اشاره

در شمارهٔ قبل ثابت کریم که مقطع مخروطی در حالت کلی دارای معادلهٔ $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ است، سپس دربارهٔ نوع مقطع مخروطی با توجه به ضرایب معادله بالا بحث کردیم، اینک در ادامه داریم:

مقطع مخروطی به معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

اکنون دستگاه محورهای مختصات را به اندازهٔ α دوران می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

$$A(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + 2B(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)\times$$
$$(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + C(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 +$$
$$2D(X\cos\alpha - Y\sin\alpha) + 2E(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + F = 0$$

اگر معادلهٔ مقطع مخروطی را در دستگاه جدید به صورت زیر فرض کنیم:

$$A_1X^2 + 2B_1XY + C_1Y^2 + 2D_1X + 2E_1Y + F = 0$$

و معادله‌ای که پس از دوران به دست آمده است، ساده کنیم و با معادلهٔ بالا مقایسه کنیم و متحد قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A_1 = A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + c\sin^2\alpha \\ C_1 = A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + c\cos^2\alpha \end{cases}$$

اگر طرفین دو رابطهٔ بالا را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$A_1 + C_1 = A + C$$

یعنی با وجود آن که ضرایب X^2 و Y^2 و XY و X و Y در مقطع مخروطی تغییر کرده‌اند، مجموع $A+C$ در حالت تغییریافته نیز با $A_1 + C_1$ برابر است. همچنین اگر مقدار Δ را در این حالت نیز حساب کنیم، با Δ در حالت اول برابر است. و خلاصه اگر مقدار $\delta = B^2 - AC$ را و همچنین اگر

$$J = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}$$

را در این حالت حساب کنیم، دوباره مقدارش با حالت اول برابر است. از این رو چهار مقدار ($I = A + C$ و $\delta = B^2 - Ac$ و Δ و J)، «اینوار یا نتها یا تغییرناپذیرهای مقاطع مخروطی» نامیده می‌شوند که نقش مهمی در تعیین نوع مقطع مخروطی دارند. در معادلهٔ مقطع مخروطی که پس از

دوران به دست آورده‌ایم، اگر ضریب xy را صفر کنیم، یعنی: $(C-A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0$ ، خواهیم داشت:

$$2B\cos 2\alpha = (A-C)\sin 2\alpha \Rightarrow tg2\alpha = \frac{2B}{A-c}$$

اگر از فرمول بالا مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin 2\alpha = \pm\frac{2B}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}} \quad \cos 2\alpha = \pm\frac{A-C}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}$$

با توجه به مقادیر A_1 و c_1 که پس از دوران دستگاه پیدا کرده‌ایم و با توجه به مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ که در بالا محاسبه کردیم، خواهیم داشت:

$$A_1 - C_1 = \pm\sqrt{4B^2+(A-C)^2}$$

از طرف دیگر $A_1 - C_1 = A + C$ ، بنابراین داریم:

$$(A_1+C_1)^2 - (A_1-C_1)^2 = 4A_1C_1$$
$$\Rightarrow (A+C)^2 - 4B^2 - (A-C)^2 = 4A_1C_1$$
$$(A+C)^2 - (A-C)^2 = 4B^2 = 4A_1C_1$$
$$\Rightarrow 4AC - 4B^2 = 4A_1C_1$$
$$\Rightarrow A_1C_1 = AC - B^2 \quad , \quad A_1 + C_1 = A + C$$

ریشه‌های این معادله A_1 و C_1 هستند:

$$Z^2 - (A+C)Z + (AC - B^2) = 0$$

اکنون مثالی می‌زنیم تا کاربرد معادلهٔ بالا را مشاهده کنیم:

مثال: نوع مقطع مخروطی زیر را تعیین و سپس آن را رسم کنید:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 + 22x - 6y + 21 = 0$$

حل: اول باید ببینیم که مرکزدار است یا خیر:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 11 \\ 3 & 5 & -3 \\ 11 & -3 & 21 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = -704$$

چون $\Delta \neq 0$ است، پس مقطع مخروطی مرکزدار است. حال مختصات مرکز آن را پیدا می‌کنیم:

مرکز مقطع:

$$\omega \left| \begin{array}{l} f'_x = 0 \Rightarrow \\ f'_y = 0 \Rightarrow \end{array} \right. \begin{cases} 10x + 6y + 22 = 0 \\ 6x + 10y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega \left| \begin{array}{l} -4 \\ 3 \end{array} \right.$$

پس از آن که $x \to (x-4)$ و $y \to y+3$ تبدیل کنیم، معادلهٔ مقطع مخروطی به صورت‌های زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} 5x^2 + 6xy + 5y^2 + \dfrac{\Delta}{Ac - B^2} = 0 & (1) \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 + f(-4,3) = 0 & (2) \end{cases}$$

زیرا هر دو معادله یک حاصل را پدید می‌آورند:

$$f(-4,3) = -32$$

$$5x^2 + 6xy + 5y + \frac{-704}{25-9} = 0$$
$$\Rightarrow 5x^2 + 6xy + y^2 - 32 = 0$$

حال $\delta = B^2 - Ac$ را پیدا می‌کنیم:

$$\delta = B^2 - Ac = 9 - 25 \Rightarrow \delta = -16 < 0$$

چون $\Delta \neq 0$ است، پس مقطع مرکزدار و تجزیه‌نشده است و چون $\delta < 0$ است، مقطع از نوع بیضی است، حال برای پیدا کردن معادلهٔ بیضی در دستگاه قائم می‌توان به دو راه عمل کرد:

۱-

$$z^2 - (A+C)z + AC - B^2 = 0 \Rightarrow z^2 - 10z + 16 = 0$$

$$(z-8)(z-2) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} z = 8 \\ z = 2 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A_1 = 8 \\ C_1 = 2 \end{array} \right.$$

معادله در دستگاه قائم به صورت زیر است:

$$A_1x^2 + C_1y^2 - 32 = 0$$

$$8x^2 + 2y^2 - 32 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلهٔ بیضی در دستگاه قائم

همان‌طوری که مشاهده می‌شود، مقطع مخروطی بیضی قائم، است که به صورت زیر رسم می‌شود:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow O \left| \begin{array}{l} 0 \quad a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \;;\; c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3} \\ 0 \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{array} \right.$$

$$A\left|\begin{array}{l}\alpha \\ \beta + a\end{array}\right. \quad A'\left|\begin{array}{l}\alpha \\ \beta - a\end{array}\right. \quad F\left|\begin{array}{l}\alpha \\ \beta + c\end{array}\right. \quad F'\left|\begin{array}{l}\alpha \\ \beta - c\end{array}\right. \quad B\left|\begin{array}{l}\alpha + b \\ \beta\end{array}\right. \quad B'\left|\begin{array}{l}\alpha - b \\ \beta\end{array}\right.$$

$$A\left|\begin{array}{l}0 \\ 4\end{array}\right. \quad A'\left|\begin{array}{l}0 \\ -4\end{array}\right. \quad F\left|\begin{array}{l}0 \\ 2\sqrt{3}\end{array}\right. \quad F'\left|\begin{array}{l}0 \\ -2\sqrt{3}\end{array}\right. \quad B\left|\begin{array}{l}2 \\ 0\end{array}\right. \quad B'\left|\begin{array}{l}-2 \\ 0\end{array}\right.$$

راه دوم: اگر دستگاه مختصات را با توجه به $tg2\alpha = \frac{2B}{A-c}$ که از آن‌جا مقدار α به صورت زیر به دست

می‌آید، دوران دهیم، خواهیم داشت:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{6}{5-5}=\frac{6}{0}\quad \text{تعریف نشده} \quad \Rightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\end{cases}$$

یعنی به جای Y و X مقادیر جدیدی در معادلهٔ مقطع قرار می‌دهیم. داریم:

$$5\times\frac{2}{4}(X-Y)^2+6\times\frac{2}{4}(X^2-Y^2)+5\times\frac{2}{4}(X+Y)-32=0$$
$$5(X-Y)^2+6(X^2-Y^2)+5(X+Y)^2-64=0$$
$$\Rightarrow 10(X^2+Y^2)+6(X^2-Y^2)=64$$
$$5X^2+5Y^2+3X^2-3Y^2=32\Rightarrow 8X^2+2Y^2=32$$
$$\Rightarrow\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{16}=1$$

یعنی همان معادلهٔ بیضی قائمی که در بالا به دست آوردیم و رسم کردیم. گفتیم معادلهٔ کلی مقاطع مخروطی به صورت ضمنی به شکل زیر است:

$$Ax^2+2Bxy+cy^2+2Dx+2Ey=F=0$$

حال اگر این معادله را بر حسب y مرتب و حل کنیم، معادلهٔ صریح مقطع مخروطی به دست می‌آید. یعنی:

$$Cy^2+2(Bx+E)y+Ax^2+2Dx+F=0$$

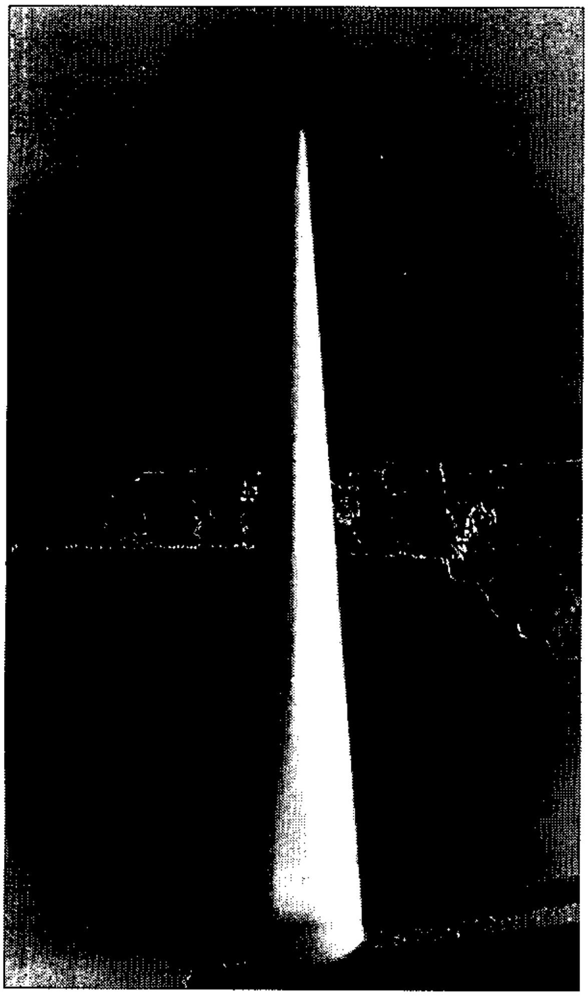
$$y=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{(Bx+E)^2-c(Ax^2+2Dx+E)}}{C}$$

چون زیر رادیکال را مرتب کنیم، داریم:

$$y=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{(B^2-AC)x^2+2(BE-DC)x+E^2-CE}}{C}$$

باز می‌توان بحث گذشته را روی مقطع صریح بالا پیاده کرد. این مقطع مخروطی وقتی می‌تواند یکی از مقاطع مخروطی چهارگانهٔ حقیقی باشد که، زیر رادیکال مجذور کامل نباشد و در ضمن دلتای زیر رادیکال بزرگ‌تر از صفر باشد. یعنی $(BE-DC)^2-(B^2-Ac)(E^2-CE)>0$ باشد.

و اگر زیر رادیکال مجذور کامل باشد، معادلهٔ دو خط را



داریم و اگر زیر رادیکال منفی باشد، یا دلتای زیر رادیکال منفی باشد، مقاطع مخروطی موهومی خواهیم داشت. حال اگر فرمول بالا را به صورت ساده‌تر بنویسیم، داریم:

$$y=\underbrace{-\frac{B}{C}}_{a}x\underbrace{-\frac{E}{C}}_{b}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{B^2-Ac}{C^2}\right)}_{a'}x^2+\underbrace{\frac{2(BE-DC)}{C^2}}_{b'}x+\underbrace{\frac{E^2-CE}{C^2}}_{c'}}$$

درنتیجه داریم: $y=ax+b\pm\sqrt{a'x^2+b'x+c'}$ (به فرض این که زیر رادیکال مثبت باشد.)

۱. اگر $a'>0$ آن‌گاه، مقطع مخروطی هذلولی است.

۲. اگر $a'<0$ و $a'\neq-1$ آن‌گاه، مقطع بیضی است.

۳. اگر $a'=-1$ و $a=0$ آن‌گاه، مقطع مخروطی دایره است.

۴. اگر $a'=0$ آن‌گاه، مقطع مخروطی سهمی است.

۵. اگر زیر رادیکال مجذور کامل باشد آن‌گاه مقطع مخروطی به یک جفت خط تبدیل می‌شود.