اعداد فیبوناتچی

Febonacci Numbers

Nccolai N. Vorobiev

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اشاره

در شمارهٔ قبل به معرفی اعداد فیبوناتچی پرداختیم، در ادامهٔ مطلب رابطه‌های بین اعداد فیبوناتچی را بررسی می‌کنیم:

۵. بسیاری از رابطه‌های بین اعداد فیبوناتچی را می‌توان به راحتی و با استفاده از طرحی موسوم به «روش استقرایی کامل»[1] به اثبات رساند.

طرح صوری[2] مزبور که گاهی به آن «روش استقرای ریاضی»[3] نیز گفته می‌شود، دراساس به صورت زیر است:

برای اثبات این موضوع که گزارهٔ معینی شامل اعداد طبیعی، به ازای هر عدد، درست است، کافی است که:

الف) تحقیق کنیم، گزارهٔ مزبور اگر $n=1$ درست است؛

ب) ثابت کنیم، هرگاه آن گزاره به ازای عدد طبیعی دلخواه n درست باشد، آن‌گاه به ازای $n+1$ نیز چنین است.

بنابراین، هر اثبات استقرایی[4] گزاره‌ای که طبق فرض به ازای هر عدد طبیعی، درست است، باید در دو مرحله انجام گیرد:

ابتدا باید درستی گزارهٔ مورد اثبات را به ازای $n=1$ محقق کنیم. این بخش از اثبات را که معمولاً بسیار آسان است، گاهی «پایهٔ استقرا»[5] می‌نامیم.

در بخش دوم اثبات که اصولاً پیچیده‌تر است، فرض می‌کنیم گزاره به ازای عدد دلخواه معین، اما ثابت n ی درست است. سپس از این فرض[6] که اغلب به «فرض استقرایی»[7] موسوم است، برای اثبات این مطلب استفاده می‌کنیم که گزارهٔ مورد بحث، به ازای عدد صحیح[8] بعدی $n+1$ نیز صادق است.

بخش دوم اثبات استقرایی را «مرحلهٔ استقرایی»[9] یا «انتقال استقرایی»[10] می‌نامند.

توضیح مفصل روش استقرای ریاضی و تعداد بسیاری از مثال‌های توضیح دهندهٔ کاربردهای صورت‌های گوناگون این اصل[11] را می‌توان درکتاب زیر:

«The method of Mathematical Induction»

اثر "I.S.Sominskii" یافت.

به این ترتیب، به خصوص صورتی از استقرای ریاضی که ما به‌طور مکرر در زیر از آن استفاده کرده‌ایم، درصفحهٔ ۱۳ کتاب «Sominskii» آورده و بعداً در صفحات ۲۱ و ۲۲ در مثال ۷ و در مسألهٔ ۱۲ توضیح داده شده است (این کتاب توسط پرویز شهریاری به فارسی ترجمه شده است).

این صورت خاص استقرای ریاضی با تحقیق مستقیم، به ازای $n=1$ و $n=2$ آغاز می‌شود و با مرحله استقرایی از n و $n+1$ $n+2$ ادامه می‌یابد.

گاهی می‌توانیم استقراهای ریاضی را گسترش دهیم و آن‌ها را به‌طور مختصر انتقال‌هایی «از جمیع اعداد صحیح و مثبت کم‌تراز n، به n» بنامیم.

باید توجه داشته باشیم که در چنین حالاتی به انجام اثبات خاص باید استقرا نیازی نیست، زیرا، دراین حالات به بیان صوری، اثبات به ازای $n=1$ توسط انتقال از «جمیع» اعداد صحیح و مثبت کم‌تراز ۱ که واضحاً موجود نیستند – به ۱

انجام گرفته است.

در این مرحله، تغییر روش استقرای ریاضی را با اثبات این موضوع توضیح می‌دهیم که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول[12] نوشت.

برای آغاز کار فرض می‌کنیم، هر عدد صحیح و مثبت کوچک‌تر از عدد طبیعی معین n را می‌توانی به صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول بیان کرد.

اگر n اول باشد، دراین صورت $n = n$ نمایش مطلوب را به دست می‌دهد. اگر n اول نباشد، آن‌گاه بنا به تعریف اعداد اول می‌توانیم، آن‌را به صورت حاصل ضرب دست کم دو عامل بیان کنیم؛ یعنی $n = n_1 n_2$ که در آن $n_1 \neq 1$ و $n_2 \neq 1$

از آن‌جا که $n_1 < n$ و $n_2 < n$، فرض استقرایی ایجاب می‌کند که بتوان، n_1، n_2 را به صورت حاصل ضرب‌های عوامل اول نوشت. در نتیجه، n را می‌توان به صورت حاصل ضرب عوامل اول نوشت.

سرانجام صورت‌های پیچیده‌تر استدلال‌های استقرایی[13] را در اثبات قضیهٔ ارائه شده مقاله‌های آینده، بررسی خواهیم کرد.

۶. ساده‌ترین توضیح مفهوم استقرا در ارتباط با کاربردهایی که با اعداد فیبوناتچی سروکار دارند، توطی تعریف خود این اعداد به‌دست می‌آید. این تعریف، همان‌گونه که درمقدمه اشاره کردیم، با مشخص کردن دو عدد اول فیبوناتچی، $u_1 = 1$ و $u_2 = 1$ و انتقال استقرایی از u_n و u_{n+1} به u_{n+2}، داده شده با رابطهٔ استقرایی $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$ بنا شده است.

در حالت خاص، از این تعریف به طور اتوماتیک مشخص می‌شود که هر گاه دنبالهٔ عددی معینی دارای دو جملهٔ اولیهٔ برابر ۱ باشد، و هر جملهٔ بعدی آن با جمع دو جملهٔ ما قبل آن به دست می‌آید، آن دنباله، دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی است.

مثالی که هم اکنون مورد بحث قرارمی‌دهیم، به «مسألهٔ خرگوش»[14] معروف است. این مثال را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

خرگوشی دریکی از دو جهت کوچه‌ای می‌دود که به چندین حجره تقسیم شده است. وی از هر حجره یا به حجرهٔ بعدی یا به حجرهٔ بعد از حجرهٔ بعدی می‌پرد. خرگوش مزبور روی دقیقا $n-1$ حجره، به چند روش متفاوت می‌پرد؟ به خصوص، خرگوش از حجره اول به حجره nام به چند طریق می‌تواند برود؟

در این مسأله دو گروه از پرسش‌ها را با این شرط یکسان در نظر می‌گیریم که حجره‌هایی که خرگوش به آن‌ها می‌پرد، یکسان باشند.

فرض می‌کنیم، تعداد مورد جست‌وجو x_n باشد. واضح است که $x_1 = 1$ ؛ زیرا تنها به یک روش می‌توان از حجرهٔ اول آغاز، وبه همان محل ختم کرد؛ یعنی، اصلاً هیچ پرش صورت نگرفته است.

گذشته از این، $x_2 = 1$ ؛ زیرا برای رفتن از حجرهٔ اول به دوم دقیقاً یک روش موجود است. این روش، پرسش به حجرهٔ مجاور است.

اکنون فرض می‌کنیم، خرگوش مورد بحث می‌خواهد به حجرهٔ $(n+2)$ ام برسد. تعداد روش‌هایی که با آن‌ها می‌تواند به این هدف برسد، به صورت نمادی، x_{n+2} است. اما باید ملاحظه کنیم که این x_{n+2} روش متفاوت، به دو رده[15] تقسیم می‌شوند؛ زیرا تفاوت بین آن‌ها از همان آغاز رخ می‌دهد:

خرگوش از حجرهٔ اول می‌تواند یا به حجرهٔ دوم برود، یا از روی این حجره بپرد و درحجرهٔ سوم به زمین بنشیند. از حجرهٔ دوم می‌تواند به x_{n+1} روش به حجرهٔ $(n+2)$ ام برسد، و از حجرهٔ سوم به x_n روش به حجرهٔ $(n+2)$ام می‌رسد.

به این ترتیب، مشخص کردیم که دنباله؛

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

و رابطهٔ بازگشتی:

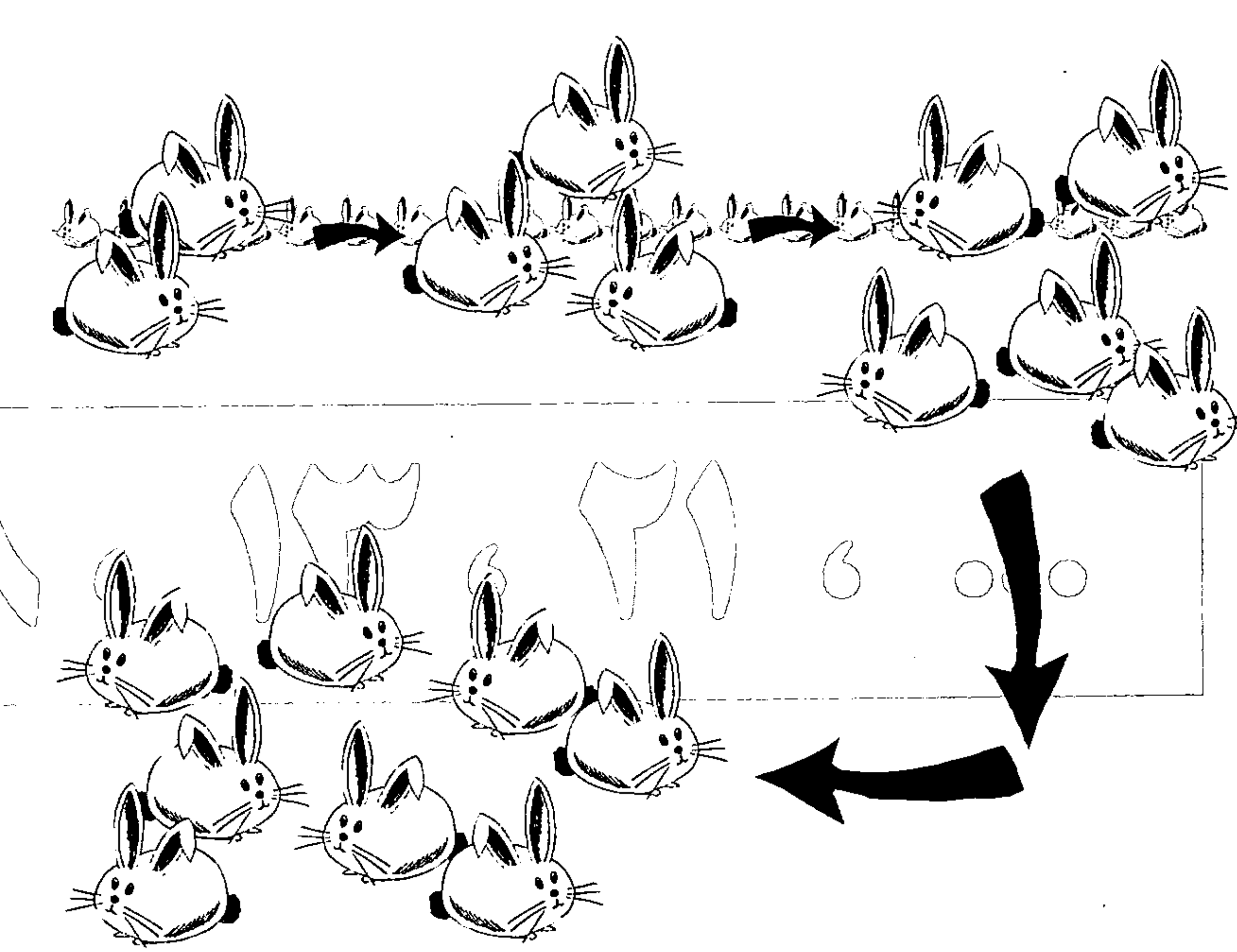
$$x_n + x_{n+1} = x_{n+2}$$

صادق است، و بنابراین باید بر دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی منطبق شود؛ یعنی:

$$x_n = u_n$$

۷. اکنون با استفاده از استقرا، به اثبات فرمول مهم زیر می‌پردازیم:

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} \qquad (۱-۸)$$



اثبات با استقرای بر m انجام می‌گیرد. به ازای $m = 1$، فرمول (۱-۸) به صورت:

$$u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_n u_2$$

در می‌آید که آشکارا درست است.

فرمول (۱-۸)، به ازای $m = 2$ نیز درست است؛ زیرا:

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1} + 2u_n = u_{n-1} = u_n + u_n + u_{n+1}u_n$$

به این ترتیب، مرحلهٔ پایهٔ استقرا به اثبات می‌رسد. مرحله استقرایی را نیز می‌توان به روش زیر اثبات کرد:

فرض می‌کنیم، فرض (۱-۸) به ازای $m = k$ و $m = k + 1$ درست است و نشان می‌دهیم، به ازای $m = k + 2$ نیز چنین است. بنابراین، فرض می‌کنیم:

$$u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1}$$

$$u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}$$

با جمع جمله به جمله دو معادله اخیر داریم:

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3}$$

و این دقیقاً همان نتیجه مطلوب است.

فرمول (۱-۸) را می‌توان به سادگی برحسب مسألهٔ خرگوش، تعبیر و حتی اثبات کرد.

به طور مشخص، همهٔ روش هایی که خرگوش می‌تواند از حجرهٔ اول به حجرهٔ $(n + m)$ ام برود، برابر $u_n + m$ است. در میان این روش‌ها، روش‌هایی را داریم که در آن‌ها، خرگوشی حجرهٔ nام را از دست می‌دهد، ونیز روش‌هایی را که در آن‌ها به این حجره می‌رسد.

دراین صورت، خرگوشی دررابطه با هر روش درردهٔ اول، باید ابتدا به حجرهٔ $(n - 1)$ ام برسد که به u_{n-1} روش متفاوت این کار را می‌کند و سپس پرسشی به حجرهٔ $(n + 1)$ ام انجام می‌دهد.

سرانجام، باید به $(n-m)-(n+1) = m-1$ حجرهٔ باقیمانده برود که این کار به u_m ممکن می‌شود. بنابراین، ردهٔ اول شامل $u_{n-1}u_m$ روش است.

به روش مشابه، خرگوش به ازای هرگروه از پرش‌هایی که به ردهٔ دوم تعلق دارند، ابتدا به حجرهٔ n ام می‌رسد که ـ u_n روش ممکن برای انجام این کار موجود است ـ و سپس دقیقاً به u_{m+1} روش به حجرهٔ $(n + m)$ ام حرکت می‌کند.

بنابراین، ردهٔ دوم شامل $u_n u_{m+1}$ روش پرسش است، و به این ترتیب، فرمول (۱-۸) به اثبات می‌رسد.

۸. با قرار دادن $m = n$ در فرمول (۱-۸) به دست می‌آوریم:

$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1}$$

یا

$$u_{2n} = u_n\left(u_{n-1} + u_{n+1}\right) \qquad (۹-۱)$$

۱، ۱، ۲، ۳، ۵

از معادلهٔ (۱-۹) آشکار است که u_{2n} بر u_n بخش‌پذیر است. درفصل بعد، گزارهٔ عمومی‌تری را اثبات خواهیم کرد. فرمول (۱-۹) از آن جا که:

$$u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$$

می‌تواند به صورت:

$$u_{2_n} = \left(u_{n+1} - u_{n-1}\right)\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right)$$

یا:

$$u_{2_n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$$

نوشته شود؛ یعنی، تفاضل مربع‌های دو عدد فیبوناتچی‌ای که اندیس‌های آن‌ها به اندازهٔ دو واحد اختلاف دارند، باز هم عددی فیبوناتچی است (که علاوه بر این، اندیسی زوج دارد).

به طور مشابه، با قرار دادن $m = 2n$ در معادلهٔ (۱-۸)، می‌توان نشان داد که:

$$u_{3_n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$$

۹. در مطلب بعد، می‌خواهیم از فرمول:

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1} \qquad (۱-۱۰)$$

استفاده کنیم. فرمول مورد بحث را با استفاده از استقرای بر n به اثبات می‌رسانیم. فرمول (۱-۱۰) به ازای $n = 2$ به صورت:

$$u_2^2 = u_1u_3 - 1$$

درمی‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم، فرمول (۱-۱۰) به ازای اندیس معین nی درست باشد. با افزودن $u_n = u_{n+1}$ به دو طرف این رابطه، به دست می‌آوریم:

$$u_n^2 + u_nu_{n+1} = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

یا

$$u_n\left(u_n + u_{n+2}\right) = u_{n+1}\left(u_{n-1} + u_n\right) + (-1)^{n+1}$$

یا:

$$u_n + u_{n+2} = u_{n+1}^2u_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

یا:

$$u_{n+1}^2 + u_nu_{n+2} + (-1)^{n+1}$$

به این ترتیب، مرحلهٔ استقرایی مسأله محقق می‌شود ودر نتیجه، فرمول (۱-۱۰) به ازای هر n به اثبات می‌رسد.

منبع

Popuar Leatures on Malhematics Series, vof.3. Mosecow:Nauka.1974.

زیر نویس

1.Method of compleate induction
2.formal scheme
3.Method of mathematical induction
4.indutive proof
5.basis of induction
6.assumptcon
7.inductive assumption
8.integer
9.inductive step
10.inductive transition
11.principle
12.prime numbers
13.inductive reasonings
14.Bunny problem
15.class