اعداد فیبوناتچی

Febonacci Numbers
Necolai N. Vorobiev

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اشاره
در شماره‌های قبل به معرفی اعداد فیبوناتچی پرداختیم، همچنین رابطه‌های بین اعداد فیبوناتچی را بررسی کردیم، در ادامه مطلب باز هم دربارهٔ رابطه‌های بین این اعداد بحث می‌کنیم.

۱۰. باز هم می‌توان به طریقی مشابه، ویژگی‌های دیگر اعداد فیبوناتچی، از قبیل موارد بعد را به اثبات رساند.

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\dots+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}^2$$

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\dots+u_{2n}u_{2n+1}=u_{2n+1}^2-1$$

$$nu_1+(n-1)u_2+(n-2)u_3+\dots+2u_{n-1}+u_n=u_{n+4}-(n+3)$$

$$u_1+2u_2+3u_3+\dots+nu_n=nu_{n+2}-u_{n+3}+2$$

اثبات این موارد را به عنوان تمرین، به خواننده واگذار می‌کنیم.

۱۱. مجموعهٔ دیگری از اعداد، موسوم به **ضریب‌های دوجمله‌ای**[1] موجودند، که اهمیتش کم‌تر از گردایهٔ اعداد فیبوناتچی نیست.

این اعداد، همان طور که از نامشان پیداست، به صورت ضرایب توان‌های x در بسط[2] $(1+x)^n$ رخ می‌دهند؛ یعنی،

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{n}x^n \quad (11.1)$$

به طور واضح، اعداد $\binom{n}{k}$، به ازای هر عدد صحیح نامنفی n و به ازای هر عدد صحیح نامنفی k ای که از n تجاوز نکند، به گونه‌ای یکتا تعریف شده‌اند. به معادلهٔ (۱۱.۱) معمولاً به صورت فرمول دو جمله‌ای[3] ارجاع می‌شود.

آشکار می‌شود که کاربرد ضرایب دو جمله‌ای در بسیاری از استدلال‌های ریاضی مفید است. این ضرایب در بررسی ویژگی‌های اعداد فیبوناتچی نیز سودمندند.

گذشته از این، ضرایب دو جمله‌ای به طریقی مستقیم با اعداد فیبوناتچی مرتبط‌اند. در این مرحله، به ذکر بعضی از جنبه‌های اساسی این رابطه می‌پردازیم.

اما به عنوان مرحله‌ای مقدماتی، ابتدا چند ویژگی از ضرایب دو جمله‌ای را مشخص می‌کنیم.

با قرار دادن $n=1$ در (۱۱.۱) بلافاصله ملاحظه می‌کنیم که:

$$\binom{1}{0}=\binom{1}{1}=1$$

علاوه بر این، لم زیر نیز برقرار است.

لم: اگر $n\geq 1$ و $0\leq k\leq n-1$، آن‌گاه

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

اثبات: اتحاد واضح زیر را داریم:

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)$$

که با استفاده از ضرایب دو جمله‌ای، به مورد زیر می‌انجامد:

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}x+\dots+\binom{n+1}{k+1}x^{k+1}+\dots+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}$$

$$=\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\dots+\binom{n}{k}x^{k}+\binom{n}{k+1}x^{k+1}+\dots+\binom{n}{n}x^{n}\right)(1+x)$$

$$=\binom{n}{0}+\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)x+\dots+\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right)x^{k+1}+\dots$$

$$+\left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)x^{n}+\binom{n}{n}x^{n+1}$$

دو طرف راست و چپ این معادله به ازای یک چند جمله‌ای یکسان برقرار است. بنابراین ضرایب توان‌های مشابه x در چپ و راست آن، باید برابر باشند.

به ویژه نتیجه می‌شود که:

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

که همان فرمول مطلوب است.

لم اثبات شده، برای این است که ضرایب دو جمله ای را می توان به کمک فرایندی بازگشتی مشابه فرایند به کار رفته در تولید اعداد فیبوناتچی، منتهی با طبیعتی پیچیده‌تر، محاسبه کرد.

۱۲. ضرایب دو جمله‌ای را به صورت الگویی مثلثی قرار می‌دهیم و آرایهٔ زیر موسوم به مثلث پاسکال[۴] را به‌دست می‌آوریم:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$$

$$\dots$$

$$\binom{n}{0}\quad\binom{n}{1}\quad\binom{n}{2}\ \dots\ \binom{n}{n}$$

$$\dots$$

یعنی:

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

...

توضیح مفصل بعضی از ویژگی‌های اساسی مثلث پاسکال و ضرایب دو جمله‌ای تشکیل دهندهٔ آن را می‌توان در کتاب زیر یافت:

"pascal's Triangle"by V.A.Uspenski (Popular Lectures on Mathematics Series , vol. 43, Moscow: Nauka,1979)

سطرهای مثلث پاسکال را طبق رسم، از بالا به پایین و چنان بر چسب می زنیم که به سطر بالایی شامل عدد منفرد ۱ به عنوان سطر صفر اشاره شود.

از توضیحات پیشین نتیجه می‌شود که اعداد اول و آخر واقع در هر سطر مثلث پاسکال، برابر ۱ هستند و هر عدد دیگر واقع در هر سطر، با جمع دو عدد بلافاصله بالای آن به دست می‌آید.

۱۳. فرمول (۱۱.۱) این توان را می‌دهد که بلافاصله دو فرمول مهمی را استنتاج کنیم که ضرایب دو جمله ای واقع در یک سطر مثلث پاسکال را به هم مرتبط می‌کنند.

با قرار دادن $x=1$ در (۱۱.۱)، به‌دست می‌آوریم

$$2^{n}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}$$

گذشته از این، اگر قرار دهیم $x=-1$، آن گاه به‌دست می‌آوریم:

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

۱۴ . اکنون با استفاده از استقرای بر n ثابت می‌کنیم که:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.\dots.k} \qquad (12.1)$$

این فرمول، اغلب به عنوان تعریف ضرایب دو جمله‌ای به کار می رود. فرمول مورد بحث، ضریب دو جمله‌ای $\binom{n}{k}$ را به عنوان تعداد ترکیب‌های[5] n شیء، هر بار k شیء برگرفته، مشخص می‌کند.

در این جا رهیافت متفاوت صوری‌تری را اختیار کردیم؛ زیرا این رهیافت به اهداف جاری‌مان بهتر کمک می‌کند.

اگر به توافق فرض کنیم که حاصل ضرب شامل عوامل صفر همواره برابر ۱ است، آن‌گاه $k=0$، فرمول (۱۲.۱) نتیجهٔ قبلاً مشخص شده $\binom{n}{0}=1$ را به دست می‌دهد.

بنابراین، بدون از دست دادن عمومیّت کار، می‌توان در نتیجهٔ مزبور فرض کرد که $k \ge 1$.

به ازای $n=1$ داریم:

$$\binom{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

اکنون فرض می‌کنیم فرمول (۱۲.۱) به ازای n معلوم و هر $k = 0,1,\dots,n$ برقرار است.

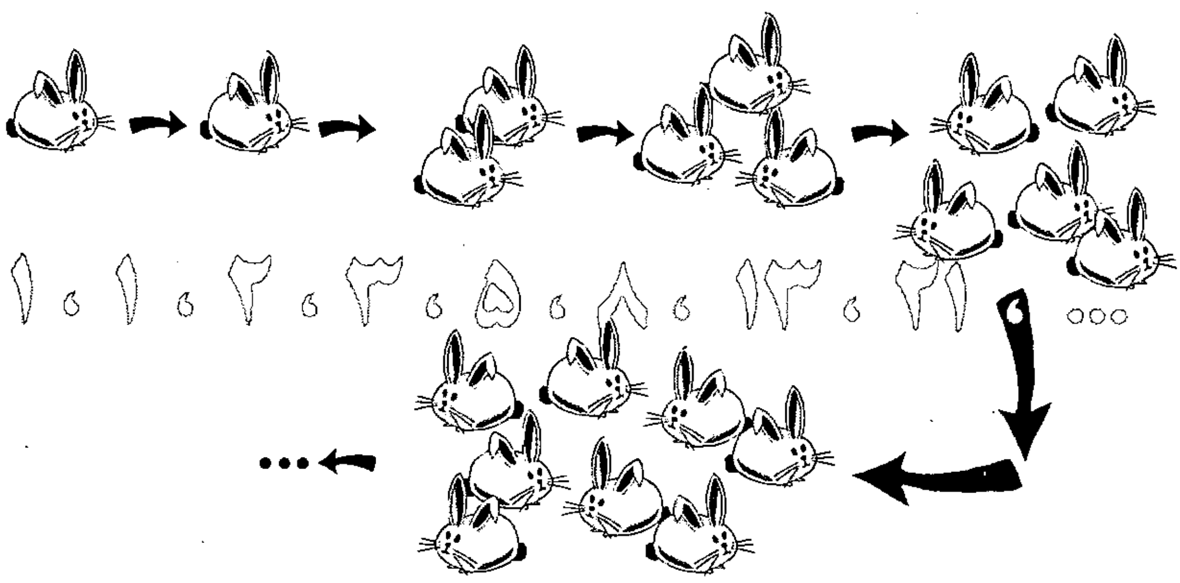
سپس توجه‌مان را به $\binom{n+1}{k}$ معطوف می‌کنیم. از آن‌جا که $k \ge 1$، می‌توان نوشت:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{k}{n}$$

فرض استقرایی (۱ . ۱۲) مستلزم این است که:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{1.2.\dots.(k-1)} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{1.2.\dots.(k-1)k}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{1.2.\dots.(k-1)}\left(1 + \frac{n-k+1}{k}\right)$$



$$=\frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{1.2\dots.(k-1)}\cdot\frac{k+n-k+1}{k}$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)}{1.2\dots.(k-1)k}=\binom{n+1}{k}$$

آنچه باقی مانده، توجه به این مطلب است که معادلهٔ اخیر، به ازای هر ضریب دو جمله ای واقع در سطر بلافاصله بعدی مثلث پاسکال، یعنی، سطر $(n+1)$ ام، به فرمول (۱۲.۱) منجر می‌شود.

۱۵. اکنون خطوط راستی از اعداد مثلث پاسکال به زاویهٔ ۴۵ درجه با سطرهای آن رسم می‌کنیم و آن‌ها را **قطرهای ناشی**[۶] از مثلث پاسکال می‌نامیم. قطرهای ناشی این چنین، به عنوان نمونه، دو خط مستقیم گذرنده از اعداد ۱، ۴ و ۳ یا ۱، ۵، ۶ و ۱ هستند.

می‌خواهیم نشان دهیم مجموع جمیع عددهای واقع در امتداد یک قطر ناشی، یک عدد فیبوناتچی است. در واقع، اولّین و بالاترین قطر ناشی، شامل عددی منفرد، یعنی ۱، است، بنابراین اولّین مجموع برابر ۱ است. قطر دوم نیز شامل یک فرد، ۱، است، بنابراین مجموع دوم نیز برابر است.

بنابراین، تمام کاری که اکنون باید برای اثبات مقصودمان انجام دهیم، نشان دادن این مطلب است که مجموع اعداد سازندهٔ قطرهای n ام و $(n+1)$ ام مثلث پاسکال، برابر مجموع جمیع اعداد واقع در امتداد قطر $(n+2)$ ام است.

برای این منظور، ملاحظه می‌کنیم که قطر n ام شامل اعداد:

$$\binom{n-1}{0},\binom{n-2}{1},\binom{n-3}{2},\dots$$

است؛ در حالی‌که قطر $(n+1)$ ام عددهای:

$$\binom{n}{0},\binom{n-1}{1},\binom{n-2}{2},\dots$$

را نمایش می‌دهد.

مجموع این اعداد را می‌توان به صورت:

$$\binom{n}{0}+\left(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}\right)+\left(\binom{n-2}{0}+\binom{n-2}{2}\right)+\dots,$$

یا با تکیه بر لم بخش ۱۱، به صورت:

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+,\dots$$

نوشت.

باقی ملاحظهٔ این مطلب است که عبارت اخیر، دقیقاً مجموع جمیع اعداد واقع در قطر ناشی $(n+2)$ ام مثلث پاسکال است.

از دستاورد به اثبات رسیدهٔ فوق و بر مبنای فرمول (۱.۱)، بلافاصله درمی‌یابیم که مجموع جمیع ضرایب دو جمله‌ای واقع بر یا بالای قطر ناشی n ام مثلث پاسکال، برابر $U_{n+2}-1$ است.

خواننده با استفاده از (۱ . ۲)، (۱ . ۳)، (۱ . ۴) یا فرمول‌های مشابه، می‌تواند بدون زحمت زیاد، تعداد قابل توجهی اتحاد دیگری به دست آورد که اعداد فیبوناتچی را به ضرایب دو جمله‌ای مرتبط می‌کنند.

۱۶. تاکنون اعداد فیبوناتچی را توسط اندیس‌هاشان با استفاده از فرایندی بازگشتی، یعنی، استقرایی، تعریف کرده‌ایم. اما آشکار می‌شود که هر عدد فیبوناتچی را می‌توان به طریقی مستقیم، به صورت تابعی صریح از اندیس‌هایش نیز تعریف کرد.

برای رسیدن به این هدف، مجموعهٔ جمیع دنباله‌های:

$$u_1,u_2,\dots,u_n,\dots$$

صادق در رابطه بازگشتی

$$u_n=u_{n-2}+u_{n-1}\quad(13.1)$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

هریک چنین دنباله‌ای را جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) می‌نامیم.

در زنجیرهٔ مورد بحث، فرض می‌کنیم V، V' و V''، به ترتیب، دنباله‌های زیر را نمایش دهند:

$$v_1,v_2,v_3,\dots$$
$$v'_1,v'_2,v'_3,\dots$$
$$v''_1,v''_2,v''_3,\dots$$

در شروع کار، ابتدا به اثبات دو لم ساده می‌پردازیم:

لم ۱ . اگر V جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) و c عددی دلخواه باشد، آن‌گاه cV ، یعنی، دنبالهٔ:

$cv_1, cv_2, cv_3, \ldots$

جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) نیز هست.

اثبات: با ضرب هر جملهٔ معادلهٔ:

$v_n = v_{n-2} + v_{n-1}$

در c ، به دست می‌آوریم:

$cv_n = cv_{n-2} + cv_{n-1}$

که نتیجهٔ مطلوب را محقق می‌کند.

لم ۲ . اگر دنباله‌های V′ و V″ جواب‌های معادلهٔ (۱ . ۱۳) باشند، آن‌گاه $v'+v''$ ، مجموعشان، یعنی، دنبالهٔ:

$v'_1 + v''_1, v'_2 + v''_2, v'_3 + v''_3, \ldots$

نیز جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) است.

اثبات: از شرط‌های بیان شده در لم‌مان، داریم:

$v'_n = v'_{n-1} + v'_{n-2}$

و

$v''_n = v''_{n-1} + v''_{n-2}$

با جمع جمله به جملهٔ این معادلات، به دست می‌آوریم:

$v'_n + v''_n = \left(v'_{n-1} - v''_{n-1}\right) + \left(v'_{n-2} + v''_{n-2}\right)$

و به این ترتیب، لم مورد نظر اثبات می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم v′ و v″ دو جواب از معادلهٔ (۱ . ۱۳) را نمایش دهند که متناسب نیستند؛ یعنی بی‌توجه به مقدار انتخابی ثابت c، اندیس nی چنان موجود باشد که $v'_n / v''_n \neq c$. دراین صورت، نشان می‌دهیم که دنبالهٔ v که جوابی از معادلهٔ (۱ . ۱۳) است، می‌تواند به صورت:

$$c_1 v' + c_2 v'' \qquad (۱ . ۱۴)$$

بیان شود، که در آن c_1 و c_2 ثابت‌هایی هستند. در این رابطه، مرسوم است که به (۱ . ۱۴) به عنوان جواب عمومی «genral solution» معادلهٔ (۱ . ۱۳) اشاره شود.

ابتدا ثابت می‌کنیم هرگاه v′ و v″، دو جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) متناسب نباشند، آن‌گاه

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} \qquad (۱ . ۱۵)$$

یعنی، دو جملهٔ اوّلیه دنباله‌های v′ و v″، متناسب بودن یا نبودن دنباله‌های مورد بحث را آشکار می‌کنند.

اثبات (۱ . ۱۵) را می‌توان با فرض نقیض مطلب انجام داد. فرض می‌کنیم دو جواب v′ و v″ معادله‌های (۱ . ۱۳) متناسب نباشند و با این‌حال، در

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} \qquad (۱ . ۱۶)$$

صدق کنند.

از (۱ . ۱۶) تناسب مستخرج:

$$\frac{v'_1 + v'_2}{v''_1 + v''_2} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

یا با در نظر گرفتن این موضوع که v′ و v″ جواب‌های معادلهٔ (۱ . ۱۳) اند،

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

را به دست می‌آوریم.

به طور مشابه وبا استدلالی استقرایی، به سادگی متقاعد می‌شویم که:

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_4}{v''_4} = \ldots = \frac{v'_n}{v''_n} = \ldots$$

به این ترتیب، از (۱ . ۱۶) نتیجه می‌گیریم که دنباله‌های v′ و v″ متناسب‌اند، که این نتیجه، درستی فرض اوّلیه‌مان را نقض می‌کند. این موضوع راستی (۱ . ۱۵) را محقق می‌کند.

زیرنویس

1.binomial coefficients
2.expansion
3.binomial formula
4.pascal's Triangles
5.Combination
6. rising diagonals