برای دانش آموزان سال سوم

۲

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری

● محمدهاشم رستمی

اشاره:

در شماره قبل درباره‌ی وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم بحث کردیم، اینک در ادامه‌ی مطلب درباره‌ی علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم بحث می‌کنیم.

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری

اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ را x' و x'' بنامیم، مجموع ریشه‌های این معادله، $S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌های آن $P = x'x'' = \frac{c}{a}$ است. یک روش برای نشان دادن درستی این مطلب، استفاده از دستور (b) برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم است. زیرا داریم:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} + \frac{-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

$$\Rightarrow S = \frac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac} - b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} = -\frac{۲b}{۲a} = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = x' + x'' = -\frac{b}{a}}$$

$$P = x'x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}\right)$$

$$= \frac{b^۲ - (b^۲ - ۴ac)}{۴a^۲}$$

$$\Rightarrow P = x'x'' = \frac{۴ac}{۴a^۲} = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{P = x'x'' = \frac{c}{a}}$$

با استفاده از علامت حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم، یعنی علامت $P = x'x'' = \frac{c}{a}$ و علامت مجموع ریشه‌ها، یعنی علامت $S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$ می‌توانیم، علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم را تعیین کنیم. از طرف دیگر، چون وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم با استفاده از علامت $\Delta = b^۲ - ۴ac$ (یا علامت Δ') مشخص می‌شود، پس برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم باید، Δ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را تعیین علامت کنیم.

مثال۱. وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ را تعیین کنید (بدون حل کردن معادله).

حل:

داریم:

$a = ۲,\ b = -۳,\ c = ۱$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۳)^۲ - ۴(۲)(۱) = ۹ - ۸ = +۱ > ۰$

پس معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

$P = x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} > ۰ \Rightarrow$ دو ریشه هم‌علامت هستند

$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{-(-۳)}{۲} = +\frac{۳}{۲} > ۰ \Rightarrow$

درنتیجه هر دو ریشه‌ی معادله مثبت هستند.

مثال ۲. وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲}+۱۳x+۴=۰$ را تعیین کنید (بدون حل کردن معادله).

حل:

داریم:

$$a=۲,\ \ b=۱۳,\ \ c=۴$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۱۳)^{۲}-۴(۲)(۴)=۱۶۹-۳۲=۱۳۷>۰$$

پس معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد

$P=x'x''=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۲}=۲>۰\Rightarrow$ دو ریشه هم‌علامت هستند

$S=x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{-۱۳}{۲}<۰\Rightarrow$ هر دو ریشه منفی هستند

مثال۳. وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $۵x^{۲}-۲x-۳=۰$ را تعیین کنید (بدون حل کردن معادله).

حل:

داریم:

$$a=۵,\ \ b=-۲,\ \ c=-۳$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۲)^{۲}-۴(۵)(-۳)=۴+۶۰=۶۴>۰$$

پس معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

$$P=x'x''=\frac{c}{a}=\frac{-۳}{۵}<۰$$

بنابراین دو ریشه‌ی معادله مختلف‌العلامت هستند.

$$S=x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{-(-۲)}{۵}=+\frac{۲}{۵}>۰$$

درنتیجه قدرمطلق ریشه‌ی مثبت بیش‌تر است.

نکته: وقتی در یک معادله‌ی درجه دوم، a و c مختلف‌العلامت باشند، Δ حتماً مثبت است، یعنی معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد و این دو ریشه مختلف‌العلامت هستند. در این حالت برای این‌که بررسی کنیم قدرمطلق کدام ریشه بیش‌تر است، علامت $x'+x''=-\frac{b}{a}$ را تعیین می‌کنیم. اگر $-\frac{b}{a}>۰$ باشد، قدرمطلق ریشه‌ی مثبت بیش‌تر است و اگر $-\frac{b}{a}<۰$ باشد، قدرمطلق ریشه‌ی منفی بیش‌تر خواهد بود.

در صورتی که $-\frac{b}{a}=۰$ یعنی $b=۰$ باشد، دو ریشه قرینه‌ی یکدیگرند.

مثال۴. وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $۷x^{۲}+۳x-۲=۰$ را بدون حل کردن معادله تعیین کنید.

حل: چون a و c مختلف‌العلامت هستند، پس معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد و چون:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=-\frac{۳}{۷}<۰$$

پس قدرمطلق ریشه‌ی منفی بیش‌تر است.

به طور کلی برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ جدول زیر را داریم:

$\Delta>۰$ معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد	$\frac{c}{a}>۰$ دو ریشه هم‌علامت هستند	$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow$	هر دو ریشه مثبت هستند
		$-\frac{b}{a}<۰\Rightarrow$	هر دو ریشه منفی هستند
	$\frac{c}{a}<۰$ دو ریشه مختلف‌العلامت هستند	$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow$	قدرمطلق ریشه‌ی مثبت بیش‌تر است
		$-\frac{b}{a}<۰\Rightarrow$	قدرمطلق ریشه‌ی منفی بیش‌تر است
	$\frac{c}{a}=۰$ یک ریشه صفر است	$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow$	یک ریشه صفر و ریشه‌ی دیگر مثبت است
		$-\frac{b}{a}<۰\Rightarrow$	یک ریشه صفر و ریشه‌ی دیگر منفی است
$\Delta=۰$ معادله ریشه‌ی مضاعف دارد	$\frac{c}{a}>۰$	$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow$	ریشه‌ی مضاعف مثبت است
		$-\frac{b}{a}<۰\Rightarrow$	ریشه‌ی مضاعف منفی است
	$\frac{c}{a}=۰$	$x'=x''=۰$	معادله ریشه‌ی مضاعف صفر دارد
$\Delta<۰$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد	ریشه‌ی حقیقی وجود ندارد		

نکته‌ی مهم: برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری باید Δ ، $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ را برحسب پارامتر محاسبه و در جدولی تعیین علامت کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱ . در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری $x^۲ - ۲(m+۱)x + ۳m + ۱ = ۰$ به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید.

حل:

Δ یا Δ' ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$a = ۱,\ \ b = -۲(m+۱) \Rightarrow b' = -(m+۱),\ \ c = ۳m+۱$$

$$\Delta' = b'^۲ - ac = (m+۱)^۲ - ۱(۳m+۱) = m^۲ - m$$

$$\Delta' = ۰ \Rightarrow m^۲ - m = ۰ \Rightarrow m(m-۱) = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۰, m = ۱}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{۳m+۱}{۱} = ۳m+۱,\ \ ۳m+۱ = ۰ \Rightarrow ۳m = -۱ \Rightarrow \boxed{m = -\frac{۱}{۳}}$$

$$\frac{-b}{a} = \frac{+۲(m+۱)}{۱} = ۲(m+۱), ۲(m+۱) = ۰ \Rightarrow m+۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -۱}$$

m	$-\infty$ تا -۱	-۱ تا $-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$ تا ۰	۰ تا ۱	۱ تا $+\infty$
Δ	+	+	+	−	+
$\frac{c}{a}$	−	−	+	+	+
$\frac{-b}{a}$	−	+	+	+	+
R	دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه، قدر مطلق ریشه‌ی منفی بزرگ‌تر است	دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه، قدر مطلق ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است	دو ریشه‌ی مثبت	ریشه ندارد	دو ریشه‌ی مثبت

$m=-۱$: $x_۱ = -x_۲$ ، $m=-\frac{۱}{۳}$: $x_۱ = ۰, x_۲ > ۰$ ، $m=۰$: $x_۱ = x_۲ > ۰$ ، $m=۱$: $x_۱ = x_۲ > ۰$

مثال ۲ . در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری $۲mx^۲ - ۲(m-۳)x + m - ۳ = ۰$ به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید (ریشه‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۱ < x_۲$ بگیرید).

حل:

Δ' ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

داریم:

$$\Delta' = b'^۲ - ac = (m-۳)^۲ - ۲m(m-۳) = -m^۲ + ۹,$$

$$\Delta' = ۰ \Rightarrow -m^۲ + ۹ = ۰ \Rightarrow m^۲ = ۹ \Rightarrow \boxed{m = +۳,\ \ m = -۳}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m-۳}{۲m},\ \ m - ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۳},$$

$۲m = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۰}$ ریشه‌ی مخرج

$$-\frac{b}{a} = \frac{۲(m-۳)}{۲m},\ \ m - ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۳},$$

$۲m = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۰}$ ریشه مخرج

m	$-\infty$ تا -۳	-۳ تا ۰	۰ تا ۳	۳ تا $+\infty$
Δ'	−	+	+	−
$\frac{c}{a}$	+	+	−	+
$\frac{-b}{a}$	+	+	−	+
R	ریشه ندارد	$۰ < x_۱ < x_۲$	$x_۱ < ۰ < x_۲$	ریشه ندارد

$m=-۳$: $x_۱ = x_۲ > ۰$ ، $m=۰$: $x_۱ = \frac{۱}{۲}, x_۲ \to \infty$ ، $m=۳$: $x_۱ = x_۲ = ۰$

مثال ۳ . در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری $x^۲ + (۲m+۱)x + ۲m = ۰$ به ازای مقدارهای مختلف پارامتر m بحث کنید (ریشه‌های معادله را $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۱ < x_۲$ بگیرید).

حل:

Δ ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

داریم:

$$a = ۱,\ \ b = (۲m+۱),\ \ c = ۲m$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۲m+۱)^۲ - ۴ \times ۲m = ۴m^۲ + ۱ + ۴m - ۸m$$

$$\Rightarrow \Delta = ۴m^۲ - ۴m + ۱ = (۲m-۱)^۲,\ \ \Delta = ۰ \Rightarrow (۲m-۱)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲m - ۱ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = \frac{۱}{۲}}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{۲m}{۱} = ۲m,\ \ ۲m = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۰}$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{-(۲m+۱)}{۱} = -۲m - ۱,\ \ -۲m - ۱ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = -\frac{۱}{۲}}$$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Δ	+		+		+		+	
$\frac{c}{a}$	−		−		+		+	
$\frac{-b}{a}$	+		−		−		−	
R	$x_1<0<x_2$, $\lvert x_2\rvert>\lvert x_1\rvert$		$x_1<0<x_2$, $\lvert x_1\rvert>\lvert x_2\rvert$		$x_1<x_2<0$		$x_1<x_2<0$	

$x_1=-x_2$ $x_1<x_2=0$ $x_1=x_2<0$

نکته: نتیجه‌ی جدول مربوط به بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری را می‌توان، هم به صورت جملات فارسی (مانند مثال ۱) و هم به صورت نماد ریاضی (مانند مثال‌های ۲ و ۳) نوشت.

مثال ۴. معادله‌ی پارامتری $x^2+2x+m-3=0$ داده شده است. به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m در وجود و علامت ریشه‌های این معادله بحث کنید.

حل:

Δ'، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

داریم:

$a=1,\ b=2,\ c=m-3$

$\Delta'=b'^2-ac=(1)^2-1(m-3)=1-m+3=-m+4,$

$\Delta'=0\Rightarrow -m+4=0\Rightarrow \boxed{m=4}$

$\frac{c}{a}=\frac{m-3}{1}=m-3,\ \ m-3=0\Rightarrow \boxed{m=3}$

$-\frac{b}{a}=\frac{-2}{1}=-2<0$

m	$-\infty$	3		4		$+\infty$
Δ'	+		+		−	
$\frac{c}{a}$	−		+		+	
$\frac{-b}{a}$	−		−		−	
R	$x_1<0<x_2$, $\lvert x_1\rvert>\lvert x_2\rvert$		$x_1<x_2<0$			

$x_1<x_2=0$ $x_1=x_2<0$

آزمون‌ها

آزمون ۱. برای آن‌که معادله‌ی زیر:

$x^2-(2m-3)x+m-2=0$

دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>-2$ ۲) $m<-2$

۳) $m>2$ ۴) $m<2$

حل:

شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت باشد، آن است که $\frac{c}{a}<0$ باشد. پس باید داشته باشیم:

$\frac{c}{a}=\frac{m-2}{1}=m-2<0\Rightarrow m<2$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

۲. حدود m برای آن‌که معادله‌ی $3x^2-2x+m-2=0$ دارای دو ریشه‌ی مثبت باشد، کدام است؟

۱) $2<m<\frac{8}{3}$ ۲) $2<m<\frac{7}{3}$

۳) $m<\frac{7}{3}$ ۴) $m>2$

حل:

باید دستگاه نامعادله‌ی زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ \frac{c}{a}>0\\ -\frac{b}{a}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-3(m-2)>0\\ \frac{m-2}{3}>0\\ \frac{2}{3}>0 \quad \text{همواره برقرار است}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7-3m>0\\ m-2>0\\ \frac{2}{3}>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m<\frac{7}{3}\\ m>2\end{cases}\Rightarrow 2<m<\frac{7}{3}$$

پس گزینه‌ی ۲ درست است.

۳. مقدار m برای آن‌که معادله‌ی $x^2 + mx - 4 = 0$ دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد، کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ۴

حل:

شرط آن‌که معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد، آن است که:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

در این مسأله باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \Delta = m^2 + 16 > 0 \\ \dfrac{c}{a} = -4 < 0 \\ b = m = 0 \end{cases}$$

دو نامساوی $m^2 + 16 > 0$ و $-4 < 0$ همواره برقرارند، پس باید $m = 0$ باشد. یعنی گزینه‌ی (۳) درست است.

مسأله‌ها

۱. بدون حل کردن معادله‌های درجه‌ی دوم زیر، وجود و علامت ریشه‌های آن را مشخص کنید.

الف) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

ب) $3x^2 + 5x - 3 = 0$

پ) $x^2 - 17x + 4 = 0$

ت) $\frac{1}{2}x^2 + 9x + 2 = 0$

ث) $3x^2 - 7x + 6 = 0$

ج) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

چ) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

ح) $2x^2 - 18 = 0$

خ) $3x^2 + 4 = 0$

د) $5x^2 = 0$

۲. در وجود ریشه‌های معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید.

الف) $mx^2 + (m-3)x + m - 4 = 0$

ب) $x^2 - 2mx + 1 = 0$

پ) $(m+1)x^2 - (2m-3)x + m + 1 = 0$

ت) $x^2 + (m-3)x + 4 = 0$

ث) $mx^2 + (m-1)x - 2m = 0$

ج) $x^2 - 2mx + 2m^2 + 1 = 0$

چ) $(m-1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$

۳. حدود m را چنان بیابید که معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، دارای ریشه‌ی حقیقی باشند.

الف) $(3m+1)x^2 - (4m-1)x + 12m = 0$

ب) $mx^2 + (m-1)x + 2m = 0$

پ) $(m+1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$

ت) $2mx^2 + 2(m-1)x + m - 1 = 0$

۴. ثابت کنید که معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m دارای ریشه‌ی حقیقی هستند.

الف) $mx^2 + (m-1)x - 1 = 0$

ب) $x^2 + (3m-2)x - m - 3 = 0$

پ) $x^2 + 2mx - m^2 - 1 = 0$

ت) $mx^2 + 2(m-1)x - m = 0$

۵. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید.

الف) $x^2 - 4x + m = 0$

ب) $x^2 + 2mx + 9 = 0$

پ) $x^2 - 2mx + 3m = 0$

ت) $x^2 - 2(m+1)x + 3(m+1) = 0$

ث) $mx^2 - 3x + m = 0$

ج) $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$

چ) $x^2 - 2mx + (m-3)^2 = 0$

ح) $mx^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$