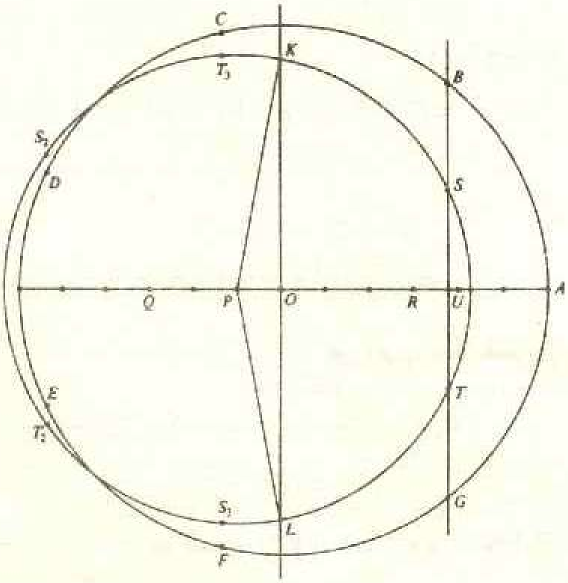
# تثلیث زاویه، هفت ضلعی منتظم، و سیزده ضلعی منتظم*

اندرو گلیسن
ترجمهٔ مسعود هادیان

درسال ۱۷۹۶ گاوس کشف کرد که چگونه می‌توان ۱۷ ضلعی منتظم را فقط با استفاده از ستاره و پرگار رسم کرد. گاوس نشان داد که ۲۵۷ ضلعی منتظم یا ۶۵۵۳۷ ضلعی منتظم را نیز می‌توان رسم نمود. او این نتایج را در کتاب تحقیقات حسابی مشهورش [۱۰، بخش VIII] درسال ۱۸۰۱ انتشار داد. وی درآن کتاب تحلیلی از هیاتهای $Q(\xi)$، که $\xi$ ریشهٔ $p$ام مختلط واحد و $p$ یک عدد اول فرد است، به عمل می‌آورد و از این تحلیل نتیجه می‌گیرد که یک $n$ ضلعی منتظم زمانی قابل ترسیم است که $n$ به صورت $2^m p_1 p_2 \cdots p_k$ باشد؛ دراینجا $p_1$، $p_2$، . . . ، $p_k$ اعداد اول متمایز فرما، یعنی اعداد اول فردی هستند که یک واحد از توانی از ۲ بیشتر باشند. وی شیوهٔ ترسیم هندسی آنها را صریحاً بیان نمی‌کند. گاوس همچنین با تأکید زیاد می‌نویسد [۱۰، ص ۴۵۹] که هیچ چند ضلعی منتظم دیگری قابل ترسیم نیست، اما هیچگاه برهانی برای این امر عرضه نمی‌کند. سرانجام در سال ۱۸۳۷ برای آن برهانی به‌وسیله وانتسل[1] [۱۷] ارائه‌شد. چون‌هیچ عدد اول فرمای بزرگتر از ۶۵۵۳۷ شناخته نشده، فهرست چند ضلعیهای منتظم قابل ترسیمی که گاوس تهیه کرده بود، دست نخورده باقی مانده است [۱].

اگر وسایل کارترسیم را بیشتر کنیم چندضلعیهای منتظم دیگری نیز ممکن است قابل ترسیم باشند [۴]. به‌عنوان مثال، به‌کمک یک مارپیچ ارشمیدس می‌توان هر زاویه‌ای را به هرتعداد دلخواه از اجزاء مساوی تقسیم کرد و از این طریق، هر چند ضلعی منتظمی را رسم کرد. فرض‌کنیم غیراز ترسیم با ستاره و پرگار استاندە، مجاز باشیم زاویه را نیز به‌سه قسمت مساوی تقسیم کنیم؛ دراین صورت چه نتایجی به‌دست می‌آوریم؟ بدیهی است که می‌توانیم ۹، ۲۷، ۸۱، . . . ضلعیهای منتظم را رسم کنیم. اما مطمئناً بدیهی نیست که هفت ضلعی منتظم را نیز بتوانیم رسم کنیم. در آنچه که در زیر می‌آید رابطهٔ بین تثلیث زاویه وحل معادلهٔ درجهٔ سوم را بررسی وسپس مشخص خواهیم کرد که کدام یک از چند ضلعیهای منتظم را می‌توان به کمک یک "زاویه ثلث کن" ترسیم کرد. ابتدا چگونگی رسم هفت ضلعی منتظم را نشان می‌دهیم.

کار را با دایرهٔ $\mathscr{C}$ به شعاع ۶ و مرکز مبدأ دستگاه مختصات دکارتی آغاز و نقاط $A(6, 0)$، $Q(-3, 0)$، و $R(3, 0)$ را مشخص می‌کنیم. جای نقاط $K(0, \sqrt{27})$ و $L(0, -\sqrt{27})$، رئوس دومثلث متساوی‌الاضلاع به قاعدهٔ مشترک $QR$، را نیز مشخص می‌نماییم. کمان $KL$ را به‌مرکز $P(-1, 0)$ رسم و آن را در نقاط $S$ و $T$ به‌سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. نقاط $B$ و $G$، محل تلاقی پاره‌خط $ST$ با دایرهٔ $\mathscr{C}$، دو رأس هفت‌ضلعی منتظم $ABCDEFG$ هستند. بقیهٔ رئوس را می‌توان با جدا کردن کمانهایی




**شکل ۱.** روش ترسیم هفت ضلعی منتظم

1. Wantzel

متوالی به‌اندازهٔ کمان $AB$، بر روی دایره مشخص کرد.

از راه دیگر: می‌توانیم کمان بزرگتر $K$ به $L$ را رسم و آن را در نقاط $S_۲$ و $T_۲$ بـه‌سه قسمت مساوی تقسیم کنیم؛ محل برخورد $S_۲T_۲$ با دایرهٔ $\mathcal{C}$ نقاط $D$ و $E$ هستند. سرانجام فـرض می‌کنیم $KL$ کمانی به‌مبدأ $K$ باشد که یك‌دور درجهت ساعت بر دایرهٔ به‌مرکز $P$ بچرخد، به $K$ بازگردد؛ و سپس به $L$ برسد. این کمان را نیز درنقاط $S_۳$ و $T_۳$ به‌سه قسمت مساوی تقسیم می کنیم و نقاط $C$ و $F$ را به‌دست می‌آوریم.

برهان ترسیم: محل برخورد $ST$ با محور $x$ را $U$ می‌نامیم. از روش ترسیم واضح است که داریم:

$$PK=\sqrt{۲۸}$$

$$\cos\angle APK=\frac{۱}{\sqrt{۲۸}}$$

$$PU=\sqrt{۲۸}\cos\angle APS=\sqrt{۲۸}\cos\frac{۱}{۳}\angle APK.$$

ترسیم درصورتی درست است که تساوی $OU=۶\cos(۲\pi/۷)$ و یا تساوی معادل آن $PU=۱+۶\cos(۲\pi/۷)$ برقرار باشد. بنابراین تنها کافی است ثابت کنیم که

$$\sqrt{۲۸}\cos\left(\frac{۱}{۳}\arccos\frac{۱}{\sqrt{۲۸}}\right)=۱+۶\cos\frac{۲\pi}{۷}.$$

برای اثبات فرض می‌کنیم $\xi=\cos(۲\pi/۷)+i\sin(۲\pi/۷)$ ریشهٔ اصلی هفتم عدد یك باشد. قرارمی‌دهیم

$$\eta=\xi+\xi^{-۱}=۲\cos\frac{۲\pi}{۷}.$$

پس

$$\begin{aligned}&\eta^۳+\eta^۲-۲\eta-۱\\&=\xi^۳+\xi^۲+\xi+۱+\xi^{-۱}+\xi^{-۲}+\xi^{-۳}=۰.\end{aligned}$$

بنابراین، $\eta$ یك ریشهٔ معادلهٔ زیر است

$$X^۳+X^۲-۲X-۱=۰. \qquad (۱)$$

با قراردادن $X=(Y-۱)/۳$ نتیجه می‌شود که

$$۱+۶\cos\frac{۲\pi}{۷}(=۱+۳\eta)$$

یك ریشهٔ معادلهٔ

$$Y^۳-۲۱Y-۷=۰ \qquad (۲)$$

است. بـا جانشانی $Y=\sqrt{۲۸}\cos\theta$ این معادله بـه‌معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

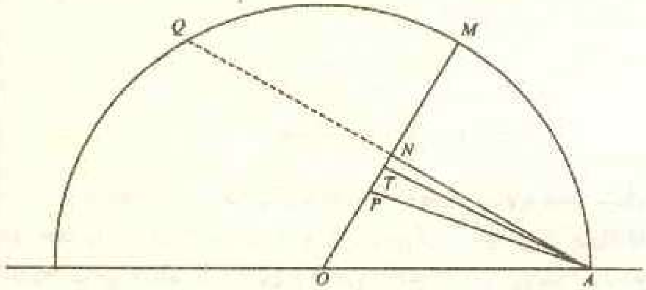
$$۷\sqrt{۲۸}(۴\cos^۳\theta-۳\cos\theta)=۷$$

و از آنجا

$$\cos ۳\theta=\frac{۱}{\sqrt{۲۸}}.$$

از این معادله برای $\theta$ شش مقدار به‌پیمانهٔ $۲\pi$ به‌دست می‌آید، که دو به‌دو با یکدیگر سه ریشهٔ معادلهٔ (۲) را مشخص می‌کنند. برعهدهٔ خـوانندهٔ گـذاشته می‌شود کـه نشان دهـد $۱+۳\eta$ بـا انتخاب $\theta=(۱/۳)\arccos(۱/\sqrt{۲۸})$ متناظر است. ریشه‌هـای دیگر عبارت‌اند از $۱+۶\cos(۴\pi/۷)$ و $۱+۶\cos(۶\pi/۷)$، که متناظر با جوابهای مختلف $\theta$ هستند و به‌پیدا کـردن نقاط $C$، $D$، $E$ و $F$ مذکور دربالا منجرمی‌شوند.

پلملی[1] در [۱۴] روش دیگری برای ترسیم هفت‌ضلعی منتظم $ABCDEFG$ با معلوم بودن $A$ و مرکز $O$ ارائه داده است:




**شکل ۴.** روش ترسیم پلملی

دایره‌ای به‌مرکز $O$ و شعاع $OA$ رسم و $M$ را بر آن چنان تعیین می‌کنیم که $AM=OA$. $OM$ را درنقاط $N$ و $P$ به‌ترتیب به‌دو وسه‌پارهٔ مساوی تقسیم می‌کنیم و $T$ را بر $NP$ چنان درنظرمی‌گیریم کـه $\angle NAT=(۱/۳)\angle NAP$. در این صورت $AT$ برابر ضلع هفت ضلعی منتظم مورد نظر است که با جدا کردن کمانهایی متوالی کـه طول آنها برابر $AT$ بـاشد می‌توان هفت ضلعی را کامل کرد.

پلملی خاطرنشان می‌سازد که چون‌زاویه‌ای که باید‌تثلیث‌شود خیلی کوچك است، خطای کل به‌اندازه‌ای کوچك است که می‌توان در هرکار عملی آن را نادیده گرفت. اگـر $NT$ را برابر یك‌سوم $NP$ بگیریم، $AT$ حداکثر ۱/۲۰،۰۰۰ واحد طول از انـدازهٔ حقیقی بزرگتر است. حتی اگـر $T$ را بر $N$ بگیریم، $AT$ حدود ۱/۴۰۰ واحد طول از اندازهٔ حقیقی کوتـاهتر خواهد شد. چون $AN$ برابر نصف $AQ$، ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی، است قاعدهٔ زیر را نتیجه می‌گیریم: طول ضلع هفت‌ضلعی‌منتظم محاطی (تقریباً) نصف طـول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی است. تروپفکه[2] [۱۵] می‌نویسد که این تقریب‌را ریاضیدان سدهٔ دهم محمد ابوالوفای بوزجانی به‌کار برده است وهمچنین این‌تقریب بر هرون اسکندرانی، و شاید ریاضیدانان پیش از او نیز معلوم بوده است.

برای توجیه روش ترسیم پلملی باید ثابت کنیم که

$$AT=OA\left(۲\sin\frac{\pi}{۷}\right).$$

چون

1. Plemelj 2. Tropfke

$$2\cos\frac{2\pi}{7}=2-\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^2$$

از (۱) نتیجه می‌شود که $2\sin(\pi/7)$ یک ریشهٔ معادلهٔ زیر است

$$(2-X^2)^3+(2-X^2)^2-2(2-X^2)-1=0.$$

ریشه‌های دیگر عبارت‌اند از $-2\sin(\pi/7)$، $\pm 2\sin(2\pi/7)$ و $\pm 2\sin(3\pi/7)$. معادلهٔ اخیر چنین تجزیه می‌شود:

$$(X^3+\sqrt{7}(X^2-1))(X^3-\sqrt{7}(X^2-1))=0.$$

ریشه‌های عامل اول عبارت‌اند از: $2\sin\frac{\pi}{7}$، $-2\sin\frac{\pi}{7}$ و $-2\sin\frac{3\pi}{7}$. اگر این معادله را به‌صورت

$$\left(\frac{1}{X}\right)^3-\frac{1}{X}=\frac{1}{\sqrt{7}} \qquad (3)$$

بنویسیم و قرار دهیم $(1/X)=2\sqrt{1/3}\cos\psi$، آنگاه از (۳) نتیجه می‌شود $\cos 3\psi=\sqrt{27/28}$. ریشهٔ مطلوب متناظر است با انتخاب

$$\psi=\alpha=\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{27}{28}}=\frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

و سرانجام چنین به‌دست می‌آوریم

$$2\sin\frac{\pi}{7}\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{3}\ .$$

با توجه به‌شکل ۲، داریم

$$\angle NAP=\arctan\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

لذا $\angle NAT=\alpha$. بنابراین

$$AT\cos\alpha=AN=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,OA.$$

از مقایسهٔ این معادلات می‌بینیم

$$AT=OA\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم.

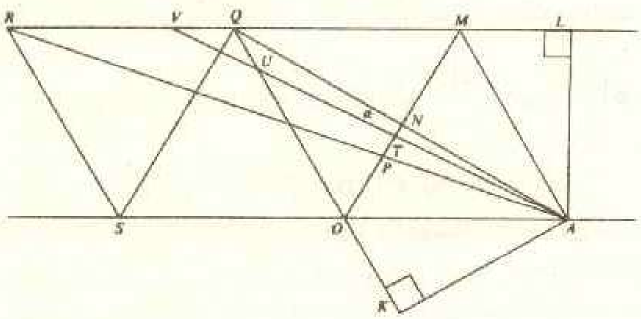
یادآوری می‌کنیم که $\angle OKP$ در شکل ۱، همان $\angle NAP$ در شکل ۲ است. بنابراین $\angle NAP$ (شکل ۲) متمم زاویهٔ $\angle OPK$ (شکل ۱) است، پس $\angle OPS=(\pi/6)-\alpha$. در نتیجه تثلیثهای مورد نیاز در هر دو ترسیم معادل یکدیگرند بدین معنی که هر یک از دو روش تثلیث را می‌توان از دیگری به‌وسیله ستاره و پرگار به‌دست آورد.

به‌دست آوردن دو ریشهٔ دیگر (۳) نیز جالب است. این ریشه‌ها در واقع با تغییر جواب $\psi$ از $\alpha$ به $\alpha+(2\pi/3)$ و به $\alpha-(2\pi/3)$ معلوم می‌شوند. داریم

$$\left(-2\sin\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\left(-2\sin\frac{3\pi}{7}\right)\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

حال اگر علامتهای منهای نامطلوب را در کسینوسها دخالت دهیم درمی‌یابیم که

$$2\sin\frac{2\pi}{7}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$




**شکل ۳.** تعمیم ترسیم پلملی. نقاط $O$، $A$، $M$، $Q$، $R$، $S$ رئوس شبکه‌ای از مثلثهای متساوی‌الاضلاع هستند. خط $AV$ چنان اختیار شده است که $\angle QAV=(1/3)\angle QAR$. پس $AT$، $AU$ و $AV$ به‌ترتیب عبارت‌اند از ضلع، قطر اقصر و قطر اطول هفت‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به‌شعاع $OA$.

در شکل ۳ داریم

$$AU\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=AK=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,OA$$

و

$$AV\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=AL=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,OA.$$

بنابراین

$$AU=OA\left(2\sin\frac{2\pi}{7}\right)$$

و

$$AV=OA\left(2\sin\frac{3\pi}{7}\right).$$

این روابط نشان می‌دهند که $AU$ و $AV$ به‌ترتیب برابر قطرهای اقصر و اطول هفت ضلعی منتظم هستند.

حال به‌نظریهٔ زیربنایی این ترسیمات می‌پردازیم. این مطلب را با مروری بر حل معادلهٔ درجهٔ سوم با ضرایب حقیقی آغاز می‌کنیم. جملهٔ $X^2$ را می‌توان همواره با انتقال ریشه‌ها حذف کرد؛ برای اجتناب از کسرهای بعدی، معادله را به‌صورت

$$X^3-3pX+2q=0 \qquad (4)$$

می‌نویسیم. چون این معادله از درجهٔ فرد است، باید حداقل یک

ریشهٔ حقیقی داشته باشد. ماهیت دو ریشهٔ دیگر از بررسی کمیت

$$D=q^2-p^3$$

مشخص می‌شود [۳]. اگر $D>0$، معادله دارای دو ریشهٔ مختلط مزدوج و یک ریشهٔ حقیقی است؛ اگر $D<0$، معادله سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؛ و اگر $D=0$، معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف، $q/p$، و یک ریشهٔ ساده، $-2q/p$، است (مگر در حالتی که $p=q=0$ که در این صورت هر سه ریشهٔ معادله صفرند). این نتایج را می‌توان به‌سادگی با بررسی نقاط بحرانی تابع چندجمله‌ای در (۴) به‌دست آورد. متذکر می‌شویم که $D$ نمی‌تواند منفی باشد مگر اینکه $p$ مثبت باشد.

برای $D$ی مثبت، طبق فرمول کاردان ریشهٔ حقیقی و یکتای معادله عبارت است از

$$\sqrt[3]{-q+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{D}}.$$

این ریشه را می‌توان با معلوم بودن $p$ و $q$ به‌وسیلهٔ ستاره و پرگار و استخراج یکی از ریشه‌های سوم رسم کرد. (ریشهٔ سوم دیگر را می‌توان از روی اولی به وسیله ستاره و پرگار رسم کرد، زیرا حاصلضرب هر دو ریشهٔ سوم برابر $p$ است).

هنگامی که $D<0$، حالت معروف به‌تحویل‌ناپذیری که ظاهراً جنبهٔ پارادوکسی دارد پدید می‌آید: گرچه هر سه ریشه حقیقی‌هستند، آنها را به‌وسیلهٔ رادیکالها در حوزهٔ اعداد حقیقی نمی‌توان به‌دست آورد [۴]. فرمول کاردان در این حالت به‌قوت خود باقی‌است، اما شامل ریشه‌های سوم اعداد مختلط است.

برای به‌دست آوردن ریشهٔ سوم عدد مختلط $c$، باید در حالت کلی ریشهٔ سوم عدد حقیقی $|c|$ را به‌دست آوریم و زاویهٔ قطبی $c$ را به سه پارهٔ مساوی تقسیم کنیم. ولی در این حالت خاص، تنها تثلیث زاویه به ابزارهای خاص نیاز دارد، زیرا قدرمطلق هر یک از مقادیر ریشهٔ سوم برابر $p^{3/2}$ است، که با توجه به‌آن، ریشهٔ سوم به‌سادگی قابل ترسیم است.

در حالتی که بدانیم همهٔ ریشه‌ها حقیقی‌هستند، می‌توانیم مستقیماً با قرار دادن $X=2\sqrt{p}\cos\theta$ در (۴) به مسألهٔ تثلیث زاویه بپردازیم که این عمل معادله را به معادلهٔ $\cos 3\theta=-qp^{-3/2}$ تبدیل می‌کند. یادآوری می‌کنیم که فرض $D<0$ ضامن برقراری نامساوی $|qp^{-3/2}|<1$ است، بنابراین یک زاویه قابل ترسیم برای تثلیث وجود دارد. همانند قبل، شش مقدار $\theta$ به پیمانهٔ $2\pi$ به سه ریشهٔ مطلوب منجر می‌شوند. پس از آنکه یکی از مقادیر $\theta$ معلوم شد ریشه‌های دیگر را می‌توان به‌آسانی با افزودن و کاستن $2\pi/3$ پیدا کرد؛ بنابراین تنها یک تثلیث زاویه برای پیدا کردن هر سه ریشه کفایت می‌کند.

برعکس، هر معادلهٔ درجهٔ سومی که به‌وسیلهٔ تثلیث زاویه قابل حل باشد، باید سه ریشهٔ حقیقی داشته باشد، زیرا این روش اگر ریشه‌ای به‌دست دهد، هر سه ریشه را به‌دست می‌دهد. بنابراین قضیه بنیادی زیر را داریم:

**قضیهٔ ۱.** یک معادلهٔ درجهٔ سوم با ضرایب حقیقی را می‌توان از راه هندسی با استفاده از ستاره، پرگار و زاویه ثلث‌کن حل کرد، اگر و تنها اگر هر سه ریشهٔ معادله حقیقی باشند.

از این رو، یک زاویه ثلث‌کن در تضعیف مکعب به ما کمکی نخواهد کرد، زیرا معادله‌ای که باید حل شود، $2=X^3$، تنها دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

اکنون در وضعیتی هستیم که می‌توانیم دقیقاً توضیح دهیم که چه چیزهایی را می‌توانیم با ستاره، پرگار و زاویه ثلث‌کن رسم کنیم.

به‌هر شکل هندسی (یعنی، مجموعه‌ای متناهی از نقاط، خطوط و دوایر) در صفحهٔ مختصات دکارتی [۵]، زیر هیأت مشخصی از اعداد حقیقی، یعنی هیأت مختصات همهٔ نقاط و ضرایب معادلات کلیهٔ خطوط و دوایر وقتی که به‌شکل استاندهٔ $y=mx+b$ (یا $x=a$) و $x^2+y^2=ax+by+c$ بیان شوند، وابسته است. فرض کنید که داده‌های یک مسأله ترسیمی [۶] به‌هیأت $F_0$ و شکلی که باید ترسیم شود به‌هیأت $G$ وابسته است. ترسیم را می‌توان با استفاده از ستاره و پرگار تنها انجام داد اگر و تنها اگر برجی از هیأتهای $F_0\subseteq F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq F_k$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $G\subseteq F_k$، و هر $F_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$ با افزودن ریشهٔ دوم عنصر مثبتی از $F_{i-1}$ به‌آن به‌دست آید. (برای ملاحظهٔ اثبات این قضیهٔ استانده به [۱۶، ص ۱۸۳ و بعد از آن] رجوع کنید). هیأتهای میانی $F_i$ متناظرند با شکل اولیه همراه با نقاط، خطوط و دوایری که به‌طور متوالی در ترسیم مورد نظر به‌کار رفته‌اند. وقتی که استفاده از زاویه ثلث‌کن مجاز باشد، نتیجه تغییر نمی‌کند جز اینکه حالا به خود اجازه می‌دهیم $F_i$ را از $F_{i-1}$، با افزودن یک ریشه از چندجمله‌ای درجهٔ سومی که ضرایبش در $F_{i-1}$ و همهٔ ریشه‌هایش حقیقی‌هستند، بسازیم. برهان این قضیهٔ جدید وقتی قضیهٔ ۱ اثبات شده باشد عملاً شبیه برهان قضیهٔ استانده است.

برای توضیح وضعیت بالا بجاست که بگوییم هیأت $F_k$ را می‌توان از طریق هیأت $F_0$ ساخت.

برای چندضلعیهای منتظم قضیهٔ زیر را داریم:

**قضیهٔ ۲.** یک $n$ضلعی منتظم به‌وسیلهٔ ستاره، پرگار و زاویه ثلث‌کن قابل ترسیم است اگر و تنها اگر $n$ به‌صورت $2^r\times3^s\times p_1p_2\cdots p_k$ قابل تجزیه باشد، که $p_1$، $p_2$، …، $p_k$ اعداد اول متمایزی (بزرگتر از ۳) باشند، و هر کدام به‌صورت $2^t\times3^u+1$ باشد [۷] (امکان $k=0$ یعنی حالت $n=2^r\times3^s$ را نیز می‌گنجانیم).

برای اثبات قضیه از لم زیر استفاده می‌شود.

**لم.** فرض می‌کنیم $K$ یک هیأت حقیقی و $L$ یک توسیع نرمال $K$ از درجهٔ ۳ است. در این صورت $L$ را می‌توان از $K$ با استفاده از ستاره، پرگار و زاویه ثلث‌کن ساخت.

برهان: می‌دانیم $L=K[\beta]$، که در آن $\beta$ ریشه‌ای از یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر از درجهٔ ۳ مانند $p(X)$ است که ضرایب آن در $K$ هستند. چون $L$ یک توسیع نرمال $K$ است، همهٔ ریشه‌های $p(X)$ در $L$ واقع‌اند و هر یک از آنها $L$ را تولید می‌کند. اما یکی از ریشه‌ها، فرضاً $\gamma$، حقیقی‌است و $L=K[\gamma]$. بنابراین $L$ هیأتی است حقیقی و ریشه‌های $p(X)$ همه حقیقی‌اند. لذا این لم از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود.

برهان قضیهٔ ۲: چون برهان خیلی شبیه به برهان معروف برای ستاره و پرگار تنهاست، فقط مهمترین مراحل آن را ذکر می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $n$ عدد صحیحی، لااقل مساوی ۳، باشد. قرار می‌دهیم

$$\xi = e^{2\pi i/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

و

$$\eta = \xi + \xi^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{n}.$$

گروه گالوای هیأت دایره‌بری[1] $Q(\xi)$ روی $Q$ گروهی است آبلی با $\varphi(n)$ عنصر، که $\varphi$ تابع فی اویلر است. در نتیجه هر هیأت بین $Q$ و $Q(\xi)$ روی $Q$ نرمال است و گروه گالوای آن آبلی است. به‌ویژه، هیأت حقیقی $Q(\eta)$ روی $Q$ نرمال است. چون $\xi$ روی $Q(\eta)$ از درجهٔ ۲ است، درجهٔ $Q(\eta)$ روی $Q$ برابر است با $(1/2)\varphi(n)$.

حال فرض می‌کنیم $n$ به‌صورت مذکور در قضیهٔ ۲ باشد. در این صورت $\varphi(n) = 2^v \times 3^w$، که در آن $v$ و $w$ اعدادی صحیح هستند، پس گروه گالوای $Q(\eta)$ دارای $2^{v-1} \times 3^w$ عنصر است. بنابراین این گروه دارای سری ترکیبی به‌طول $v+w-1$ است که کلیهٔ خارج قسمتهایش با $Z_2$ یا $Z_3$ یکریخت هستند. متناظر با آنها برجی مانند

$$F_0 = Q \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_{v+w-1} = Q(\eta)$$

ازهیأتهای حقیقی وجود دارد که هریك از آنها روی هیأت پیش از خود نرمال و از درجهٔ ۲ یا ۳ است. با به‌کار بردن لم مشاهده می‌کنیم که هیأت $Q(\eta)$ را می‌توان با استفاده از ستاره، پرگار و زاویه ثلث‌کن ترسیم کرد. این بدین معنی است که می‌توانیم پاره‌خطی به‌طول $\cos(2\pi/n)$ رسم کنیم و با استفاده از آن و به‌سادگی می‌توانیم یك $n$ ضلعی منتظم بسازیم. با برگشت به‌عقب می‌بینیم که از زاویه ثلث‌کن باید دقیقاً $w$بار استفاده کنیم.

برعکس، فرض می‌کنیم یك $n$ضلعی منتظم را بتوانیم با استفاده از ستاره، پرگار و زاویه‌ثلث‌کن رسم کنیم. پس $\eta$ قابل ترسیم است، بنابراین باید درهیأتی از درجهٔ $2^a \times 3^b$ روی $Q$ باشد. لذا خود $\eta$ باید ازدرجهٔ $2^c \times 3^d$ باشد و $\varphi(n) = 2^{c+1} \times 3^d$. اما این امر ایجاب می‌کند که $n$ شکل مذکور درقضیه را داشته باشد.

به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ فوق، عدد اول تازهٔ بعدی، یعنی $13 = 2^2 \times 3 + 1$ را درنظر می‌گیریم. قضیهٔ ۲ می‌گوید که سیزده ضلعی‌منتظم را می‌توان با تنها یکبار استفاده از تثلیث زاویه ترسیم کرد. راههای زیادی برای این ترسیم هست، اما از لحاظ هندسی هیچ‌یك بر دیگری ارجحیت ندارد.

اعداد $2\cos(2\pi k/13)$، $k = 1, 2, \ldots, 6$، ریشه‌های چندجمله‌ای

$$X^6 + X^5 - 5X^4 - 4X^3 + 6X^2 + 3X - 1$$

هستند که روی هیأت $Q(\sqrt{13})$ به‌صورت زیر تجزیه می‌شود

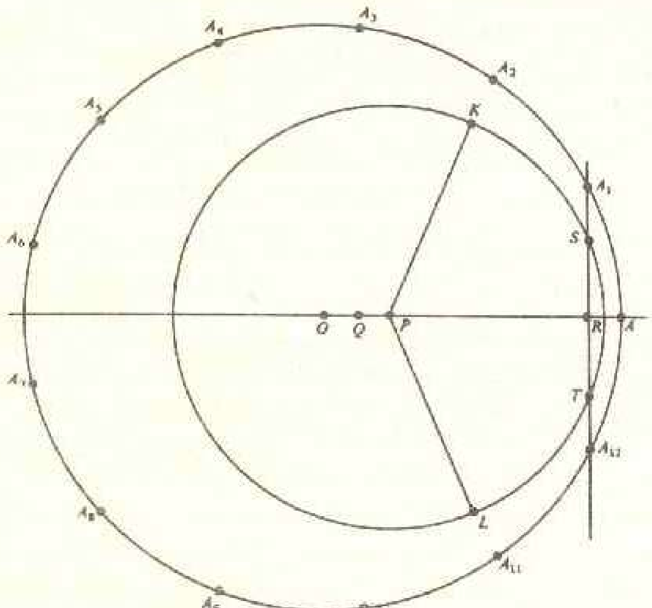
$$(X^3 - X - 1 + \lambda(X^2 - 1))(X^3 - X - 1 + \bar{\lambda}(X^2 - 1))$$

که در اینجا $\lambda = (1 - \sqrt{13})/2$ و $\bar{\lambda} = (1 + \sqrt{13})/2$. عامل اولی دارای ریشهٔ $2\cos(2\pi/13)$ است. بنابراین $12\cos(2\pi/13) + 2\lambda$ یك ریشهٔ از چندجمله‌ای درجهٔ سومی است که هیچ جملهٔ درجهٔ دومی ندارد که بتوانیم آن را مانند بالا به‌دست آوریم. بعد از محاسبات زیاد به‌دست می‌آوریم

$$12\cos\frac{2\pi}{13} = \sqrt{13} - 1 + \sqrt{104 - 8\sqrt{13}}$$

$$\times \cos\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}(\sqrt{13}+1)}{7 - \sqrt{13}}$$

و این به‌ترسیم زیر منجر می‌شود که کاملاً شبیه ترسیمی است که برای هفت ضلعی‌منتظم ذکر کردیم:




**شکل ۴.** روش ترسیم سیزده ضلعی‌منتظم

فرض می‌کنیم $\mathcal{D}$ دایره‌ای به‌شعاع ۱۲ و مرکز مبدأ مختصات باشد. نقاط $A(12, 0)$، $P(\sqrt{13}-1, 0)$، $Q(5-\sqrt{13}, 0)$ و $R(7+\sqrt{13}, 0)$ را مشخص می‌کنیم. جای نقاط

$$K(6, \sqrt{3}(\sqrt{13}+1))$$

و

$$L(6, -\sqrt{3}(\sqrt{13}+1))$$

دو رأس مثلث متساوی‌الاضلاع به‌قاعدهٔ $QR$، را نیز معین می‌کنیم. کمان $KL$ به‌مرکز $P$ را رسم و آن را درنقاط $S$ و $T$ به سه پارهٔ مساوی تقسیم می‌کنیم. خط $ST$ دایرهٔ $\mathcal{D}$ را در $A_1$ و $A_{12}$، دو رأس از سیزده ضلعی منتظم $AA_1A_2\cdots A_{12}$، قطع می‌کند.

باید توجه داشت که پاره‌خط به طول $\sqrt{13}$ وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است به‌اضلاع ۲ و ۳.

1. cyclotomic

شکل فوق دو ترسیم تقریبی را پیش پای ما می گذارد. نقطهٔ $R$ خیلی نزدیك به خط $ST$ به نظر می رسد. زیرا، خط مار بر $R$ و عمود بر محور $x$ دایرهٔ $\mathscr{D}$ را در دو نقطه قطع می کند؛ آن یك که به $A_1$ نزدیکتر است حدود ۱۲ دقیقهٔ کمانی از $A_1$ فاصله دارد. حتی از این هم نزدیکتر، خط $PK$ دایرهٔ $\mathscr{D}$ را در نقطه‌ای قطع می کند که در حدود ۳ دقیقهٔ کمانی از $A_2$ فاصله دارد.

عدد اول تازهٔ بعدی، ۱۹، احتیاج به دوبار تثلیث زاویه دارد. جزئیات اثبات به عهدهٔ خواننده گذاشته می شود!

چند تعمیم قضیهٔ ۲ بلافاصله به ذهن القا می شود. برای ترسیم ۱۱ ضلعی منتظم باید چند جمله‌ای درجهٔ پنجمی را حل کنیم که $2\cos(2\pi/11)$ ریشهٔ آن باشد. آیا انجام دادن این عمل با تقسیم یك زاویه به ۵ پارهٔ مساوی امکان پذیر است؟ گاوس به کلیهٔ این گونه پرسشها پاسخ داده است. در اینجا حکم نهایی او را دربارهٔ این موضوع می آوریم [۳، ص ۴۵۰]:

در نتیجه، تقسیم یك دایره به $n$ (عدد اول) پارهٔ مساوی نیازمند است به: اولاً تقسیم کل آن دایره به $n-1$ پارهٔ مساوی؛ ثانیاً تقسیم کمان دیگری به $(n-1)$ پارهٔ مساوی که به محض انجام تقسیم اول امکان پذیر است؛ ثالثاً استخراج یك ریشهٔ دوم؛ و می توان نشان داد که این عدد همواره برابر است با $\sqrt{n}$.

از اینجا به آسانی نتیجه می شود که یك $n$ ضلعی منتظم ($n$ دیگر لزومی ندارد اول باشد) را زمانی می توان رسم کرد که علاوه بر ستاره و پرگار ابزار دیگری برای $p$ قسمت کردن هر زاویه، به ازای هر عدد اول $p$ که $\varphi(n)$ را عاد می کند، در دست باشد. بنابراین ستاره، پرگار و زاویه خمس کن برای ترسیم ۱۱ ضلعی، ۴۱ ضلعی و یا ۱۰۱ ضلعی کافی است.

### یادداشتها و مراجع

۱. چون $2^{pq}+1$، $q$ عدد فرد بزرگتر از یك، دارای شمارندهٔ غیر بدیهی $2^{p}+1$ است، واضح است که $2^{r}+1$ فقط درصورتی اول است که $q$ خود توانی از عدد ۲ باشد، بنابراین کلیهٔ اعداد اول فرما به صورت $2^{2^k}+1$ هستند. اعداد اول شناخته شدهٔ فرما ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷، و ۶۵۵۳۷ به ترتیب متناظر با مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ برای $k$ هستند. اویلر نشان داد

$$2^{2^5}+1=641\times 6700417.$$

که این خود حدس فرما را که $2^{2^k}+1$ به ازای کلیهٔ مقادیر $k$ عددی اول است، رد می کند. اخیراً ثابت کرده‌اند که $2^{2^k}+1$ به ازای مقادیر $6\leqslant k\leqslant 19$ و بسیاری مقادیر بزرگتر عددی است مرکب. در بسیاری از موارد تجزیهٔ کامل این اعداد مرکب به دست نیامده است. [۹] را ببینید.

۲. هم [۸] و هم [۱۳] شامل اطلاعات زیادی دربارهٔ روش ترسیم با استفاده از ابزارهای استثنایی هستند. برای شرح ترسیمهای استاندارد "ستاره و پرگار" به [۱۲] رجوع کنید.

۳. این بحث معمولاً برحسب مبین معادله (یعنی مربع حاصلضرب کلیهٔ تفاضلهای ریشه‌ها) انجام می گیرد. مبین معادله (۴) $D$ نیست بلکه $-108D$ است؛ پس مقدار مثبت $D$ متناظر است با مبین منفی و برعکس.

۴. برای ملاحظهٔ اثبات این موضوع به [۱۶، صفحهٔ ۱۸۰] رجوع کنید. برای مطالعهٔ بحث مبسوطی در مورد حل معادلات به وسیلهٔ رادیکالهای حقیقی، [۱۱] را ببینید.

۵. فرض می کنیم نقاط (۰، ۰) و (۱، ۰) دو نقطه از شکل باشند.

۶. اگر در صفحهٔ داده‌ها هیچ دستگاه مختصاتی نداشته باشیم، ابتدا با انتخاب دو نقطه مفروض (۰، ۰) و (۱، ۰) یك دستگاه مختصات می سازیم. این داده‌ها باید شامل دو نقطه باشند، و یا حداقل دو نقطه اشتراك باید فوراً در دسترس باشند؛ درغیر این صورت هیچ ترسیمی مقدور نیست. (در اینجا دستور "نقطهٔ دلخواهی را انتخاب کنید" پذیرفتنی نیست زیرا در این صورت تحلیل ترسیمها خیلی پیچیده خواهد شد. به [۱۲] رجوع کنید).

۷. روی هم رفته ۴۱ عدد اول به این شکل وجود دارند که از یك میلیون کوچکترند. این اعداد عبارت اند از:

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۳۷، ۷۳، ۹۷، ۱۰۹، ۱۶۳، ۱۹۳،
۲۵۷، ۴۳۳، ۴۸۷، ۵۷۷، ۷۶۹، ۱۱۵۳، ۱۲۹۷، ۱۴۵۹، ۲۵۹۳،
۲۹۱۷، ۳۴۵۷، ۳۸۸۹، ۱۰۳۶۹، ۱۲۲۸۹، ۱۷۴۹۷، ۱۸۴۳۳،
۳۹۳۶۷، ۵۲۴۸۹، ۶۵۵۳۷، ۱۳۹۹۶۹، ۱۴۷۴۵۷، ۲۰۹۹۵۳،
۳۳۱۷۷۷، ۴۷۲۳۹۳، ۶۲۹۸۵۷، ۷۴۶۴۹۷، ۸۳۹۸۰۹،
۹۹۵۳۲۹.

بجاست حدس بزنیم که تعداد آنها بینهایت است؛ احتمالاً حدود ۹۱ از آنها کوچکتر از $10^{10}$ هستند.


8. L. Bieberbach, Theorie der Geometrischen Konstruktionen, Birkhauser, Basel, 1952.
9. J. Brillhart, D.H. Lehmer, J.L. Selfridge, B. Tuckerman, and S.S. Wagstaff, Factorizations of $b^n\pm1$, *Contemporary Mathematics*, 22 (1983) American Mathematical Society, Providence, R.I.
10. C.F. Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, Leipzig, 1801, translated from the Latin by A.A. Clarke, Yale University Press, New Haven, CT, 1965.
11. I.M. Isaacs, Solution of Polynomials by real radicals, *Amer. Math. Monthly*, 92 (1985) 571-575.
12. N.D. Kazarinoff, Ruler and the Round, vol.15, Complementary series in mathematics, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1970.
13. H. Lebesgue, Leçons sur les constructions géométriques, Gauthier-Villars, Paris, 1950.
14. J. Plemelj, Die Siebenteilung des Kreises, *Monatshefte fur Math. und Phys.*, 23 (1912) 309-311.
15. J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Band IV, de Gruyter, Berlin, 1940, p.259.
16. B.L. van der Waerden, Modern Algebra (trans. from the German by Fred Blum), Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1949.
17. P.L. Wantzel, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2 (1837) 366-372.


• Andrew M. Gleason, "Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon." *Amer. Math. Monthly*, (3) **95** (1988) 185-194.