نشر ریاضی، سال ۳، شمارهٔ ۱ و ۲، مرداد ۱۳۶۹

قضیهٔ جداسازی ژوردان ـ براوئر برای اَبَررویه‌های هموار*

الون لیما*
ترجمهٔ سعید ذاکری

دراین‌مقاله برهان ساده‌ای ازقضیهٔ زیر به‌دست خواهیم‌داد:

قضیهٔ جداسازی ژوردان-براوئر. فرض کنیم $M \subset \mathbf{R}^m$ یک ابررویهٔ هموار، همبند، فشرده، و جهت‌پذیر باشد. در این صورت متمم آن، $\mathbf{R}^m - M$، دومؤلفهٔ همبند داردکه M مرز هریک ازآنهاست.

زیرمجموعهٔ $M \subset \mathbf{R}^m$ یک ابررویهٔ هموار خوانده می‌شود هرگاه به‌ازای هرنقطهٔ $x \in M$ مجموعه‌ای باز چون U حاوی x، و تابعی هموار چون $\varphi : U \to \mathbf{R}$ با ویژگیهای زیروجود داشته باشد: i) $\operatorname{grad}\varphi(x) \neq 0$؛ ii) $\varphi^{-1}(0) = M \cap U$. بردار $v \in \mathbf{R}^m$ را قائم بر M در نقطهٔ x می گوییم هرگاه مضربی از $\operatorname{grad}\varphi(x)$ باشد. فضای مماس بر M در نقطهٔ x عبارت‌است ازمجموعهٔ $T_x M$ مرکب ازهمهٔ بردارهای $\mathbf{R}^m$ که بر $\operatorname{grad}\varphi(x)$ عمود باشند. نگاشت $f : M \to \mathbf{R}^n$ هموار نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in M$، f تحدید نگاشتی هموار چون $F : U \to \mathbf{R}^n$ به $M \cap U$ باشد، که‌در آن U مجموعه‌ای باز شامل x است. مشتق نگاشت‌هموار $f : M \to \mathbf{R}^n$ تبدیلی‌خطی‌چون $f'(x) : T_x M \to \mathbf{R}^n$ است که از تحدید $F'(x) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ به‌دست می آید. (به‌یاد آورید که ماتریس $F'(x)$، ماتریس‌ژاکوبی F است.) هر نگاشت هموار که وارونش نیز هموار باشد، یک دیفئومرفیسم[1] نام دارد. قضیهٔ نگاشت‌وارون‌حکم می کند که‌اگر $f'(x) : T_x M \to \mathbf{R}^{m-1}$ یک‌یکریختی‌خطی باشد، آنگاه همسایگی V ازنقطهٔ x در M وجود دارد به‌طوری که تحدید f به‌آن، یک دیفئومرفیسم از V به‌روی زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbf{R}^{m-1}$ است. (برای ملاحظهٔ تفصیل بیشتر، مرجع [۲] را ببینید.)

ابررویهٔ هموار $M \subset \mathbf{R}^m$ را جهت‌پذیر می‌خوانیم هرگاه میدان هموار‌ی از بردارهای واحد قائم را به‌خود بپذیرد، یعنی نگاشت هموار‌ی چون $v : M \to \mathbf{R}^m$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x \in M$، $|v(x)| = 1$ و $v(x)$ درنقطهٔ x قائم‌بر M باشد.

فرض جهت‌پذیری درقضیهٔ بالا زائد است، چرا که هر ابررویهٔ فشرده لزوماً جهت‌پذیر است. (برای دیدن برهان کوتاهی از این مطلب در حالت هموار، مرجع [۱] را ببینید.) لکن آوردن این فرض دراینجا به ما امکان می‌دهد که برهان‌را ساده‌کنیم. دربسیاری حالات (همچون‌وقتی که $M = S^{m-1}$ [کرهٔ $m-1$ بعدی در $\mathbf{R}^m$]) جهت‌پذیری نوعی پیش‌فرض تلقی می‌شود.

منظور ما از «هموار» همان C^∞ است. اثبات ما کلمه به‌کلمه برای رویه‌های C^2 نیز برقرار است، و با اندک اصلاحات فنی (با بهره‌وری از میدانهای قاطع[1] به‌جای‌قائم) می‌توان آن را برای رویه‌های C^1 نیز به‌کار بست.

برای‌اثبات قضیهٔ بالا می‌توانستیم از روش‌ساملسن نیز استفاده کنیم، اما گمان می کنیم که رهیافت ما مقدماتیتر باشد. به‌جای به‌کاربستن قضیهٔ تقاطع[2] و رده‌بندی‌خمینه‌های یک‌بعدی، از این‌حکم مشهوراستفاده می کنیم که هرمیدان‌برداری‌هموار $X : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$، $X(x) = (a_1(x), \ldots, a_m(x))$، که در شرایط انتگرال‌پذیری $\partial a_i/\partial x_j = \partial a_j/\partial x_i$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ صدق کند، گرادیان تابعی هموار چون $\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ است.

یک‌بار و برای همیشه، میدانی هموار از بردارهای واحد قائم چون $v : M \to \mathbf{R}^m$ را مفروض می گیریم، و نگاشت هموار $h : M \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ را با $h(x, t) = x + t.v(x)$ تعریف‌می کنیم. به‌ازای‌هر $\varepsilon > 0$ مفروض، $h_\varepsilon : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^m$ نمایانگر

1. diffeomorphism

1. transverse
2. transversality

تحدید h خواهد بود.

نتیجهٔ استاندارد زیر را بـرای کامل بـودن بحث یادآوری می کنیم.

لم. فـرض کنیم $M \subset \mathbf{R}^m$ یـك ابر رویهٔ هموار، جهت‌پذیر، وفشرده باشد. دراین‌صورت به‌ازای εی مثبت، $h_\varepsilon : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^m$ یك دیفئومرفیسم به‌روی زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbf{R}^m$ است.

برهان. به‌ازای‌هر $x \in M$، مشتق $h'(x, 0): T_x M \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ یك‌یکریختی خطی است، زیرا هر بردار افقی $(w, 0)$ را به w، و هر بردارقائم $(0, t)$ را به $t \cdot v(x)$ (که‌بر w عمود است)می فرستد. بنا بر قضیهٔ نگاشت وارون، می‌توانیم $\delta_x > 0$ و همسایگی بـاز V_x از x در M را چنان بیابیم که h مجموعهٔ $V_x \times (-\delta_x, \delta_x)$ را به‌طور دیفئومرفیك به‌روی یك همسایگی‌باز x در $\mathbf{R}^m$ بنگارد. تنها چیزی که برای اثبات باقی‌می‌ماند آن است که نشان‌دهیم h_ε، برای εی مثبت، یك به‌یك است. هرگاه چنین نباشد، به‌ازای هـر $n \in \mathbf{N}$ می تـوان جفتهـای متمایـز (x_n, s_n) و (y_n, t_n) را در $M \times (-1/n, 1/n)$ چنان یافت که $h(x_n, s_n) = h(y_n, t_n)$. چون $M \times [-1, 1]$ فشرده است، می‌توانیم (درصورت لـزوم، بـا درنظر گرفتن زیـردنباله‌هـا) فـرض کنیم $x_n \to x \in M$ و $y_n \to y \in M$، $s_n \to 0$، و $t_n \to 0$. دراین صورت

$$x = h(x, 0) = \lim_n h(x_n, s_n) = \lim_n h(y_n, t_n)$$

$$= h(y, 0) = y.$$

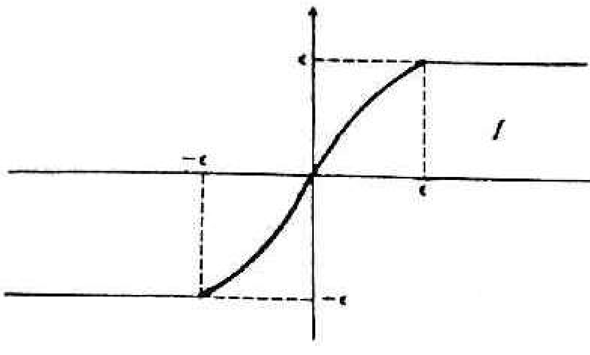
بنابـراین، $\lim_n (x_n, s_n) = \lim_n (y_n, t_n) = (x, 0)$. بـرای مقادیر به انـدازهٔ کافی بـزرگ n، (x_n, s_n) و (y_n, t_n) متعلق بـه‌مجموعـهٔ $V_x \times (-\delta_x, \delta_x)$ خـواهنـد بـود، و در چنین حـالتی $h(x_n, s_n) \neq h(y_n, t_n)$. این تناقض، لم را به اثبات می‌رساند.

مـا تصویر h_ε را بـا $V_\varepsilon(M)$ نشان می‌دهیم و آن را یـك همسایگی لـولـه‌ای[1] M می‌خـوانـیـم. همچنین می‌نـویسیم $V_\varepsilon[M] = h(M \times [-\varepsilon, \varepsilon])$.

برهان قضیه. کار را با نشان‌دادن اینکه $\mathbf{R}^m - M$ ناهمبنداست آغاز می‌کنیم. به‌طور دقیقتر، تابع هموار‌ی‌چون $\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ تعریف می کنیم به‌طوری کـه $M = \varphi^{-1}(0)$، و بـه‌ازای هـر $x \in M$، $\operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0$. دراین صورت مجموعه‌هـای باز $A = \{x \in \mathbf{R}^m;\ \varphi(x) > 0\}$ و $B = \{x \in \mathbf{R}^m;\ \varphi(x) < 0\}$ ناتهی و ازهم جدا هستند و داریـم $\mathbf{R}^m - M = A \cup B$. نحوهٔ تعریف φ به‌قرار زیر است.

فرض‌کنیم $V_{2\varepsilon}(M)$ یك همسایگی لوله‌ای M باشد. تـابع هموار $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را چـنـان می گیـریـم کـه $f(0) = 0$، $f'(t) > 0$ برای $-\varepsilon < t < \varepsilon$، $f(t) = \varepsilon$ برای $t \geqslant \varepsilon$، و $f(t) = -\varepsilon$ برای $t \leqslant -\varepsilon$.

1. tubular



هر نقطهٔ $V_{2\varepsilon}(M)$ را می‌توان به‌طور یکتایی به‌شکل $x + t \cdot v(x)$ نوشت، که در آن $x \in M$ و $|t| < 2\varepsilon$. تابع $g : V_{2\varepsilon}(M) \to \mathbf{R}$ را با $g(x + t \cdot v(x)) = f(t)$ تعریف می کنیم. دراین‌صورت g هـمـوار است، $M = g^{-1}(0)$، $g(x + t \cdot v(x)) = \varepsilon$ بـرای $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon)$، و $g(x + t \cdot v(x)) = -\varepsilon$ برای $t \in (-2\varepsilon, -\varepsilon]$.

فرض‌کنیم $X : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ میدانی برداری‌باشد که بر $V_{2\varepsilon}(M)$ برابر $\operatorname{grad} g$ ودرخارج آن صفر است. مجموعهٔ $V_\varepsilon[M]$ فشرده، و بنابراین در $\mathbf{R}^m$ بسته است. X بر هـریك از مجموعه‌های بـاز $V_{2\varepsilon}(M)$ و $\mathbf{R}^m - V_\varepsilon[M]$ هموار است (درواقع بردومی متحد بـا صفر است). پس X یك‌میدان بـرداری هموار در $\mathbf{R}^m$ است، کـه به‌وضوح شرایط انتگرالپذیـری را بـرمی آورد. بنابراین می توانیم تـابع هموار $\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ را چنان اختیار کنیم کـه $\operatorname{grad} \varphi = X$.

درصورت لزوم، بـا افزودن مقداری ثـابت به φ، می‌توان فرض کرد کـه برای هر x در $V_{2\varepsilon}(M)$، $\varphi(x) = g(x)$، زیرا $V_{2\varepsilon}(M)$ مجموعه‌ای باز وهمبند است که φ و g بر آن گرادیانهای یکسان دارند. به‌علاوه، φ برهرمؤلفهٔ همبند $\mathbf{R}^m - V_\varepsilon(M)$ ثابت است، زیرا گرادیانش در آنجا صفر است. اکنون تـوجه کنیم کـه هـرچنین مـؤلفه‌ای، $V_{2\varepsilon}(M)$ را قطع می‌کند. [بـه ازای هـر $y \notin V_{2\varepsilon}(M)$ مفروض، p را نقطه‌ای درمجموعـهٔ بستهٔ $V_\varepsilon[M]$ بگیریدکـه فاصله‌اش تا y کمترین بـاشد. قطعه خط $[y, p]$ در $\mathbf{R}^m - V_\varepsilon(M)$ (و بنابـراین درمؤلفهٔ y دراین مجموعه) قـرار می گیرد و $V_{2\varepsilon}(M)$ را درهمهٔ نقاط نزدیك به p قطع می‌کند.] در ایـن صورت $M = \varphi^{-1}(0)$، و درخـارج $V_\varepsilon(M)$ داریـم $\varphi = \pm \varepsilon$. هرگاه $x \in M$، به‌ازای cیی حقیقی خواهیم داشت $\operatorname{grad} \varphi(x) = c \cdot v(x)$، زیرا گرادیان برسطح تراز M عمود است. این نشان می‌دهد که

$$c = \langle \operatorname{grad} \varphi(x), v(x) \rangle = \frac{d}{dt}[g(x + t \cdot v(x))]_{t=0}$$

$$= f'(0) > 0$$

بنابراین، درهر نقطهٔ $x \in M$، $\operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0$.

اکنون نشان‌می‌دهیم که مجموعه‌های باز A و B که درابتدای برهان تعریف شدند، همبندنـد. درحقیقت، A شامل مجموعهٔ همبند

$P=h(M\times(0,2\varepsilon))=\{x+t\cdot v(x)\,;\,x\in M,\,0<t<2\varepsilon\}$ است. به‌علاوه، هر $y\in A$ یا در P است یا می‌توان با قطعه‌خطی چون $[y,p]\subset A$ به‌نقطهٔ $p\in P$ وصلش کرد: تنها کافی است (مانند پیش) p را نقطه‌ای درمجموعهٔ بستهٔ $h(M\times[0,\varepsilon])$ بگیریم که فاصله‌اش تا y کمترین باشد. استدلال مشابهی همبندی B را ثابت می‌کند.

سرانجام، ثابت می‌کنیم که M مرز هریك از مؤلفه‌های همبند A و B ازمجموعهٔ $\mathbf{R}^m-M$ است.

به‌ازای هر $x\in M$، نقطهٔ $x+t\cdot v(x)$ برای $0<t<\varepsilon$ به A، و برای $-\varepsilon<t<0$ به B تعلق دارد. فرض‌کنیم $fr\cdot S$ نمایانگر مرز مجموعهٔ S باشد. این مطلب نشان می‌دهد که برای هر $x\in M$، $x\in fr\cdot A\cap fr\cdot B$. ازسوی دیگر هرگاه $x\in fr\cdot A$ داریم $\varphi(x)\geqslant 0$، زیرا $x\in\bar{A}$. اما $\varphi(x)\leqslant 0$ زیرا $x\notin A$، پس $\varphi(x)=0$. یعنی $fr\cdot A\subset M$، که نتیجه می‌دهد $fr\cdot A=M$. به‌روش مشابهی خواهیم داشت $fr\cdot B=M$، و اثبات به‌انجام می‌رسد.

یادداشت. استدلالی ازهمین نوع را می‌توان هنگامی که ابررویهٔ M به‌جای فشرده بودن، تنها زیرمجموعه‌ای بسته از $\mathbf{R}^m$ فرض شود، به‌کار بست. بدین‌منظور تنها لازم است ام چنین اصلاح شود که به‌جای عدد ثابت $\varepsilon>0$، تابع پیوستهٔ مثبتی چون $\varepsilon: M\to\mathbf{R}$ بیابیم که ویژگی زیر را داشته باشد: هرگاه $x|y$ در M باشند، آنگاه برای هر $s\in(-\varepsilon(x),\varepsilon(x))$ و هر $t\in(-\varepsilon(y),\varepsilon(y))$ داشته‌باشیم $x+s\cdot v(x)|y+t\cdot v(y)$. می‌توان حتی از این‌هم فراتررفت و $\mathbf{R}^m$ را با هررویهٔ m بعدی همبند سادهٔ N که رویهٔ $m-1$ بعدی M را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای بسته دربرداشته باشد عوض کرد. در اینجا هم همان ایده به‌کار می‌رود، به‌جز اینکه نحوهٔ ساختن همسایگی‌لوله‌ای $V_\varepsilon(M)\subset N$ ظریفتر خواهد بود. (به‌جای‌قطعه خطهای‌راست می‌توان ژئودزیکها را درنظر گرفت.)

مراجع

1. H. Samelson, Orientability of Hypersurfaces in $\mathbf{R}^n$, Proc. Am. Math. Soc., 22(1969) pp. 301-302.
2. J. A. Thorpe, Elementary Topics in Differential Geometry, Springer Verlag, New York, 1979.
3. B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko, Géométrie Contemporaine, Mir, Moscow, 1979.

در صفحهٔ ۶۷ از جلد ۲ی این کتاب مهم اثباتی ۱۰ سطری از قضیهٔ فوق آمده است. این اثبات غلط است.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

• Elon L. Lima, "The Jordan-Brouwer separation theorem for smooth hypersurfaces," *Mathematical Monthly* (1) 95 (1988) 39-42.

* الون لیما، مؤسسهٔ ریاضیات محض و کاربردی، برزیل