و

$y_2 = a\cos^2 x + b\cos x + c$ باید به جای $\sin x$ و $\cos x$، اعداد ۱ و ۱- و $(-\frac{b}{2a})$ را قرار دهیم؛ به شرطی که $-1 \le -\frac{b}{2a} \le 1$

ب. $n \in N$ ، $\frac{1}{2^{n-1}} \le \sin x^{2n} + \cos x^{2n} \le 1$

ج. $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$

د. $\tan x + \cot x \ge 2$ یا $\tan x + \cot x \le -2$

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = 3\sin^2 x - 4\sin x + 2$ را بیابید.

حل.

$\sin x = 1 \Rightarrow y = 3 - 4 + 2 = 1$

$\sin x = -1 \Rightarrow y = 3 + 4 + 2 = 9$

$\sin x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 3(\frac{4}{9}) - 4(\frac{2}{3}) + 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

پس برد تابع: $\frac{2}{3} \le y \le 9$

توجه: باز هم موارد دیگری برای تعیین برد تابع وجود دارد که در این مقاله، مجال پرداختن به آن‌ها نیست.

آزمون۱. برد تابع با ضابطهٔ $y = x - \sqrt{x-2} - 1$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $y \ge 2$ ۳) $y \ge 3$ ۴) $y \ge \frac{3}{4}$

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$y = (x-2) - \sqrt{x-2} + 1 = (\sqrt{x+2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

$\left.\begin{array}{l} Min(\sqrt{x+2} - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow Min(y) = \frac{3}{4} \\ x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow y \ge \frac{3}{4}$

آزمون۲. برد تابع با ضابطهٔ $y = x^3 + x$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $R - \{0\}$ ۳) R ۴) $y \le 0$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$y' = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ تابع صعودی اکید است

$D_f = (-\infty , +\infty)$

$\left.\begin{array}{l} x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty \\ x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ برد تابع $R_f = R$

آزمون۳. برد تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x^2+1}{x}$ کدام است؟

۱) $-1 \le y \le 1$ ۲) $y \ge 2$ یا $y \le -2$

۳) $-2 \le y \le 2$ ۴) $R - \{0\}$

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$y = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow x^2 - yx + 1 = 0$

$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}$; $y^2 - 4 \ge 0 \Rightarrow y^2 \ge 4 \Rightarrow \begin{cases} y \ge 2 \\ y \le -2 \end{cases}$

آزمون ۴. برد تابع با ضابطهٔ $y = (x^2 - 8x + 7)^{20} + 2$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $y \ge 2$ ۳) R ۴) $y \ge 3$

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x = 1 , 7$

$x = 7 \Rightarrow Min(x^2 - 8x + 7)^{20} = 0 \Rightarrow Min(y) = 2$ یا

$x = 1$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty$; $y \ge 2$

آزمون ۵. برد تابع با ضابطهٔ $y = (x^2 - 6x + 10)^{74} + 5$ کدام است؟

۱) $y \ge 5$ ۲) R ۳) $y \ge 6$ ۴) $y \ge 10$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$y_1 = x^2 - 6x + 10 \Rightarrow y_1' = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x = 3 \Rightarrow y_1 = 1$

$\left.\begin{array}{l} Min(x^2 - 6x + 10)^{74} = 1 \Rightarrow Min\ y = 6 \\ x \to \pm\infty \ \Rightarrow \ y \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow y \ge 6$

آزمون ۶. برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{4x - 7 + \sqrt{x-4}}$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $y \ge 1$ ۳) $y \ge 2$ ۴) $y \ge 3$

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$D_f = [4, +\infty)$ و $y'_x = \frac{4 + \frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2\sqrt{4x - 7 + \sqrt{x-4}}} > 0$ و $x > 4$

$x=۴\Rightarrow y=\sqrt{۱۶-۷}=۳$

$x\to+\infty\Rightarrow y\to+\infty$ $\Rightarrow$ برد تابع : $y\geq ۳$

آزمون ۷ . برد تابع با ضابطهٔ $y=۱+\sqrt{-x^۲+۲x}$ کدام است؟

۱) $۱\leq y\leq ۲$ ۲) $۰\leq y<۲$

۳) $y\geq ۲$ یا $y\leq ۱$ ۴) $y\geq ۲$ یا $y\leq ۰$

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است.

$y-۱=\sqrt{-x^۲+۲x}$, $y-۱\geq ۰\Rightarrow y\geq ۱$ شرط اولیه

$(y-۱)^۲=(\sqrt{-x^۲+۲x})^۲\Rightarrow (y-۱)^۲=-x^۲+۲x$

$\Rightarrow x^۲-۲x+(y-۱)^۲=۰$

$x=۱\pm\sqrt{۱-(y-۱)^۲}$, $۱-(y-۱)^۲\geq ۰\Rightarrow (y-۱)^۲\leq ۱$

$\Rightarrow -۱\leq y-۱\leq ۱\Rightarrow \begin{cases}۰\leq y\leq ۲\\ y\geq ۱\end{cases}$ $\Rightarrow$ $۱\leq y\leq ۲$

آزمون ۸ . برد تابع با ضابطهٔ $y=x+\sqrt{۴-x^۲}$ کدام است؟

۱) $-۲\leq y\leq ۲$ ۲) $-۲\sqrt{۲}\leq y\leq ۲\sqrt{۲}$

۳) $-۲\sqrt{۲}\leq y\leq -۲$ ۴) $-۲\sqrt{۲}\leq y\leq ۲$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$۴-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۴\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

$y-x=\sqrt{۴-x^۲}, y-x\geq ۰\Rightarrow \begin{cases}y\geq x\\ -۲\leq x\leq ۲\end{cases}\Rightarrow y\geq -۲$ شرط اولیه

$(y-x)^۲=\sqrt{۴-x^۲}\Rightarrow y^۲+x^۲-۲yx=۴-x^۲$

$\Rightarrow ۲x^۲-۲yx+(y^۲-۴)=۰$

$x=\dfrac{y\pm\sqrt{y^۲-۲y^۲+۸}}{۲}$, $-y^۲+۸\geq ۰$ $y^۲\leq ۸$

$\Rightarrow \begin{cases}-۲\sqrt{۲}\leq y\leq ۲\sqrt{۲}\\ y\geq -۲\end{cases}$ اشتراک $\Rightarrow$ $-۲\leq y\leq ۲\sqrt{۲}$

آزمون ۹ . برد تابع با ضابطهٔ $y=\lfloor \tan x+\cot x\rfloor$ کدام است؟

۱) z ۲) $z-\{\pm ۲\}$ ۳) $z-\{\pm ۱, ۰\}$ ۴) $z-\{۰\}$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

الف) $\tan x+\cot x\geq ۲\Rightarrow y=۲,۳,۴,\ldots$

ب) $\tan x+\cot x\leq -۲\Rightarrow y=-۲,-۳,-۴,\ldots$

برد تابع $R_f=z-\{\pm ۱, ۰\}$

آزمون ۱۰ . برد تابع با ضابطهٔ $y=۲x\sqrt{۹-x^۲}+۴$ کدام است؟

۱) $-۵\leq y\leq ۹$ ۲) $-۵\leq y\leq ۵$

۳) $-۶\leq y\leq ۶$ ۴) $-۵\leq y\leq ۱۳$

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$۹-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۹\Rightarrow -۳\leq x\leq ۳$

$x=۳\sin t$; $-\dfrac{\pi}{۲}\leq t\leq \dfrac{\pi}{۲}$

$y=۶\sin t\sqrt{۹-۹\sin^۲ t}+۴=۶\sin t\sqrt{۹\cos^۲ t}+۴$

$=۱۸\sin t\cos t+۴$

$y=۹\sin ۲t+۴$ و $-۱\leq \sin ۲t\leq ۱\Rightarrow -۵\leq y\leq ۱۳$

آزمون ۱۱ . برد تابع با ضابطهٔ زیر کدام است؟

$$y=(x-۲)\sqrt{-x^۲+۴x-۳}$$

۱) $-\dfrac{۱}{۲}\leq y\leq \dfrac{۱}{۲}$ ۲) $-۱\leq y\leq ۱$

۳) $-\dfrac{۳}{۲}\leq y\leq \dfrac{۳}{۲}$ ۴) $-۲\leq y\leq ۲$

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است.

$y=(x-۲)\sqrt{۱-x^۲+۴x-۴}=(x-۲)\sqrt{۱-(x-۲)^۲}$

$۱-(x-۲)^۲\geq ۰\Rightarrow -۱\leq (x-۲)^۲\leq ۱$

$x-۲=\sin t$; $-\dfrac{\pi}{۲}\leq t\leq \dfrac{\pi}{۲}$

$y=\sin t\sqrt{۱-\sin^۲ t}=\sin t\sqrt{\cos^۲ t}=\sin t\cos t$

$=\dfrac{۱}{۲}\sin ۲t$

$\begin{cases}\text{Max}\sin ۲t=۱\\ \text{Min}\sin ۲t=-۱\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{۱}{۲}\leq y\leq \dfrac{۱}{۲}$

آزمون ۱۲ . برد تابع با ضابطهٔ زیر کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}\lfloor ۲x\rfloor-۲x & x\notin z\\ -۱ & x\in z\end{cases}$$

۱) $[-۱ , ۱)$ ۲) $[-۱ , ۰)$

۳) $[-۱ , ۰)$ ۴) $[-۱ , ۱]$

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$۰ \le x - \lfloor x \rfloor < ۱ \Rightarrow -۱ < \lfloor x \rfloor - x \le ۰$ ؛ داریم

$\Rightarrow -۱ < \lfloor ۲x \rfloor - ۲x \le ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \notin z & -۱ < y \le ۰ \\ x \in z & y = -۱ \end{cases} \Rightarrow -۱ \le y \le ۰$$

آزمون ۱۳. برد تابع با ضابطهٔ $y = \sin x + \cos x$ ، $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

۱) $-۱ \le y \le \sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲} \le y \le \sqrt{۲}$

۳) $۱ < y \le \sqrt{۲}$ ۴) $-۱ \le y \le ۱$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

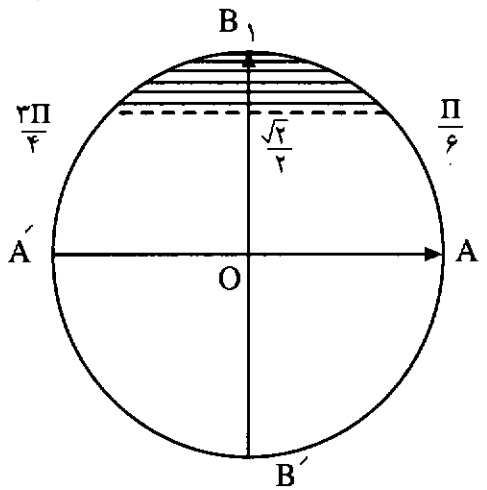
$$y = \sqrt{۲} \sin(x + \frac{\pi}{۴})$$

$$۰ < x < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{\pi}{۴} < x + \frac{\pi}{۴} < \frac{۳\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} < \sin(x + \frac{\pi}{۴}) \le ۱$$

$$\Rightarrow ۱ < \sqrt{۲} \sin(x + \frac{\pi}{۴}) \le \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow ۱ < y \le \sqrt{۲}$$



معماهای فکری و منطقی

B، C، J و S چهار شهروند ثروتمندند که به عنوان معمار، بانکدار، دکتر و وکیل، گرچه نه لزوماً به همین ترتیب، به جامعه خدمت می‌کنند.

B، که محافظه‌کارتر از J، اما لیبرال‌تر از S است، نسبت به افرادی که جوان‌تر از او هستند، گلف‌باز بهتری است و نسبت به افرادی که مسن‌تر از C‌اند، درآمد بیش‌تری دارد. بانکدار، که بیش از معمار درآمد دارد، نه جوان‌ترین و نه مسن‌ترین افراد جمع است.

معمار از دکتر، که نسبت به وکیل، گلف‌باز ضعیف‌تری است، محافظه‌کارتر است.

همان‌گونه که انتظار می‌رود، مسن‌ترین این افراد، محافظه‌کارترین آنان است و بیش‌ترین درآمد را دارد، و جوان‌ترینشان، بهترین گلف‌باز در میان جمع است.

حرفهٔ هرکس چیست؟

جواب: