تاریخ یا میراث؟

تمایزی مهم در ریاضیات و برای آموزش ریاضی•

ایوار گراتن-گینس*

به یادِ جان فاول[1] دوست داشتنی (۱۹۴۷-۲۰۰۱)

۱. جلب توجه و بروز اختلاف

تحقیق در تاریخ ریاضیات و از جمله ارتباط آن با آموزش ریاضی، در چند دههٔ گذشته رشد چشمگیری داشته است. اما گهگاه اختلاف‌نظرهای قابل توجهی نه تنها در مورد اهمیت بلکه حتی دربارهٔ مشروعیت آن پیش می‌آید ــ یعنی در این‌باره که اصلاً یک تعبیر تاریخی از مقولهٔ تاریخ به حساب می‌آید یا نه. در این مقاله به بررسی موضوع دوم می‌پردازم و برخی از پیامدهای آن برای آموزش را نیز یادآور می‌شوم.

اختلاف‌نظرها عمومیت دارند به این معنی که ممکن است در مورد هر شاخهٔ ریاضیات در هر دوره یا فرهنگی پیش بیایند؛ بنابراین نیاز به یک راه حل کلی دارند. من راه حلی پیشنهاد می‌کنم که مبتنی بر تمایزگذاری بین راههای تعبیر ریاضیاتِ گذشته است. شئ یا مفهوم ریاضی مورد بحث را N بنامید. N می‌تواند هر چیزی از یک نماد گرفته تا یک تعریف، اثبات، روش اثبات یا الگوریتمی برای یک قضیه، نظریه‌ای گسترده یا یک شاخهٔ کامل ریاضی، و راههای آموزش آن باشد. منظور از «تاریخ» آن، که در این مقاله به‌صورت واژه‌ای فنی به‌کار می‌رود، سیر تحول N در دوره‌ای خاص است: پیدایش و شکلهای ابتدایی آن، تأثیر و کاربردهایش در درون و/یا بیرون ریاضیات، و نظایر اینها. تاریخ به این پرسش می‌پردازد که «چه اتفاقی در گذشته افتاده است؟» و شرح و توصیفهایی در پاسخ می‌آورد. شاید توضیحاتی هم در پاسخ این پرسش که «چرا آن اتفاق افتاده است؟» بیاورد.

دو پرسش دیگر نیز، که ملازم هم‌اند، برای تاریخ مهم است، یکی اینکه «چه اتفاقی در گذشته نیفتاده است؟» و دیگر اینکه «چرا نیفتاده است؟»

دلایل آن ممکن است به طرف دیگر این تمایز، که من آن را «میراث» می‌نامم، مربوط باشد. در بررسی میراث توجه ما بیشتر معطوف به تأثیر N بر کارهای بعدی، در طول دوره‌ای ذی‌ربط از جمله دورهٔ پیدایش آن است. بعضی از صورتهای امروزینِ N هم ممکن است در نظر گرفته شوند، زیرا میراث تا حد زیادی با این پرسش سروکار دارد که «چگونه به اینجا رسیده‌ایم؟» یعنی به وضعیت فعلیِ موضوع مورد نظر.

کسانی که به بررسیِ بخشی از ریاضیات گذشته می‌پردازند، تمایز بین تاریخ و میراث را اغلب درک می‌کنند و به این عقیده می‌رسند که راههای اساساً متفاوتی برای این بررسی وجود دارد. از اینجاست که اختلافها رخ می‌نماید، برداشتی که یک نفر دارد از نظر دیگری اشتباه تاریخی است و برداشت دومی از نظر اولی بی‌ربط است. اختلاف‌نظرها اغلب نشان‌دهندهٔ تفاوت بین رویکرد مورخان و ریاضیدانان است.

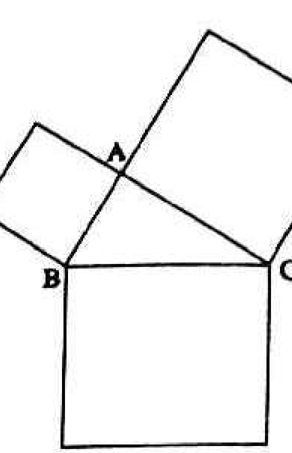
ادعای این مقاله این است که هم مطالعهٔ* تاریخی و هم مطالعهٔ* میراث‌نگرانه، راههایی مشروع برای بررسی ریاضیات گذشته‌اند ولی اشتباه گرفتن آنها با یکدیگر، یا ادعای اینکه یکی تابع دیگری است، کار درستی نیست. این موضع پیامدهای بسیاری دارد که در بخشهای ۳ و ۴ به آنها خواهیم پرداخت ولی نخستْ مثال ساده و معروفی از گذشتهٔ دور می‌آوریم.

۲. قضیهٔ فیثاغورس به سبک اقلیدس

یکی از معروف‌ترین قضیه‌ها در اصول اقلیدس (قرن چهارم پیش از میلاد) دربارهٔ ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای چون ABC است (شکل ۱).

---

1. Fauvel



شکل ۱

صورت آشنای این قضیه برای ما این است که ضلعهای AC، AB، و BC در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$AB^2 + AC^2 = BC^2; \qquad (1)$$

ولی اقلیدس در واقع حرف دیگری زده است [۱۱، مقالهٔ ۱، قضیهٔ ۴۷]: «در مثلثهای قائم‌الزاویه، مربع [بنا شده] بر ضلع روبه‌رو به زاویهٔ قائمه برابر است با مربعهای [بنا شده] بر ضلعهای زاویهٔ قائمه». شکلی با این قضیه همراه است که شکل (۱) بخشی از آن است، و چیزی که از آن برمی‌آید تفاوتهای اساسی با (۱) دارد. رابطهٔ (۱) جبری است در حالی‌که شکلْ هندسی است؛ این شکل نشان‌دهندهٔ مربعهایی در خارج از مثلث است ولی رابطهٔ (۱) چنین چیزی را نمی‌رساند. اگر هر یک از مربعها روی مثلث قرار گیرند، باز هم (۱) و قضیه صادق‌اند ولی اثبات پیچیدهٔ آن، که در شکل نشان داده نشده، به همان صورت عملی نیست. خصلت جبری (۱) وقتی بیش از پیش نمایان می‌شود که، چنانکه معمول بوده و هست، حروف «a»، «b»، و «c» را برای نشان دادن ضلعها به‌کار بریم، زیرا جبرْ شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن، در حد چشمگیری، از حروف و نمادها برای نمایش ثابتها، مجهولها، متغیرها، و عملها استفاده می‌شود.

تفاوت مهم دیگر به کلمهٔ «بر» مربوط می‌شود. اقلیدس هرگز عبارت «مربع ضلع» را به‌کار نبرده زیرا او در مقاله‌های هندسی اصول، نه در صورت قضیه‌ها و (مهم‌تر از آن) نه در اثبات آنها، کمیتهای هندسی را در هم ضرب نکرده است؛ مثلاً در اثبات قضیهٔ فیثاغورس، چه در اثبات پیچیده‌ای که به آن اشاره شد و مبتنی بر قابلیت انطباق [همنهشتی] است و چه در اثبات ظریف‌تری برای قضیهٔ کلی‌تر دربارهٔ مستطیلهایی با نسبت اضلاع برابر که بر ضلعهای مثلث بنا می‌شوند، متوسل به مربع‌سازی ضلع نشده است؛ وی در مورد دوم از مثلثهای متشابه و نظریهٔ تناسب [۱۱، مقالهٔ ۶، قضیهٔ ۳۱] استفاده کرده است. بنابراین، «BC^2» تخطی و انحرافی از هندسهٔ اوست (و کاربردِ متداول حروف کوچک مانند «a^2» از آن هم بیشتر). اقلیدس مربعی بر یک خط مفروض بنا کرده است ــ در واقع در گزاره‌ای که درست پیش از قضیهٔ فیثاغورس آمده است [۱۱، مقالهٔ ۱، قضیهٔ ۴۶].

این موضوع عمیق‌تر از آن است که به ظاهر می‌نماید. چه در این مورد و چه در هر جای دیگر اصول، اقلیدس با پاره‌خط سروکار دارد نه با طول؛ طول در نظر او پاره‌خطی است که اندازه‌ای حسابی برای آن در نظر گرفته شده است. اقلیدس هندسه را بدون حساب، به مفهومی که گفته شد، عرضه کرده است؛ البته عددها هم در بحث او حضور دارند ولی برای مقاصد دیگری، مثلاً برای گفتن اینکه این پاره‌خط دو برابر آن پاره‌خط است، یا نسبت دو پاره‌خط، ۷ : ۵ است. همین‌طور او از نواحی مسطح و نه مساحتها(ی اندازه‌گیری‌شده)، جسم نه حجم، زاویه اما نه برحسب درجه صحبت کرده است. ولی در مقاله‌های راجع به حساب (مقاله‌های ۷ـ۹) ضرب خودِ اعداد صحیح به شیوهٔ معمولی آمده است، و این موضوع گاهی نادیده می‌ماند [۱۵].

این ملاحظات به تاریخ اثر اقلیدس مربوط می‌شود. وقتی به میراث آن می‌پردازیم با وضعیت کاملاً متفاوتی روبه‌رو می‌شویم که در آن (۱) و بسیاری دیگر از این‌گونه روابط شایان توجه‌اند زیرا اصول نقش مهمی در تکوین جبر متعارف داشته است؛ این نقش هم در کارِ برخی از بنیانگذاران مسلمان جبر مشهود است و هم بیشتر از آن، در کارِ جبردانان اروپایی بعد از بیداری اروپا در قرن دوازدهم، که با استفاده از نمادها برای نمایاندن کمیتهای مجهول و عملها، جبر را توسعه دادند. هم (۱) و هم قضیهٔ فیثاغورس به‌صورتی که با شکل نشان داده شده، برداشتهای مشروعی از کار اقلیدس‌اند ولی کاملاً از یکدیگر متمایز هستند.

اصول اقلیدس نمونهٔ تاریخی فوق‌العاده جالبی است زیرا برداشت جبری متعارف، مانند آنچه از (۱) مشهود است، به‌صورت برداشت غالب از کار اقلیدس (از جمله در آموزش ریاضی) درآمد و تا اندازه‌ای شایع شد که در قرن نوزدهم تبدیل به تعبیر تاریخی متعارف گردید چنانکه گویی اقلیدس یک «هندسه‌دان جبری» بوده است که ظاهراً از هندسه حرف می‌زده ولی در واقع جبری عمل می‌کرده است. یکی از حامیان این برداشت، هیث بود که ویراست و ترجمهٔ انگلیسی او از اصول که اول بار در سال ۱۹۰۸ انتشار یافت، هنوز هم پراستفاده‌ترین متن انگلیسی اصول است که، البته امروز معمولاً به ویراست دوم آن [۱۱] مراجعه می‌شود. متخصصان زبان یونانی به من گفته‌اند که ترجمهٔ او هم از لحاظ زبانی و هم از نظر ریاضی بسیار قابل اعتماد است؛ به‌خصوص، در قضیهٔ فیثاغورس و در همهٔ مباحث دیگر، بر خلاف بسیاری از ترجمه‌های قبلی، از «مربع بر ضلع» صحبت می‌کند نه «مربع ضلع» که از آن مفهومی جبری مستفاد می‌شود (کلمهٔ «apo» یونانی هم معادل «بر» یا «روی» و هم معادل کسرهٔ اضافه است) با این حال، هیث صورتهای جبری بسیاری از گزاره‌ها را به ترجمهٔ خود افزوده است، ظاهراً بدون اینکه متوجه تفاوتها باشد.

هر چند بعضی از مورخانِ آن زمان اثر اقلیدس را تعبیر جبری نمی‌کردند ــ نمونهٔ آنها دایکسترهویس هلندی [۲۶، فصل ۵] است ــ دیدگاه استاندارد [مبتنی بر تعبیر جبری] از دههٔ ۱۹۶۰ به بعد بود که با چالش جدی روبه‌رو شد. به‌ویژه در اواسط دههٔ ۱۹۷۰، مورخی به نام ساباتی اُنگورو[1]، برخلاف نظر بعضی از ریاضیدانان علاقه‌مند به تاریخ، به شدت از آن انتقاد کرد. درستی اتهاماتی که اُنگورو در مورد اشتباهات تاریخی و اتکا به نگرش روز به جای نگرش تاریخی به آنها وارد کرد تا حد زیادی معلوم شده است. حریفانِ ریاضیدانِ او، میراث‌نگر بودند [۲۵].

در بخش ۸ مثال دیگری از اقلیدس خواهیم آورد، ولی اول به بررسی بعضی از نتایج کلی این تمایز می‌پردازیم.

1. Sabatei Unguru

۳. بعضی از تفاوتهای اصلی میان تاریخ و میراث

واضح است که تمایز بین تاریخ شئ N و میراث آن به پیشینه و پیامدهای آن مربوط است؛ اما موضوع به اینجا ختم نمی‌شود زیرا تاریخ هم با پیامدهای N سروکار دارد. برای روشن شدن موضوع به اندرزی توجه کنید که در مورد هر نوع تاریخ‌نگاری داده می‌شود و آن اینکه در مورد N (مثلاً قضیهٔ فیثاغورس در اصول) تاریخی‌اندیش باشید یعنی با فراموش کردن آنچه بعد از N روی داده است اصول را با همان دیدگاهی بخوانید که اقلیدس آن را نوشته است. ولی این اندرز، به نوعی، مصادره به مطلوب است زیرا برای فراموش کردن هر چیز E که پس از N رخ داده است باید قبلاً بدانیم که E چیست؛ ولی به این منظور باید بتوانیم E را از تاریخ N و پیشینهٔ آن جدا کنیم، یعنی تاریخ N را تشخیص دهیم.

بنابراین، تمایز بین تاریخ و میراث تا حدی به راههای بکار بردن مفاهیمِ پس از N بستگی دارد. نظری که ما بر آن اصرار داریم این است: وقتی معلوم شد که آن مفاهیم، مفاهیم بعدی هستند، از تمام آنها استفاده کنید؛ آنها را برای شناخت میراث ناشی از N بکار بگیرید ولی از آنها در ارزیابی تاریخ N (اینکه فلان و بهمان واقعه روی نداده) استفاده نکنید. به‌علاوه، وقتی دوره‌های بین N و دوره‌های بعدی، مثلاً حالا، را در نظر می‌گیرید، این تمایز را به دقت بکار ببرید به‌عنوان نمونه، رابطهٔ (۱) در مثال ما فقط جزئی از تاریخ دستاورد رنه‌دکارت و میراث دستاورد اقلیدس نیست بلکه میراثِ کارهای فرانسوا ویت جبردان قرن شانزدهم نیز هست که کارهای او هم جزو تاریخ دستاورد دکارت است. همچنین باید توجه کرد که تاریخ معمولاً تاریخ میراثها هم هست؛ حکایت کار ریاضیدانهاست که مفاهیمی را از گذشته (اغلب، گذشتهٔ نزدیک) می‌گیرند و آن را جرح و تعدیل می‌کنند بدون آنکه سؤالی دربارهٔ تاریخ آن مفاهیم داشته باشند.

در این زمینه، موضوعهای متعدد دیگری هم شایان بررسی است، بحث مفصل‌تری که تا حد زیادی معطوف به تاریخ است در مقالهٔ مشابه دیگری [۱۶] آمده است. در جدول صفحهٔ بعد، جنبه‌های اصلی بررسی مفاهیم گذشتهٔ N به دو شیوهٔ متفاوت پیشگفته خلاصه‌وار ذکر شده است. تناقض ظاهری بین ردیفهای سوم و چهارم نیاز به توضیح دارد. وقتی مورخ مطالب آشفتهٔ گذشته را بازسازی می‌کند، مفاهیمی را که امروز می‌دانیم با هم متفاوت‌اند، و میراث‌نگر روی این جنبه تأکید دارد، درهم می‌آمیزد. اما تفاوتی که این بازسازی برملا می‌کند، تفاوت بین جهل گذشته نسبت به این تمایز و علم کنونی ما (و میراث‌نگر) به آن است.

۴. تغییر عادتها

مسألهٔ دیگری که نمی‌توان جوانب و موارد آن را با جدولبندی بیان کرد، مربوط به استفاده از مفاهیمی است که به‌صورت استاندارد درآمده‌اند و امروز طبق عادت بکار می‌روند. چنین عاداتی ممکن است در تعیین میراث ناشی از N خیلی مفید باشند ولی ممکن است منشأ اشتباهاتی تاریخی هم باشند که باید مراقب آنها بود. در اینجا سه مثال مهم را ذکر می‌کنم.

مثال اول: نظریهٔ مجموعه‌های گئورگ کانتور پس از پشت سر گذاشتن تاریخ جالبی که از دههٔ ۱۸۷۰ آغاز می‌شود [۹]، بیش از یک‌صد سال است که جزو ابزارهای ریاضی ماست؛ بنابراین استفاده از آن برای ریاضیات این دوره کار درستی است. هر چند مفهوم گردایه‌های اشیا، دستکم از زمان یونان باستان، در ریاضیات مورد توجه قرار داشته ولی نظریهٔ اولیه در باب آنها نظریهٔ جزء و کل بوده است که در آن (مثلاً) زنان انگلیسی بخشی از قشر زنان را تشکیل می‌دهند، عضویت از مشمولیت متمایز نمی‌شود، و یک شئ با مجموعه‌ای که فقط شامل آن شئ است فرقی ندارد. نظریهٔ جزء و کل و نظریهٔ مجموعه‌ها، چه از لحاظ فنی و چه از لحاظ فلسفی تفاوتهای بسیار دارند که مورخ باید آنها را به دقت مشخص کند. ولی میراث‌بر می‌تواند از نظریهٔ مجموعه‌ها استفاده کند بدون آنکه احتمال فریبکاری در کار باشد.

مثال دوم: هر چند تأثیر اقلیدس بر ریاضیات غربی زیاد بوده است، پافشاری او در بنا کردن نظریه بر اصول موضوع و متعارفی به‌ندرت مورد تقلید اروپاییان قرار می‌گرفت (از نمونه‌های نادر، پرینکیپیای نیوتن است که تا اندازه‌ای این روش را مراعات کرده است). در اواخر قرن نوزدهم بود که اصل موضوعی‌سازی نظریه‌های ریاضی، به‌خصوص در ارتباط با هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی و ظهور جبرهای مجرد، رواج یافت [۸]. هر دو پیشرفت توجه داوید هیلبرت را به خود جلب کرد و او را به استفادهٔ گسترده از روش اصل موضوعی در خلال نیمهٔ اول قرن بیستم برانگیخت؛ این رهیافت امروز کاملاً استاندارد شده است. در این مورد می‌توان مسیر روشن میراث‌بری را تا زمان حاضر ترسیم کرد، اما مورخ هنگام بررسی ساختار نظریه‌های قدیمی باید احتیاط به خرج دهد زیرا کاملاً ممکن است که اصل موضوعی‌سازی در آن نظریه‌ها از حد مشخص کردنِ بعضی از قواعد یا اصول پایه فراتر نرفته باشد. نظریهٔ مجموعه‌های کانتور نمونهٔ خوبی است؛ هر چند این نظریه نیز در اواخر قرن نوزدهم عرضه شد ولی کانتور علاقهٔ چندانی به اصل موضوعی‌سازی نظریه‌اش نشان نداد.

مثال سوم: نظریهٔ بردار و ماتریس به‌صورت موضوعی استاندارد در ریاضیات درآمده است هر چند این موقعیت (به‌خصوص در مورد دومی) پس از دههٔ ۱۹۳۰ به دنبال پیشرفتهای پراکندهٔ تاریخی که در زمینه‌های مختلف طی قرن نوزدهم به‌دست آمده بود حاصل شده است. در این مورد هم باید در بکار بردن این نظریه‌ها در مورد دستاوردهای قبلی دقت کرد. مثلاً می‌توان بسیاری از فنون و روشهایی را که ریاضیدانانی چون اویلر، لاگرانژ، و لاپلاس ابداع کردند به شکل برداری و ماتریسی نوشت ولی این کار به شناخت ما از تاریخ کمکی نمی‌کند چون هیچ‌یک از این چهره‌ها نمی‌دانستند که نظریه‌های آنها قابل ارائه به شکل رشته‌ها یا آرایه‌هایی از عناصر اسکالر است بلکه آنها با گردایه‌هایی از دستگاههای معادلات خطی یا دیفرانسیل یا فرمهای مربعی و دو خطی سروکار داشتند [۱۴، فصلهای ۵ـ۶]. وارد کردن بردارها یا ماتریسها به صحنه، صرفاً از مقولهٔ تغییر نمادگذاری نیست، بلکه نظریه‌های جدیدی وارد کار می‌شوند. از طرفی، البته، داشتن چنین امکاناتی خوب است؛ ولی اگر مورخ از این نظریه‌ها استفاده می‌کند باید تذکری در مورد ترتیب صحیح وقایع از لحاظ تاریخی بدهد.

برخلاف تاریخدانان که باید همهٔ این احتیاطها را به عمل آورند، میراث‌بران کاملاً حق دارند همهٔ این‌گونه تغییرات را در صورتبندی نظریه انجام دهند، و ممکن است ریاضیات میراث‌گونهٔ زیبایی از این رهگذر پدید آید. به‌علاوه، ممکن است تاریخی از ریاضیات تولیدشده پس از دورهٔ اولیهٔ مورد مطالعه خلق شود زیرا چنانکه در بخش ۱ گفتیم، ریاضیدانها آثار گذشته را معمولاً با دید میراث‌نگرانه می‌خوانند.

به‌عنوان مثال، کارهای لاگرانژ و دیگران را در مکانیک در نظر بگیرید. مسألهٔ مهمی که او در دههٔ ۱۷۷۰ صورتبندی کرد، اثبات ریاضی پایداری

جنبهٔ مورد بررسی	تاریخ	میراث
خاستگاه و زمینه(های) N	موضوعی مهم که شاید تعیین آن دشوار باشد (مثلاً در مورد اصول اقلیدس)	احتمالاً دارای اهمیت جزئی
انواع تأثیر	ممکن است منفی یا مثبت باشد؛ هر دو باید مدنظر قرار گیرند	احتمالاً فقط تأثیرات مثبت مورد نظر قرار می‌گیرد
روابط N با مفهومهای قبلی و بعدی	موضوعی مهم، بر تفاوتها به اندازهٔ تشابهات، و شاید بیشتر، تأکید می‌شود	موضوعی مهم، به تشابهات بیشتر از تفاوتها توجه می‌شود
برخورد با ابهامات مشهود در N	بازسازی آنها با حداکثر وضوح ممکن	تشخیص دادن و سپس از میان برداشتن آنها
تحولات موفقیت‌آمیز	بسیار مهم، ولی بررسی شکستها، تأخیرها، فرصتهای از دست‌رفته، و دستیابیهای دیر هنگام هم مهم است	احتمالاً مهم‌ترین نکته است
نقش ترتیب تاریخی	معمولاً مهم، ممکن است اثبات آن دشوار باشد	صرف‌نظر از کلیات، احتمالاً چندان مهم نیست
پیامدهای تاریخی	ممکن است آینده‌نگریهای (امیدها، انتظارات) شخصیتهای تاریخی در مورد N بازسازی شود	ممکن است گذشته‌نگریها و چشم‌انداز تاریخی تحولات پس از N بازسازی شود
جبر تاریخ	ترجیحاً ادعا نمی‌شود؛ تحولات واقعی چنین و چنان بوده است ولی نه الزاماً چنین و چنان	ممکن است حکمی با رنگ و بوی جبرگرایانه داده شود. ما باید به اینجا می‌رسیدیم (ستون تاریخ را نگاه کنید!)
مبانی یک نظریه	کندوکاو برای رسیدن به آنها، و بناسازی روی زمین باتلاقی	عرضهٔ مبانی به‌طور دقیق، و بناسازی روی زمین سفت
میزان اهمیت یا وجاهت N	ممکن است مستقل از مضمون آن در طول زمان تغییر کند؛ باید مدنظر قرار گیرد (و شاید توضیح داده شود)	معمولاً مورد نظر نیست؛ به وضعیت فعلی آن توجه می‌شود

منظومهٔ سیارات بود (دانشمندان قبلی مانند نیوتن و اویلر با اعتقاد به اینکه خداوند منظومه را از خطر حفظ می‌کند از کنار این مسأله می‌گذشتند؛ آنها در این مورد متأثر از مذهب بودند). هدف نظریهٔ درخشان لاگرانژ اگر به زبان نظریهٔ ماتریسها و با اصطلاحات امروزی بیان شود، یافتن اثباتی برای حقیقی بودن همهٔ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس خاصی بود. اما او نظریهٔ ماتریسها را در اختیار نداشت و سروکارش با فرمهای درجهٔ دوم متناظر بود. همین موضوع دربارهٔ لاپلاس، که نتایج او را تا حدی تعدیل کرد، صدق می‌کند. هیچ‌یک از آن دو نفر اثبات دقیقی نیافت. کار مهم بعدی در سال ۱۸۲۹ و (عجیب اینکه) به‌دست کوشی انجام شد. وی در تحقیقات خود دربارهٔ این مسأله، «جدول» درایه‌های اسکالر را تدوین و تنظیم کرد[۱۷]. بنابراین، نظریهٔ ماتریسها شاید ــ در واقع، باید ــ برای توصیف کار کوشی به‌کار رود، و از این طریق می‌توانیم بخش مهمی از میراثی را که از پیشینیانش به او رسید بشناسیم، و این مثال خوبی است از پرسش «چه اتفاقی نیفتاد؟» زیرا کوشی هرگز اهمیت دستاورد خود را درک نکرد و بعداً به‌ندرت آن را به‌کار برد و به این علت، متأسفانه، نتوانست بنیانگذار نظریهٔ طیفی ماتریسها باشد.

۵. زمینهٔ فلسفی

واضح است که این صحبتها دربارهٔ مفاهیم جدید و قدیم، پیدایش و تکامل نظریه‌ها، و نظایر اینها، منحصر به‌ریاضیات نیست بلکه دربارهٔ تاریخ هر یک از علوم دیگر (به انضمامِ فناوری، مهندسی، و پزشکی) و در واقع هر رشتهٔ دیگر نیز مطرح است (یک مثال خوب، روشهایی است که در اجرای مطابق اصلِ موسیقی قدیم باید به‌کار برد یا از آنها اجتناب کرد). اصول کلی عمده‌ای که زیربنای بحث بالا هستند، از این قرارند.

اول اینکه، تأثیر تاریخ، چه آن را دوست داشته باشید و چه نداشته باشید، اجتناب‌ناپذیر است. ریاضیدانی که نظریه‌اش را بی‌توجه به تاریخ می‌پروراند نمی‌تواند با این کار از تاریخ برکنار باشد. مثلاً کسی که شیفتهٔ روش اصل موضوعی (بخش۳) است ممکن است نظریه‌اش را به شکل بسیار صوری بدون اشاره به پیشینیان خود یا پیشینهٔ موضوع تدوین کند، اما آن پیشینه و پیشینیان در واقع وجود دارند. مثلاً نظریه‌های صوری قبلی که به‌دست اصل موضوع‌گرایان قبلی بدون اشاره به پیشینیان خودشان یا سوابق موضوع عرضه شده است. پس این سؤال که آیا تاریخ را می‌توان در ریاضیات به‌کار برد یا نه،

پرسش مناسبی نیست. مسأله این است که آیا این کار آگاهانه صورت می‌گیرد یا خیر. در واقع، مستقل از مضمون این مقاله، داشتن یک تصور تاریخی کلی از موضوع مورد نظر، هر چه باشد، مفید است.

دوم اینکه، دانش و نادانی ملازم هم‌اند. این همزیستی در حدی که سزاوار آن است مورد توجه عمومی فلسفی قرار نگرفته است. به‌خصوص، و مهم‌تر آنکه، در ریاضیات دانش دربارهٔ نادانی وجود دارد و این امر به‌ویژه وقتی مسأله‌ای صورتبندی می‌شود مشهود است. مثلاً هنگامی که دیریکله مسألهٔ همگرایی سریهای فوریه را در اواخر دههٔ ۱۸۲۰ بررسی می‌کرد، می‌دانست از شرایطی که کافی است یک تابع داشته باشد تا همگرایی به آن برقرار باشد، بی‌اطلاع است؛ مسألهٔ او دقیقاً یافتن این شرایط بود. وقتی موفق به این کار شد، می‌دانست که نمی‌داند آیا می‌توان آنها را ضعیف‌تر کرد یا نه، و به این ترتیب، مسألهٔ بعدی در این زنجیره مطرح شد (که ضمناً اولین پاسخ آن، شرط لیپ‌شیتس بود). همچنین جهل مرکب هم ممکن است، یعنی اینکه مردم ندانند که چیزی را نمی‌دانند به علت اینکه روابط بین مفاهیم مربوط هنوز معلوم نشده است. مثلاً دیریکله نمی‌دانست که نمی‌داند اثبات او چگونه بر مشخص‌سازی فضاهای توابع اثر می‌گذارد زیرا این مفهوم تا اواخر قرن نوزدهم مطرح نشده بود [۲۱].

سوم اینکه، بر اساس طرز فکر پیشگفته، همهٔ انواع معرفت را به نظریه، فرانظریه، فرافرانظریه،...، تقسیم و طبقه‌بندی می‌کنند. فرانظریه در مورد ریاضیات نه تنها فراریاضیاتی از نوع فنی آن است که هیلبرت بنیانگذارش بود بلکه شامل انواعی غیررسمی هم می‌شود. به‌خصوص، تاریخ شئ N یک نوع آن است، میراث آن نوعی دیگر، شیوه‌های ممکن برای تدریس آن نوع سوم، راهبردهای اکتشافی برای توضیح مفهوم آن نوع چهارم، و همین‌طور ممکن است انواع دیگری هم وجود داشته باشند. رابطهٔ بین دانش و نادانی که در بالا بیان شد در فرانظریهٔ مفاهیم مربوط قرار دارد. همین‌طور، فرانظریه نیازمند فرافرانظریه‌ای است که جایگاه بحث دربارهٔ آن باشد، و به همین ترتیب، تا آنجا که نیاز باشد، می‌توان بالا رفت. مثالی از فرافرانظریه، تاریخِ تاریخ ریاضیات است، و این موضوع جالبی است که اخیراً به تفصیل در [۱۰] شرح داده شده است؛ اظهارنظرهای راجع به هیئت در بخش ۲ نمونه‌ای از آن است، و خود این مقالهٔ نمونه‌ای خودارجاع، که باید چشم به راه میراث آن (اگر میراثی داشته باشد) بود!

چه مورخان و چه میراث‌نگرها اگر تاریخ و میراث را متعلق به فرانظریه بدانند، لازم نیست آنچه را در مطالعهٔ گذشته می‌یابند دوست بدارند. چرا باید دوست بدارند؟ هر چه باشد، آنها (قاعدتاً) در آنجا نبوده‌اند. موضوع به اندازهٔ کافی واضح به نظر می‌رسد. به هر حال می‌توان مثلاً در مورد تاریخ نظامی، مورخ یا میراث‌نگر خوبی بود بدون آنکه هوادار نظامی‌گری بود. با این حال، کم نیستند مورخان و میراث‌نگرهایی که به موضوعها و چهره‌های مورد مطالعهٔ خود در هر نوع تاریخی دلبستگی زیادی پیدا می‌کنند، و گمان می‌کنند باید از آنچه یافته‌اند دفاع کنند. البته چنین تعلق‌خاطری اگر به‌طور طبیعی پیش آید قابل فهم است و نباید مایهٔ عذاب وجدان باشد.

ایدهٔ کلی طبقه‌بندی معرفت از منطق نمادین، و عمدتاً از کارهای کورت گودل و آلفرد تارسکی، در اوایل دههٔ ۱۹۳۰ نشأت گرفته است. در منطق تمایز بین خود منطق (در سطح شئ) و فرامنطق بسیار ظریف و بغرنج و در نتیجه بسیار مهم است؛ از دوران یونان باستان معلوم شده بود که ناتوانی در قائل شدن نوعی تمایز موجب تعارضاتی ناخوشایند می‌شود. طبقه‌بندی به‌تدریج از منطق به رشته‌های دیگر به‌خصوص به ریاضیات و انواعی از فلسفه، سرایت کرد. یکی از طرفداران این ایده کارل پوپر بود که در اواسط دههٔ ۱۹۳۰ از کارهای تارسکی الهام گرفت. قسمتهای متعددی از فلسفهٔ ابطال‌پذیری او جنبهٔ فرافلسفی دارد، مثلاً اینکه حتمیت‌ناگرایی را بر حتمیت‌گرایی ترجیح می‌دهد [۱۹]. یکی از مقالات او که ارتباط خاصی با این مقاله دارد، «دربارهٔ منابع دانش و نادانی» [۱۸، مقدمه] است زیرا حاوی نکته‌ای است که در اغلب انواع دیگر فلسفه دیده نمی‌شود و آن اینکه، نادانی خوب است زیرا جایگاه مسائل ما (در فرانظریه) است اگر به‌صورت دانش دربارهٔ نادانی تدوین شود. در بیشتر انواع دیگر فلسفه، نادانی یک نوع بیماری است که باید با کسب دانش درمان شود، هر چند ادعا می‌شود که این کسب دانش انجام خواهد شد (برای ملاحظهٔ صورتهای گوناگون این دیدگاه که در سنت شکگرایی فلسفه به آن قائل‌اند، مراجعه کنید به [۲۵، فصلهای ۱-۶]). تاکنون، استفادهٔ صریح از طبقه‌بندی در میان غالب فلسفه‌های رایج تاریخ (که در [۲۳] به تفصیل بررسی شده‌اند) شناخته و معمول نشده است ولی به نظر می‌رسد شایستهٔ توجه و بررسی بیشتری است.

۶. نکاتی کلی دربارهٔ استفاده از تاریخ در آموزش ریاضی

در چند دههٔ اخیر، استفاده از تاریخ در آموزش ریاضی افزایشی قابل ملاحظه و جهانی یافته است و هدف از آن، تعدیل و به چالش کشیدن تصویر رایج از ریاضیات است، تصویری که ریاضیات را منطقه‌ای خالی از انسان، مملو از پاسخ و عاری از پرسش، سرشار از جواب و عاری از مسأله نشان می‌دهد. مجموعه‌های مقالات و کتابهای بسیار و شماره‌های متعدد مخصوصی از مجلات انتشار یافته‌اند که حاوی مطالبی متنوع در این زمینه‌اند: کتابهایی درسی که اطلاعات تاریخی زیادی در آنها آمده است، تاریخهای خلاصه‌وار دستاوردهای خاص، بررسی زندگی و آثار چهره‌های تاریخی، مقایسهٔ سیر پیشرفت نظریه‌ها(ی کمابیش مشابه) در فرهنگها و ملل گوناگون، ترجمه‌هایی از متون اصلی قدیمی با توضیحات، و راهبردهای پیشنهادی برای استفاده از تاریخ در آموزش، هم در زمینه‌های خاص و هم به‌طور کلی. توجه این نوشته‌ها اغلب معطوف به انگیزه و زمینهٔ تکوین مفاهیم و نشان دادن این موضوع است که ریاضیات برخلاف ظاهر آن فعالیتی انسانی است و به‌علاوه، بخش اعظم آن منشأ غربی ندارد. طیف این مسائل به‌خوبی در جلد اخیر [۱۲] منعکس شده است.

ظاهراً بیشتر توجهات معطوف به تدریس در سطح مدرسه و کالج است، ولی آموزش در سطح دانشگاهی نیز بی‌نصیب نمانده است. در زمینهٔ ریاضیات محض کار بسیار بیشتری انجام شده است تا در زمینهٔ ریاضیات کاربردی یا قابل کاربرد، و یا احتمال و آمار؛ بسیار مناسب است که تعادلی برقرار شود. من در اینجا قصد مرور این نوشتگان را ندارم ولی به جایگاه و فایدهٔ تمایز بین تاریخ و میراث در آموزش ریاضی به‌طور کلی اشاره می‌کنم.

همان‌طور که در مورد پژوهشگران تاریخ در بخش ۱ اشاره کردیم، در متون آموزشی هم آشکارا ادراکی اجمالی از وجود تمایز [بین تاریخ و میراث] یا دست‌کم احساسی شهودی وجود دارد که ریاضیات گذشته را می‌توان به روشهای متفاوتی به‌کار برد. آموزش ریاضی بین تاریخ و میراث در کجا قرار

دارد؟ پاسخ این است: در همان جایی که باید باشد یعنی می‌تواند از هر دو طرف بهره بگیرد. اگر قرار است مفهوم N آموزش داده شود، هم تاریخ و هم میراث آن را می‌توان به‌کار برد. اصول اقلیدس نمونهٔ خوبی است که در شرح آن شیوه و بیان جبری که «میراث» اثر اقلیدس است به‌کرات به‌کار رفته و می‌رود. در عین حال «تاریخ» این اثر نیز، با هندسه‌ای که بدون حساب عرضه می‌شود، با در نظر گرفتن خط به جای طول، و با نظریهٔ زیبای نسبتها که هم در هندسه و هم در حساب او به‌کار می‌رود، شایستهٔ توجه و مطالعه است.

۷. هجو تاریخ، و حسابان

من مدتها قبل در مقاله‌ای[۱۳] اصطلاح «هجو تاریخ»[1] را برای مشخص کردن روشی که طبق آن می‌توان تاریخ و نیز میراث را در آموزش ریاضی به‌کار برد، وضع کردم. با این روش، ویژگیهای کلی سیر وقایع تاریخی مدنظر قرار می‌گیرد و به‌کار می‌رود، ولی معمولاً مسیرهای انحرافی و پیچیدگیهایی در سیر تاریخی دیده می‌شود که هر چند برای تاریخ‌نگار جالب است، در تدریس مشکل ایجاد می‌کند و از این‌رو باید کنار گذاشته شود یا حداکثر به‌طور گذرا از آنها یاد شود. «روش تکوینی» اُتو توپلیتس، که وی آن را در اواخر دههٔ ۱۹۲۰ در ارتباط با تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال معرفی کرد، به‌منظور مشابهی ارائه شده است[۲۴]. اخیراً جامعهٔ ریاضی آمریکا (MAA) کتاب درسی بدیع و مهمی به قلم دیوید برسود دربارهٔ آنالیز ریاضی متغیر حقیقی انتشار داده است که در آن جایگاه برجسته‌ای به دستاوردهای مهم به‌خصوص در قرن نوزدهم، مانند سریهای فوریه، تخصیص یافته است[۵].

چنانکه برسود بحق می‌گوید، یک نوآوری مهم آن قرنْ بنیانگذاری آنالیز در دههٔ ۱۸۲۰ به‌دست کوشی بود. رهیافت او مبتنی بر نظریهٔ پیچیدهٔ جدیدی دربارهٔ حد بود که در آن مفهوم حد به‌عنوان اینکه یک مفهوم شهودی است به حال خود رها نمی‌شد. این نظریه از لحاظ سازماندهی موضوع و صورت و اثبات قضایا بی‌شک بسیار برتر از نظریه‌های پیشین بود؛ اما فقدان روشهای اکتشافی در آن مشهود بود و هم همکاران و هم دانشجویان او به شدت از آن خرده می‌گرفتند [۱۴، فصلهای ۱۰ـ۱۱، و ۸.۲۰].

در اینجا مثال صریحی از هجو تاریخ می‌آورم که آن را در تدریس خودم مفید دیدم. کوشی قیاس جالب‌توجهی به‌کار برد و آنالیز حقیقی خود را با متغیرهای مختلط و توابع آنها وفق داد و از این طریق مبحث جدید مهمی را وارد ریاضیات کرد ولی این نظریه در اولین برخورد عجیب به نظر می‌رسد زیرا در آن از عباراتی متناظر با عبارتهای موجود در آنالیز حقیقی استفاده می‌شود ولی اثری از خمها، مماسهای وارد بر آنها و مساحت سطوح زیر آنها دیده نمی‌شود. در میان قضایای بسیاری که کوشی ثابت کرد، امروز یک قضیهٔ مهم نام او را بر خود دارد یعنی این قضیه که انتگرال یک تابع تک‌مقداری و مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته روی، و در درون، هر مسیر بستهٔ C صفر است. این قضیه در نظر دانشجویان، و از جمله در نظر خود من در سالها پیش، قضیهٔ عریبی به نظر می‌رسید و اثبات سریع و بی‌شک درستِ آن با استفاده از معادلات کوشی‌ـریمان و قضیهٔ گرین، از غرابت آن نمی‌کاست.

کوشی از دههٔ ۱۸۱۰ تا دههٔ ۱۸۴۰ گهگاه به پروراندن نظریه‌اش می‌پرداخت[۲۲]، و این صورت از قضیه‌اش آخرین صورت آن است که صفحهٔ مختلط را جایگاه خم C در نظر می‌گیرد. من دریافته‌ام که یکی از مراحل قبلی نظریهٔ او به فهم این قضیه کمک می‌کند. وی در بررسی انتگرال $f(x)$ با متغیر حقیقی x روی دامنهٔ $x_0 \le x \le X$ (در اینجا نمادهای خود او را به‌کار می‌بریم)، مجموع مساحات S را به‌ازای افرازی از مقادیر x روی دامنه تشکیل داد، زیرافرازهای متوالی را در نظر گرفت و مجموعهای متناظر را تشکیل داد، و انتگرال را به‌صورت مقدار حدی این دنباله، در صورت وجود این حد، تعریف کرد. این شیوه برای تعریف این انتگرال مدتهاست به‌صورت شیوهٔ متعارف در آمده است و روایت او از موضوع هنوز هم ارزش خواندن و آموختن دارد[۶، درس۲۱].

کوشی مدت کوتاهی بعد قیاس خود را به‌کار گرفت. وی انتگرال یک تابع پیوسته و متناهیْ‌مقدار از متغیر مختلط، چون «$f(x + y\sqrt{-1})$»، را به این طریق تعریف کرد که عبارت متناظر با S را برای $f(x)$ تشکیل داد در حالی‌که $x + y\sqrt{-1}$، دنباله‌ای از مقادیر بین حدهای «$A = x_0 + y_0\sqrt{-1}$» و «$B = X + Y\sqrt{-1}$» را اختیار می‌کرد که به‌ازای آنها هر دوی x و y توابعی پیوسته از یک متغیر پارامتری t بودند. سپس با استفاده از انتگرال‌گیری جزءجزء و حساب وردشها ثابت کرد که مقدار این انتگرال بین A و B «مستقل از ماهیت توابع» مربوط است [۷، بخش۳]. آنگاه قضیهٔ مسیر بسته با انتگرال‌گیری روی دنباله‌ای از مقادیر بین A و B و سپس در جهت عکس روی دنبالهٔ دیگری که شرایط لازم تحت آن به‌دست آید نتیجه می‌شود؛ این دو انتگرال به‌ازای آن دو دنباله با هم حذف می‌شوند، بنابراین مقدار انتگرال روی C صفر است.

اثبات این قضیه به این شیوه مسلماً چیزی نبود که در چند سطر بگنجد، اما شناخت بسیار بیشتری حاصل شد، به‌خصوص که تعریف انتگرال با متغیر حقیقی قبلاً در جای دیگر آموخته شده بود. شرح من از ماجرا، کار کوشی را از لحاظ تاریخی تا جایی تعقیب می‌کند که او عمداً از رسم شکل برای هر دو نوع انتگرال اجتناب می‌کند. کوشی در آن مرحله از زندگی علمی‌اش مفاهیم هندسی را نادقیق می‌دانست و دوست داشت از آنها پرهیز کند. وضعیت هندسه موضوع جالبی برای بحث در کلاس درس است، و در واقع من دامنهٔ هجو تاریخ را با رسم نمودارهایی به ابتکار خودم گسترش دادم. همین‌طور، بعضی موارد و جزئیات دیگری را که کوشی در نظریهٔ خود آورده بود کنار گذاشتم. اما پرسشهایی مطرح کردم از قبیل اینکه آیا کوشی مشتق f را پیوسته فرض می‌کرد یا نه (او این کار را می‌کرد، ولی به‌طور ضمنی)؛ و همچنین روایت سال ۱۸۲۵ او را از قضیهٔ مانده‌ها در درس آوردم با تذکر این نکته که، برخلاف آنچه بعداً معمول شد، او فرض می‌کرد $x + y\sqrt{-1}$ دقیقاً از قطبی از $f(x + y\sqrt{-1})$ بگذرد نه از اطراف آن [۶، بخش۸].

مثالهای مورد بحث در این بخش به حسابان و آنالیز ریاضی مربوط می‌شد چون این مطالعات موردی تصادفاً در آن مبحث صورت گرفته است. ولی روشهای تکوینی و هجو تاریخ شیوه‌هایی هستند که می‌توان آنها را در مورد هر مفهوم ریاضی یا در هر سطحی از تدریس به‌کار برد.

۸. پیشنهادهای باشماکووا

روابط بین دانش و نادانی که در بخش ۵ به آن اشاره شد نیازمندِ بررسی جدی است، از جملهٔ حسنِ نادانی به‌عنوان منشأ مسأله‌هایی (کوچک یا بزرگ) که باید با آنها دست‌وپنجه نرم کرد. یک حوزهٔ مهم پژوهش که این روابط در آن چشمگیر است، طراحی سرفصلهای دروس و شیوه و ترتیب تدریسِ مباحث

1. history-satire

پیشنهادی است، به‌خصوص وقتی که طراح به بررسی مرحله‌ای می‌پردازد که باید جهل دانش‌آموز یا دانشجو در مورد مفاهیم مشخصی از میان برود.

به‌عنوان مثال، به بررسی شیوه‌ای در تاریخ‌نگاری می‌پردازیم که در سالهای اخیر، باشماکووا مورخ روسی آن را پیشنهاد کرده است؛ اخیراً دو تا از کتابهای او به انگلیسی ترجمه شده و جامعهٔ ریاضی آمریکا (MAA) آنها را به خاطر سودمندی‌شان در آموزش ریاضی انتشار داده است. در بحث راجع به تاریخ جبر متعارف موضع او به‌صورت کلی و بسیار صریح در مقالهٔ مشترکی از او و واندالوکیس [۴] بیان شده است. از نظر آنها، دو مرحلهٔ اصلی در پرداختن به یک متن تاریخی وجود دارد. «اول باید متن به زبان ریاضی معاصر 'ترجمه شود' یعنی مدل مناسبی برای آن ساخته شود. این کار برای فهم متن و دریافت محتوای ریاضی آن ضروری است» (ص ۲۵۱). در مرحلهٔ دوم «لازم است اثر مورد نظر در چارچوب علوم زمان خودش نشانده شود» (ص ۲۵۲).

نویسندگان مقاله می‌گویند که مرحلهٔ دوم «مشکل‌تر» از اولی است؛ ولی به نظر من این کار ممکن است غیرممکن باشد زیرا در مرحلهٔ اول آنقدر مطلب میراث‌گونه گفته می‌شود که ممکن است زمینهٔ تاریخی در پس آنها پنهان شود. آنها هدف از میراث را خیلی روشن بیان می‌کنند: «ریاضیدانان در هر عصری مطالب قبلی را بازبینی و به زبان جدیدی بیان می‌کنند تا به آسانی برای دانشمندان معاصرشان قابل فهم و کاربرد باشد.» (ص ۲۵۰).

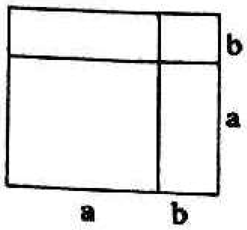
مثالهایی که در نوشته‌های باشماکووا آمده است ظاهراً نشان‌دهندهٔ درهم‌آمیزی تاریخ و میراث بدون تأکید بر تمایز بین آنهاست که در بخش ۷ مورد بحث قرار گرفت. مثلاً در مورد قضیهٔ ۴ مقالهٔ دوم اصول اقلیدس، اتحاد درجهٔ دوم

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (۲)$$

را قرائت مشروعی از این قضیه می‌داند [۱، ص۸۸]، [۳، ص۱۶۵].

در تاریخ مختصر جدیدتری از جبر که وی با همکاری اسمیرنووا نوشته است، رابطهٔ (۲) «معادل» با شکل ۲ قلمداد شده است [۳، فصل ۲]؛ و در سرتاسر این کتاب نمادهای نوین غلبه دارند، هر چند اصطلاحات و نمادهای قدیمی‌تر هم تا حدی به تفصیل عرضه شده‌اند [۳، فصلهای ۴-۵]. غلبهٔ میراث بر تاریخ در یک پیوست تاریخ‌نگاشتی عمومی، آنجا که مؤلفان به توضیح اصطلاح «جبر هندسی» می‌پردازند آشکار است زیرا جبر را مقوله‌ای تاریخی به‌شمار می‌آورند که از «ردهٔ مسائل وابسته به جبر امروزی» برآمده است (ص ۱۶۴). بنابراین، در نظر آنها، مقالهٔ دوم اقلیدس راجع به اتحادهایی جبری نظیر (۲) است (به‌خصوص به مقالهٔ باشماکووا در [۲] نگاه کنید): در واقع، جدیدترین موضع او تحمیل قرائتهای جبری بر حساب و هندسهٔ باستانی در همهٔ فرهنگهاست (نگاه کنید به [۳، صص ۱۶۳-۱۷۲]) و در این موضع، باشماکووا و اسمیرنووا به نفع ریاضیدانان و علیه اُنگورو (که عدم توافق آنها پیشتر در بخش ۲ شرح داده شد) رأی می‌دهند.

ترجیح نمادهای جدید در این کتاب با هدف آن که عمدتاً آموزشی است سازگار است و زنجیرهٔ مهمی از تأثیرات میراث‌بری را نشان می‌دهد. ولی در حکمهای کلی نقل شده دربارهٔ تغییر تاریخی به نظر می‌رسد میراث را اشتباهاً به جای تاریخ گرفته‌اند. از نظر من، اقلیدس در مقالهٔ دوم قضایایی راجع به زیرناحیه‌هایی از شکلهای مسطح راست‌خط مانند مربع، مستطیل، و مثلث ارائه می‌دهد (مانند مثال ذکر شده که در آن، مکانهای زیرمربعها



شکل ۲

و زیرمستطیلها نسبت به هم در علامت «+» گم شده است)، آن مقاله و همین‌طور همهٔ مقاله‌های هندسی دیگر اصول فاقد محتوای جبری است. ولی جبر در میراث پسایونانی هندسهٔ اقلیدس به‌وضوح پدیدار می‌شود. هر دو قرائت برای آموزش ریاضی ارزشمندند هر چند بهتر است تمایز آنها روشن شود. در واقع، تاریخ معادلات جبری، مانند خود اثر اقلیدس، موضوع جالبی برای هجو تاریخ است.

۹. کلام آخر

من در این مقاله، و با تفصیل بیشتر در مقالهٔ دیگری در همین زمینه [۱۶]، این نظر را مطرح کرده‌ام که تاریخ ریاضیات با مطالعات میراث‌نگرانه‌ای که برای استفاده از ریاضیات گذشته می‌شود تفاوت اساسی دارد. هر دو نوع مطالعه در آموزش ریاضی، آنجا که صحبت از ریاضیات گذشته در میان است، مفیدند. بیشتر مثالهای ارائه‌شده در این مقاله از دوره‌های نسبتاً متأخر گرفته شده‌اند و این امر تصادفی نیست زیرا حوزه‌های تخصصی من مربوط به این دوره‌هاست. ولی این مثالها به‌خودی خود اهمیتی ندارند. در واقع، چون تمایز بین تاریخ و میراث را موضوعی عام می‌دانیم، بینهایت مثال دیگر هم می‌توان آورد؛ از خواننده دعوت می‌شود مثالهایی از خودش بیاورد. یک منبع غنی مثالها با در نظرگرفتن شیوه‌های متعدد تغییر مفاهیم و حکمها به‌دست می‌آید به‌خصوص وقتی که آن حکمها قضیه‌ها یا نظریه‌های مهمی باشند. این تغییرات از جمله شامل تغییر نتایج شناخته‌شده به‌وسیلهٔ گسترش، تعمیم، و یا تجرید است، همچنین واکنش در برابر مثال ناقض، نمایش مفروضاتی که قبلاً بدیهی در نظر گرفته می‌شدند به‌صورت اصول موضوع، جرح و تعدیل الگوریتمها، برقراری یا شاید حذف روابط بین شاخه‌ها (مانند هندسه با یا بدون حساب)، رده‌بندی اشیای یک نظریه به انواع گوناگون، تغییر حالت بین اصل موضوع، قضیه، و تعریف، و کاربردهای جدید در درون ریاضیات و در رشته‌های دیگر.

در این مقاله به موضوعات مربوط به تاریخ و تاریخ‌نگاری توجه بیشتری شده است تا موضوعات مربوط میراث؛ ولی هیچ‌گونه قضاوت ارزشی به عمل نیامده است زیرا همان‌طور که در بخش ۱ گفته شد، هیچ‌یک از این دو نوع فعالیت تابع دیگری نیست. می‌توان مقاله‌ای نوشت که تمرکز آن بر کارهای خوب و بد در مطالعات میراثی باشد. این دو فعالیت متمایز از هم‌اند ولی تأثیرات مفیدی برهم دارند و هریک پرسشهایی در پیش می‌گذارد که دیگری باید به آن بپردازد.

مراجع

1. I. G. Bashmakova, Diophantine equations and the evolution of algebra, *Transl. Amer. Math. Soc.* **147** (2) (1990) 85-100.

2. ______, *Diophantus and Diophantine Equations* (trans. A. Schenitzer), Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1997.

3. I. G. Bashmakova, and G. Smirnova, *The Beginning and Evolution of Algebra* (trans. A. Schenitzer), Mathematical Association of America, Washington, D.C., 2000.

4. I. G. Bashmakova and I.M. Vandaloukis, On the justification of the method of historiographical interpretation, in *Trends in the Historiography of Science*, K. Gavroglu et al., eds., Kluwer, Dordrecht, Boston and London, 1994, pp. 249-264.

5. D. M. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis*, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1994.

6. A. L. Cauchy, *Résumé des Leçons Données à l'Ecole Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*, vol. 1 [and only], de Bure, Paris, 1823; also in *Oeuvres Complètes*, ser. 2, vol. 4, Gauthier-Villars, Paris, 1898; pp. 5-261.

7. ______, *Mémoire sur les intégrales définies, prise entre des limites imaginaires*, de Bure, Paris, 1825; also in *Oeuvres Complètés*, ser. 2, vol. 15, Gauthier-Villars, Paris, 1974, pp. 41-89.

8. J. Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme*, 3 vols., Hermann, Paris, 1938.

9. J. W. Dauben, *Georg Cantor*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1979, reprinted by Princeton University Press, Princeton, 1990.

10. J. W. Dauben and C. J. Scriba, eds., *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*, Birkhäuser, Basel, 2002.

11. Euclid, *Elements*; edition used: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 2nd ed., 3 vols. (ed. and trans. T. L. Heath), Cambridge University Press, Cambridge, 1926; reprinted by Dover, New York, 1956; 1st ed., 1908.

12. J. Fauvel and J. van Mannen, eds., *History in Mathematics Education. The ICME Study*, Kluwer, Dordrecht, 2000.

13. I. Grattan-Guinness, Not from nowhere. History and philosophy behind mathematical education, *Int. J. Math. Edu. in Science and Technology* **4** (1973) 421-453.

14. ______, *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*. 3 vols., Birkhäuser, Basel, and Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1990.

15. ______, Numbers, magnitudes, ratios and proportions in Euclid's *Elements*: How did he handle them? *Historia Mathematica* **23** (1996) 355-375; printing correction in **24** (1997) 213.

16. ______, The mathematics of the past. Distinguishing its history from our heritage, *Historia Mathematica* (to appear).

17. T. W. Hawkins, Cauchy and the spectral theory of matrices, *Historia Mathematica* **2** (1975) 1-29.

18. K. R. Popper, *Conjectures and Refutations*, Routledge and Kegan Paul, London, 1963.

19. ______, *The Open Universe. An Argument for Indeterminism*, Hutchinson, London, 1982.

20. D. Rowe, New trends and old images in the history of mathematics, in *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*, R. Calinger, ed., Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1996, pp. 3-16.

21. R. Siegmund-Schulze, Die Anfänge der Functionalanalysis, *Archive for History of Exact Sciences* **26** (1982) 13-71.

22. F. Smithies, *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

23. M. Stanford, *An Introduction to the Philosophy of History*, Blackwells, Oxford, 1997.

24. O. Toeplitz, *The Calculus. A Genetic Approach*, University of Chicago Press, Chicago, 1963.

25. P. Unger, *Ignorance. A Case for Scepticism*, Clarendon Press, Oxford, 1975.

26. K. van Berkel, *Dijksterhuis. Een biografie*, Bert Bakker, Amsterdam, 1996.

* * * * * *

• Ivor Grattan-Guinness, "History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education", *Amer. Math. Monthly*, (1) **110** (2004) 1-11.

* ایوار گراتن-گینس، استاد بازنشستهٔ تاریخ ریاضیات و منطق در دانشگاه میدل‌اسکس، انگلستان. وی از ویراستاران مجلهٔ *Annals of Science* (در زمینهٔ تاریخ علم) و بنیانگذار مجلهٔ *History and Philosophy of Logic* و ویراستار چندین مجموعه و نشریهٔ دیگر بوده است.

ترجمهٔ سیامک کاظمی