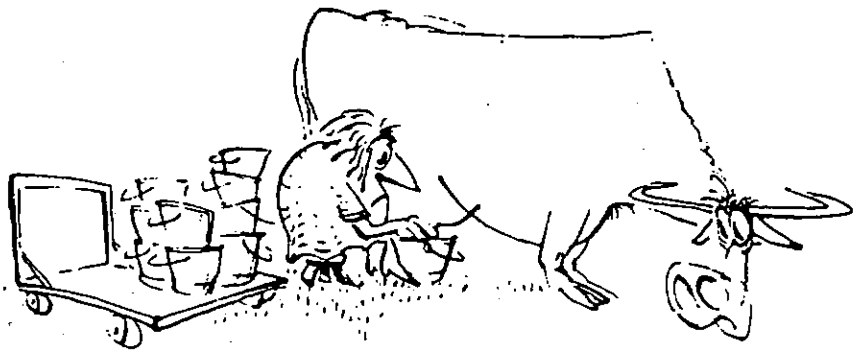
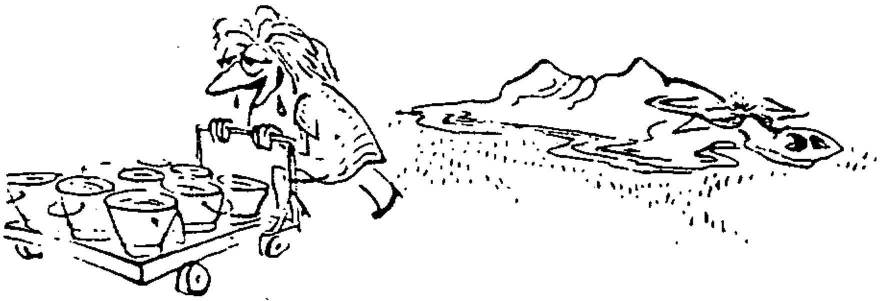
بخش پذیری

$x^n - y^n$ بر $x - y$

(یک مثال ساختاری)





● ترجمه: میرشهرام صدر

MATHEMATICS TEACHER
APRIL 1998
Volume 91 Number 4 (NCTM)

Francis G. French

در این مقاله با روش استدلال استقرایی، بخش‌پذیری $x^n - y^n$ را بر $x - y$ ($x \neq y$ و $n \in \mathbb{N}$) مورد بررسی و تحقیق قرار می‌دهیم. در این مقاله، مثالهایی را مطرح می‌کنیم که به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا درک بهتری از ماهیت استدلال استقرایی و اثباتهای استقرایی داشته باشند و بتوانند دربارهٔ این موضوع حداقل در فضای سه‌بعدی تحقیق، فرضیه‌سازی و آزمایش کنند و مدلهای فیزیکی و تصویری بسازند. دانش‌آموزان من مرکّب از معلّمان دورهٔ راهنمایی و دبیرستان در دوره‌های ضمن خدمت بودند. بیشتر آنها با کاربرد مدلهای فیزیکی و دست‌ساز آشنا نبودند، که این کاربردها برای معلّمان و دانش‌آموزان هدفدار هستند. در هریک از فعّالیتهای زیر، آنها معلّم بودن خود را به شوخی می‌گرفتند و وانمود می‌کردند که دانش‌آموز دبیرستانی هستند.

استدلال خود را با دوره بر مطالبی مربوط به مفهومهای تئوری اعداد، شروع می‌کنیم. همچنین از ویژگیهای توانها، روشهای تشخیص فاکتورهای صحیح مثبت و قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

قضیه. اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به‌طوری که عدد صحیح c هر دوی آنها را بشمارد، آن‌گاه c عدد a+b را می‌شمارد. ($c|a, c|b \Rightarrow c|a + b$).

موضوع مقاله را در پنج قسمت، شرح و بسط می‌دهیم: (۱) تحقیق عددی با استفاده از ماشین حساب (۲) پایهٔ حدس اصلی در این تحقیق (۳) آزمایش عددی حدس یا فرضیه، یافتن مثال نقض و فرصت تصحیح این فرضیه (۴) مدل‌سازی (۵) اثبات، با

استفاده از اصل استقرای ریاضی.

x	y	$x-y$	$x^۲-y^۲$	$\frac{x^۲-y^۲}{x-y}$	$x^۳-y^۳$	$\frac{x^۳-y^۳}{x-y}$	$x^۴-y^۴$	$\frac{x^۴-y^۴}{x-y}$
۱۲	۷	۵	۹۵	۱۹	۱۳۸۵	۲۷۷	۱۸۳۳۵	۳۶۶۷
۱۹	۲	۱۷	۳۵۷	۲۱	۶۸۵۱	۴۰۳	۱۳۰۳۰۵	۷۶۶۵

شکل ۱. صفحه کار برای آزمایش بخش‌پذیری $x^n - y^n$ بر $x - y$

قسمت اوّل: تحقیق با استفاده از صفحهٔ کار یا ماشین‌حساب

صفحهٔ کار را مطابق با شکل (۱) به دانش‌آموزان داده و از آنها می‌خواهیم که با انتخاب دو عدد صحیح برای x و y آن را کامل کنند. دانش‌آموزانی که در این فعالیّت به کامپیوتر و ماشین‌حساب دسترسی ندارند، یک صفحهٔ چرک‌نویس بزرگ برای آنها مفید خواهد بود.

ابتدا دو مقدار $x=۱۲$ و $y=۷$ را درنظر بگیرید. سپس با تکمیل یک سطر از جدول به کمک این دو عدد صحیح، نتیجه می‌گیریم که عددهای مختلف $x^۲-y^۲$ ، $x^۳-y^۳$ و $x^۴-y^۴$ بر $x-y$ بخش‌پذیر هستند. دانش‌آموزان با آزمایش بر روی دو عدد صحیح دیگر، همین نتیجه را گرفتند. هیچ یک از دانش‌آموزان دو عدد x و y را یکسان انتخاب نکردند. در این بحث، $x=y$ را یک حالت خاص درنظر می‌گیریم.

قسمت دوم: فرضیه‌سازی

بعد از بیان نتیجهٔ بالا، گمان می‌کنیم که بتوان قاعده یا دستوری برای این نتیجه پیدا کنیم. دانش‌آموزان باهوش، بسرعت توانستند حدس زیر را بزنند:

اگر x و y دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $(x-y)|(x^n-y^n)$.

عقیدهٔ من و معلّمان این بود که ممکن است، نیاز به مثالهای بیشتری باشد تا این که دانش‌آموزان دبیرستانی بتوانند چنین حدسی را بزنند.

همان‌طور که در این حدس ملاحظه می‌کنید، به این مطلب اشاره نشده است که n باید عددی طبیعی و $x \neq y$. ما در روند اثبات، این مطالب را تصحیح می‌کنیم.

قسمت سوّم: آزمایش کردن

به دانش‌آموزان گفتیم که این فرضیه را آزمایش می‌کنیم، برای این کار آنها می‌توانند از صفحهٔ کار در شکل (۱) استفاده کنند. بعضی از معلّمان تصور کردند که این آزمایش، ممکن است یک تکلیف زیاد و تکراری برای دانش‌آموزان آنها باشد و اثبات این مطلب در جلسهٔ دیگری کامل گردد؛ امّا از آزمایش کردن، دو هدف را دنبال می‌کنیم: **اوّل**؛ یافتن مثال نقض، **دوم**؛ یافتن راه‌هایی برای تصحیح فرضیه. سرانجام، دانش‌آموزان را تشویق کردم که مثالهای زیادی را آزمایش کنند، و آنها امیدوار شدند که قدرت فکر کردن روی فرضیهٔ ناموفق را دارند. آنها به تذکّرهای من توجه می‌کردند و با شور و شوق پاسخ می‌دادند.

برای آزمایش، ده دقیقه وقت درنظر گرفتیم؛ که برای اثبات، وقت کافی بود. مطالبی که در زیر آمده است، نشان‌دهندهٔ مشاهدات دانش‌آموزان دربارهٔ این فرضیه است:

۱. مقدار x نمی‌تواند با مقدار y برابر باشد.
۲. توان n باید عدد صحیح نامنفی باشد.
۳. اگر x و y دو عدد غیرصحیح باشند، نتیجه بی‌معنا می‌شود.
۴. با توجه به مطالبی که در مشاهدات ۱، ۲ و ۳ عنوان شد، فرضیه برای همه عددهای آزمایش شده، برقرار است.

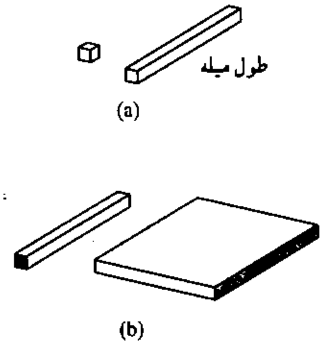
بر اساس این نتایج، فرضیه را به این صورت بیان می‌کنیم: اگر x و y دو عدد صحیح باشند و $x \neq y$ و n عدد صحیح مثبتی باشد، آن‌گاه $(x-y)|(x^n-y^n)$.

قسمت چهارم: مدل‌سازی

ما از ده قطعه اصلی برای مدل‌سازی فرایندی که منجر به اثبات شهودی می‌شود، استفاده می‌کنیم. به‌طور یقین، هر مجموعهٔ *مقایسه‌پذیر*[1] از مدلهای جبری تشکیل شده است. ده قطعهٔ اصلی شامل، یک مکعب کوچک که *واحد*[2] نامیده می‌شود؛ مکعبهایی که از ۱۰ واحد تشکیل شده‌اند و میله[3] نامیده می‌شوند؛ مربعهای ۱۰۰ واحدی که تخت[4] نامیده می‌شوند؛ و مکعبهای بزرگی که از ۱۰۰۰ واحد تشکیل شده‌اند و مکعب[5] نامیده می‌شوند. هر گروه باید مجموعه‌ای از این وسایل کارگاهی را داشته باشند.

دانش‌آموزان با استفاده از ابعاد میله و قطعاتی شبیه به رشته‌های ماکارونی، مجموعه‌ای از پاره‌خطها با دو طول مختلف را ساختند. مجموعهٔ اول، پاره‌خطهایی که اندازهٔ آنها برابر با یک ضلع مکعب واحد است و مجموعهٔ دیگر، پاره‌خطهایی که اندازهٔ آنها برابر طول میله است. (شکل ۲a را ملاحظه کنید.)

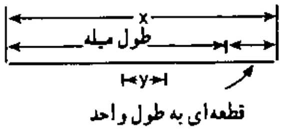
دانش‌آموزان باید با کاغذ یا مقوای نازک، مجموعه‌ای از سه نوع سطح را بسازند. مجموعهٔ اول، سطحی مانند وجه کوچک میله ؛ مجموعهٔ دوم، سطحی مانند وجه بزرگ میله و مجموعهٔ سوم، سطحی مانند بزرگترین وجه تخت. (شکل ۲b را ملاحظه کنید.)



شکل ۲

در هر مرحله، کار گروهی که باید دانش‌آموزان انجام دهند، کار با پروژکتور اُورهد است، به‌طوری که نتیجه‌ها روی پردهٔ سفیدی پدیدار گردد تا این‌که نقطهٔ اصلی بحث، تفهیم شود.

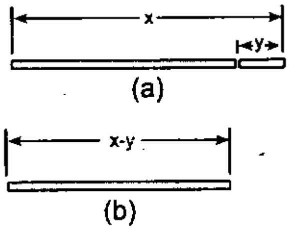
ما باید مدلهای متفاوتی را برای اثبات حالتهای n=۱، n=۲ و n=۳ به‌کار ببریم. همچنان‌که کار پیش می‌رفت، ما از نتیجه‌هایی که در هر مرحله به‌دست می‌آوردیم، برای اثبات درستی قسمت بعدی استفاده می‌کردیم. از مدلهای طولی استفاده می‌کنیم، یک قطعه به اندازهٔ طول میله و دو قطعه به اندازهٔ طول ضلع مکعب واحد برمی‌داریم. قطعه‌ای به طول واحد را در قسمت انتهایی قطعه‌ای به طول میله قرار می‌دهیم، سپس طول قطعه به‌دست آمده را x می‌نامیم. به‌علاوه قطعهٔ دیگر به طول واحد را y می‌نامیم. از این دو قطعه به طولهای x و y در روند اثبات، به‌عنوان خط‌کش استفاده می‌کنیم.



شکل ۳.خط کشها

مرحلهٔ اول: n = ۱

یک قطعه به اندازه طول میله و قطعه‌ای به طول واحد برمی‌داریم. قطعهٔ به طول واحد را در قسمت انتهایی قطعهٔ به طول میله قرار می‌دهیم و اندازهٔ طول قطعهٔ به‌دست آمده را x درنظر می‌گیریم. اکنون قطعهٔ به طول واحد را از این قطعهٔ جدید برمی‌داریم. (اندازهٔ طول قطعهٔ واحد را y درنظر بگیرید.) عبارتی جبری برای اندازهٔ میلهٔ باقیمانده بنویسید. (شکل ۴ را ملاحظه کنید.)



شکل ۴.مدل فضای یک بعدی

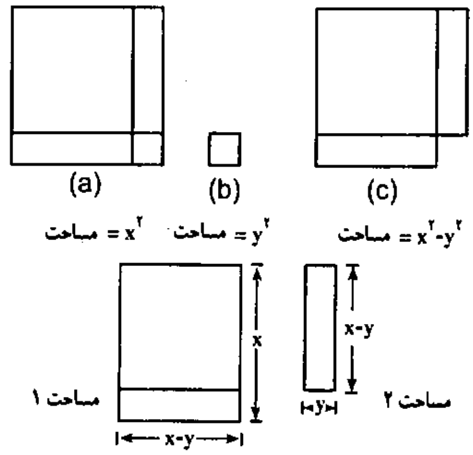
دانش‌آموزان کلاس خیلی سریع به عبارت $x-y$ برای اندازهٔ میلهٔ باقیمانده رسیدند. می‌دانیم که :

$$(x-y)|(x-y)$$

مرحلهٔ دوم: n = ۲

در این مرحله، باید نتیجه‌هایی را که از مدل فضای یک‌بعدی به‌دست آوردیم، برای مدل فضای دوبعدی مورد استفاده قرار دهیم. مدلهای سطحهای مختلف در شکل ۲b را به کار ببرید و مربعی شبیه به شکل ۵a بسازید. با استفاده از اندازهٔ طول قطعه‌های شکل ۴، یک عبارت برای مساحت مربع بنویسید. اکنون مربع کوچک را از روی مدل برمی‌داریم. یک عبارت برای مساحت این مربع کوچک بنویسید. (شکل ۵b) سرانجام یک عبارت برای مساحت مدل باقیمانده بنویسید. (شکل ۵c را ملاحظه کنید.)

مدل شکل ۵c را به دو قسمت تقسیم کنید، به‌طوری که هر قسمت، یک ضلع به اندازهٔ طول مدل شکل ۴b داشته باشد. اندازه اضلاع هر قسمت را بیابید، سپس برای مساحت هر قسمت، یک عبارت جبری بنویسید. در صورت نیاز از خط کشها استفاده کنید.



شکل ۵. مدل فضای دو بعدی

در این مرحله، دانش‌آموزان با اندکی تأمل توانستند، عبارتهایی جبری برای مساحتهای این دو قسمت مشخص کنند. مساحت ۱ با حاصلضرب $x(x-y)$ و مساحت ۲ با حاصلضرب $y(x-y)$ محاسبه می‌شود. چون هر دو قسمت شامل عامل $x-y$ است، درنتیجه $x-y$ مجموع این دو عبارت را می‌شمارد، بنابراین داریم :

$$x(x-y)+y(x-y)=x^2-xy+xy-y^2$$
$$=x^2-y^2$$

و $x-y$ عبارت x^2-y^2 را می‌شمارد.

مرحلهٔ سوم: $n=3$

در این مرحله، باید نتیجه‌هایی را که از مدل فضای دوبعدی به‌دست آوردیم، برای مدل فضای سه‌بعدی مورد استفاده قرار دهیم. برای این کار، یک مکعب بزرگ، سه تخت، سه میله و یک مکعب واحد را بردارید. سپس با استفاده از همهٔ آنها یک مکعب بسازید و عبارتی برای حجم این مکعب بنویسید. اکنون مکعب واحد را از این مدل بردارید و یک عبارت جبری برای حجم آن بنویسید. سپس یک عبارت جبری برای حجم مدل باقیمانده بنویسید. اکنون این مدل را به دو حجم ۱ و ۲ تفکیک کنید، به‌طوری که یکی از قسمتها، سطحی مانند مدل **شکل 5c** داشته باشد. سرانجام، ابعاد هر دو قسمت را مشخص کنید و عبارتهای جبری برای حجمهای هر قسمت بنویسید. در صورت نیاز، از خط کشها استفاده کنید. (**شکل ۶** را ملاحظه کنید.)

در این مرحله، دانش‌آموزان باید نسبت به دو مرحلهٔ قبل، مقدار بیشتری تلاش می‌کردند. سرانجام آنها مشخص کردند که حجم ۱ با حاصلضرب $x^2(x-y)$ و حجم ۲ با حاصلضرب $y(x^2-y^2)$ محاسبه می‌شود. به اتحاد زیر توجه کنید :

$$x^2(x-y)+y(x^2-y^2)=x^3-x^2y+x^2y-y^3$$
$$=x^3-y^3$$

به‌علاوه، حجم ۱ شامل عامل $x-y$ است. حجم ۲ شامل عامل x^2-y^2 است که در مدل فضای ۲ـ بعدی نشان دادیم : $(x-y)|(x^2-y^2)$. درنتیجه، حجم هر دو قسمت شامل عامل $x-y$ است، بنابراین $x-y$ عبارت x^3-y^3 را می‌شمارد، یعنی : $(x-y)|(x^3-y^3)$.

مرحلهٔ چهارم: $n=4$

اگرچه تصور فضای ۴ـ بعدی بیش از ظرفیّت ذهن ماست ؛ امّا سعی می‌کنیم، نتیجه‌هایی را که برای $n=1$، $n=2$ و $n=3$ به‌دست آوردیم، برای فضای ۴ـ بعدی به‌کار ببریم. به یاد بیاورید که x^3-y^3 را به دو قسمت تفکیک کردیم. یک قسمت، شامل عامل $x-y$ و قسمت دیگر، شامل نتیجه‌های مدل فضا ۲ـ بعدی دربارهٔ x^2-y^2 است. با دقت، به عبارتهایی که برای حجمهای این دو قسمت به‌دست آمد ؛ توجه کنید و به‌طور مشابه برای x^4-y^4 بحث کنید.

بعد از چند دقیقه، بعضی از گروه‌های کاری توانستند اتحاد زیر را بیابند :

$$x^4-y^4=x^3(x-y)+y(x^3-y^3)$$

به اتحاد زیر توجه کنید :

$$x^3(x-y)+y(x^3-y^3)=x^4-x^3y+x^3y-y^4$$
$$=x^4-y^4$$

با توجه به این اتحاد ملاحظه می‌کنیم که (۱) $x-y$ عبارت x^4-y^4 را می‌شمارد و (۲) قرارداد می‌کنیم که نتیجه‌های مشابهی را برای مقادیر صحیح بزرگتر از n به‌دست می‌آوریم.

این قرارداد را آزمایش می‌کنیم، دانش‌آموزان کلاس نتیجه را برای $n=5$ به‌صورت زیر مشخص کردند :

$$x^5-y^5=x^4(x-y)+y(x^4-y^4)$$

به اتحاد زیر توجه کنید :

$$x^4(x-y)+y(x^4-y^4)=x^5-x^4y+x^4y-y^5$$
$$=x^5-y^5$$

مرحلهٔ پنجم: برهان

این فرضیه را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم، بنابراین لازم است که :

۱) نشان دهیم که فرضیه برای مرحلهٔ اوّل برقرار است.

۲) نشان می‌دهیم که اگر فرضیه برای عدد صحیح و مثبت n برقرار باشد، آن‌گاه فرضیه برای عدد n+1 برقرار است.

ثابت می‌کنیم که x و y دو عدد صحیح باشند به‌طوری که $x \neq y$ و n عدد صحیح مثبتی باشد آن‌گاه $x-y$ عبارت x^n-y^n را می‌شمارد. روند اثبات به‌صورت زیر است :

۱) در این‌جا، لازم است که نشان دهیم، n=1 در فرضیه صدق می‌کند.

۲) فرض می‌کنیم که $x-y$ عبارت x^k-y^k را بشمارد. آیا می‌توانیم با استفاده از این فرض، ثابت کنیم که $x-y$ عبارت $x^{k+1}-y^{k+1}$ را می‌شمارد؟

با استفاده از قرارداد کلی، قادر خواهیم بود که این‌کار را انجام دهیم. فرض کنیم که $x-y$ عبارت x^k-y^k را می‌شمارد، اکنون الگویی را که برای $n=1,2,3,4$ ملاحظه کردید، بسط دهید و یک اتحاد بسازید. دانش‌آموزان با یک کار گروهی نسبتاً سریع، توانستند اتحاد زیر را بیابند :

$$x^{k+1}-y^{k+1}=x^k(x-y)+y(x^k-y^k)$$

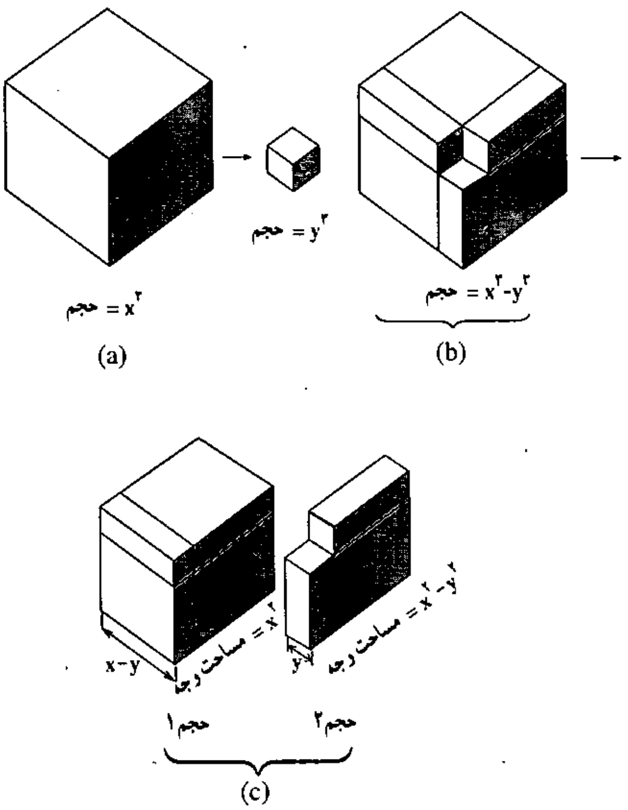
واضح است که $x-y$ عبارت $x^k(x-y)$ را می‌شمارد و $x-y$ طبق فرض استقرا عبارت x^k-y^k را می‌شمارد، بنابراین داریم :

$$\left.\begin{array}{l}(x-y)\,|\,x^k(x-y)\\(x-y)\,|\,y(x^k-y^k)\end{array}\right\}\Rightarrow (x-y)\,|\,x^k(x-y)+y(x^k-y^k)$$

در نتیجه، $(x-y)\,|\,x^{k+1}-y^{k+1}$. بنابراین حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است و در این مرحله اثبات کامل می‌گردد.

نتیجه

تعداد زیادی از دانش‌آموزان، اطمینان کامل داشتند که استدلال استقرایی و اثبات استقرایی را فهمیده‌اند. به‌طورکلی آنها موافق بودند که استفاده از مدلهای دست‌ساز، بسیار مناسب است و آنها نشان دادند که می‌توانند از مدلهای دست‌ساز استفاده کنند.



شکل ۶.مدل فضای سه بعدی

یادداشتها :

۱. دو مجموعهٔ A و B را مقایسه‌پذیر گویند، هرگاه $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.
۲. units
۳. rod
۴. flat
۵. cube