اعداد فیبوناتچی[1]

Fibonacci Numbers
Nicolai N. Vorobiev

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۱ . تاریخ اولیهٔ ریاضیات پر از شرح حال ریاضی‌دان‌های برجسته است . بسیاری از دستاوردهای ریاضیات باستان از دقت ذهن مؤلفان آن‌ها به‌دست آمده‌اند و امروزه نام‌های **اقلیدس، ارشمیدس و هرون**، برای هر فرد تحصیلکرده‌ای آشنایند .

اما زمانی که ریاضیات دورهٔ قرون وسطا را در نظر بگیرید ، این موضوع کاملاً تفاوت می‌کند . به استثنای **ویت**[2] که در قرن شانزدهم می‌زیست و غیر از ریاضیدان‌های بسیار نزدیک‌تر به دوران ما ، دوره‌های مکتب جاری ریاضیات شامل هیچ‌گونه نام مرتبط با قرون وسطا نیستند . در این عصر ریاضیات ، به آهستگی بسیار گسترش می‌یافت و تعداد بسیار اندکی ریاضیدان برجسته وجود داشت .

در این صورت ، باید بیش‌تر توجه خود را به اثر «Liber abaci» (کتابی دربارهٔ چرتکه) از ریاضیدان برجستهٔ ایتالیایی ، **لئوناردوی پیزایی**[3] معطوف کنیم که بیش‌تر به نام کنیه‌اش ، فیبوناتچی مشهور است که مختصرشدهٔ «پسر بوناتچی»[4] است .

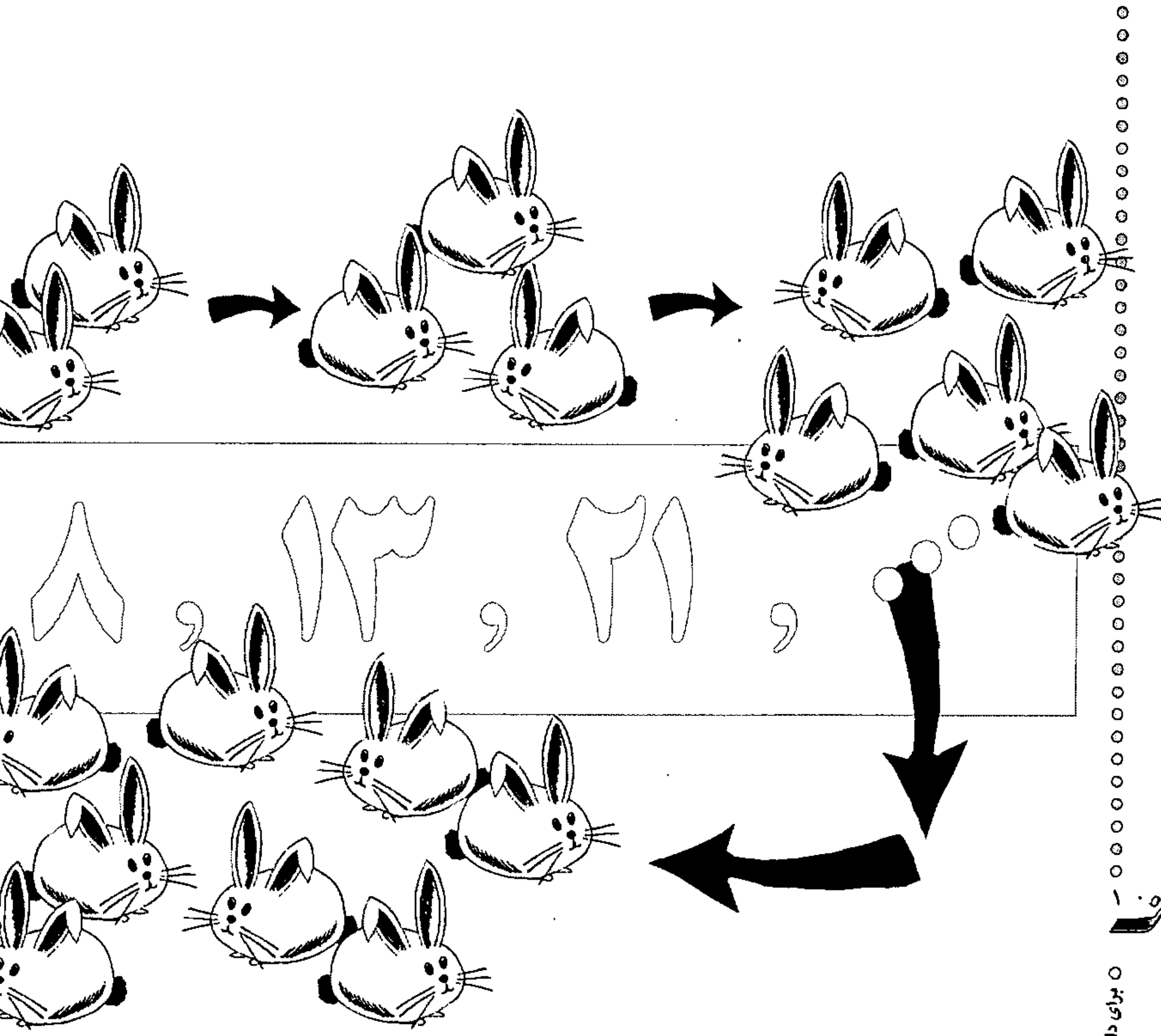
این کتاب معروف در سال ۱۲۰۲ منتشر شد و ویراستهٔ دوم آن به دست ما رسیده است ؛ ویراسته‌ای که متعلق به سال ۱۲۲۸ است . Liber abaci ، تألیف حجیمی است که تقریباً شامل جمیع معلومات حسابی و جبری آن دوره است و در توسعهٔ ریاضیات در اروپای غربی و در طول قرن‌های بعدی نقشی عظیم داشته است . به‌خصوص ، از طریق این کتاب است که اروپایی‌ها با «عددهای هندی ـ عربی»[5] آشنا شدند .

موضوعات گردآمده در کتاب توسط مسائل زیادی توضیح داده شده‌اند که قسمت اعظم این رساله را تشکیل می‌دهند . در این جا کارمان را به ارائهٔ یکی از مسأله‌های فیبوناتچی ، معروف به «مسألهٔ خرگوش»[6] محدود می‌کنیم . این مسأله را می‌توان در صفحه‌های ۱۲۳ و ۱۲۴ دست‌نوشتهٔ سال ۱۲۲۸م یافت .

«در طول یک سال ، از یک جفت خرگوش ، چند جفت خرگوش می‌توان پرورش داد؟»

شخصی یک جفت خرگوش را در محلی کاملاً محصور با دیوار ، قرار می‌دهد تا دریابد که در طول یک سال ، چند جفت خرگوش از این جفت حاصل می‌شود . طبیعت این خرگوش‌ها چنان است که در هر ماه یک‌جفت خرگوش ، جفتی دیگر به‌وجود می‌آورد و زایش خرگوش‌ها در ماه دوم بعد از تولدشان آغاز می‌شود .

از آن‌جا که جفت اول در ماه اول تولیدمثل می‌کنند ، دوبرابر می‌شوند و در یک‌ماه دوجفت خرگوش خواهیم‌داشت . از این جفت‌ها ، یکی (اولی) در ماه بعدی جفتی دیگر به‌وجود می‌آورد . به‌این‌ترتیب ، در ماه دوم ۳ جفت خرگوش حاصل می‌شود . از این سه‌جفت در یک ماه دو جفت آبستن می‌شوند . در این صورت در ماه سوم ، دوجفت دیگر تولد خواهند یافت و تعداد جفت‌ها به پنج می‌رسد . از این پنج جفت در یک‌ماه ، سه مورد بچه‌دار می‌شوند . بنابراین در ماه چهارم ۸ جفت خرگوش موجود

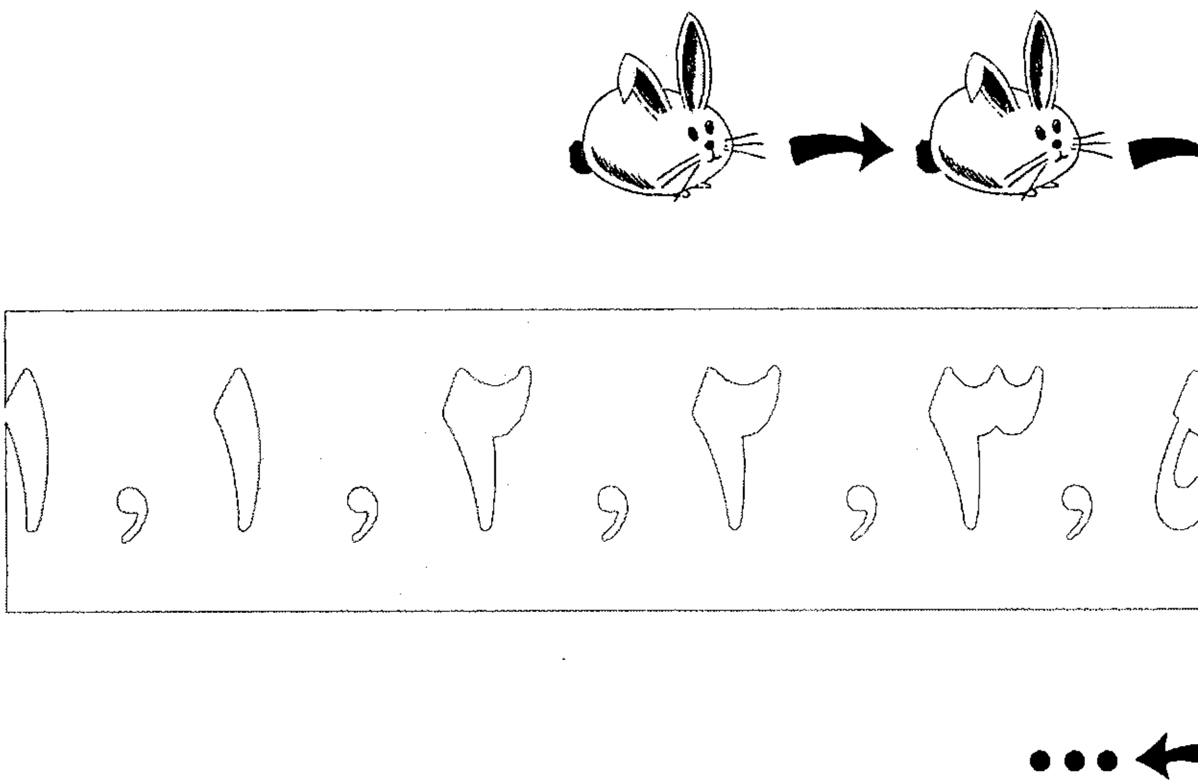


خواهند بود. از این هشت جفت، پنج مورد پنج جفت خرگوش دیگر تولید می‌کنند، که چون به هشت جفت قبلی افزوده شوند، در ماه پنجم ۱۳ جفت خرگوش خواهیم داشت.

از ۱۳ جفت مزبور، پنج مورد که در پنجمین ماه متولد شده‌اند، در این ماه آبستن نمی‌شوند، اما هشت جفت دیگر آبستن می‌شوند. به این ترتیب در ماه ششم، ۲۱ جفت خواهیم داشت. با افزودن این‌ها به ۱۳ جفتی که در ماه بعد تولد می‌یابند، ۳۴ جفت خرگوش در ماه هفتم به دست خواهیم آورد و با افزودن آن‌ها به ۲۱ جفت حاصل در ماه بعد، ۵۵ جفت در ماه هشتم خواهیم داشت.

افزودن آن‌ها به ۳۴ جفت حاصل در ماه بعد، ۸۹ جفت در ماه نهم به دست می‌دهد و افزودن این عدد به ۵۵ جفت تولد یافته در ماه بعد، ۱۴۴ جفت در ماه دهم حاصل می‌کند. آن‌گاه اضافه کردن این‌ها به ۸۹ مورد متولد شده در ماه بعد، ۲۳۳ مورد در ماه یازدهم به وجود می‌آورد. سرانجام، چون ۱۴۴ جفت متولد شده در ماه بعد را به این تعداد بیفزاییم، در ماه دوازدهم ۳۷۷ جفت خواهیم داشت. این عدد تعداد جفت‌های حاصل از جفت اول در محل مفروض در آخر یک سال است (البته با احتساب جفت اول).

در جدول صفحه ۱۱ می‌توان چگونگی انجام این محاسبات را ملاحظه کرد. با افزودن عدد اول به دوم، یعنی ۱ به ۲، دوم به سوم، سوم به چهارم، چهارم به پنجم و به همین ترتیب یکی بعد از دیگری، تا زمانی که عدد دهم به یازدهم اضافه شود، یعنی ۱۴۴ به ۲۳۳، تعداد کل جفت‌های خرگوش‌ها، یعنی ۳۷۷ به دست می‌آید. به این طریق می‌توان این کار را درباره ماه‌هایی با تعداد نامعین نیز انجام داد. (جدول صفحه بعد).



ماه	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم	یازدهم	دوازدهم
تعداد جفت‌ها	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹	۱۴۴	۲۳۳	۳۷۷

۲ . اکنون خرگوش‌ها را رها می‌کنیم و به سراغ اعداد می‌رویم و دنبالهٔ عددی:

$$u_1, u_2, \dots, u_n \qquad (1)$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن، هر جمله برابر مجموع دو جملهٔ قبل از آن است. یعنی به‌ازای هر $n > 2$:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \qquad (2)$$

در ریاضیات، اغلب با دنباله‌هایی چنین که در آن‌ها هر جمله به‌صورت تابعی از جمله‌های پیشین تعریف شده است، مواجه می‌شویم؛ دنباله‌هایی که به «دنباله‌های برگشتی»[7] موسومند.

فرایند محاسبهٔ جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ برگشتی، به «فرایند برگشتی»[8] موسوم است، و معادلهٔ ویژه‌ای که فرایند برگشتی را توصیف می‌کند، «رابطهٔ برگشتی»[9] نام دارد.[10]

اولین نکته‌ای که مایل به بیان آن هستیم، این است که رابطهٔ (۲)، به‌خودی‌خود نمی‌تواند جمله‌های دنبالهٔ (۱) را محاسبه کند؛ چرا که می‌توان بی‌نهایت دنبالهٔ عددی متفاوت و صادق در این شرط ساخت؛ مثل:

$$2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \dots,$$
$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots,$$
$$-1, -5, -6, -11, -17, \dots,$$

و غیره.

بنابراین، هرگاه یکتایی دنبالهٔ (۱) مطلوب باشد، شرط (۲) به‌طور واضح ناکافی است و باید شرط‌های اضافی دیگری را مطرح کنیم. به‌عنوان مثال، می‌توان چند جملهٔ اول دنباله را به‌دست داد. درواقع باید چند جملهٔ اولیهٔ دنبالهٔ (۱) را به‌دست داد تا محاسبهٔ جمیع جمله‌های بعدی دنباله، تنها با به‌کار بردن شرط (۲) ممکن شود.

در پاسخ به این سؤال، ملاحظه می‌کنیم که هیچ جمله‌ای

از دنبالهٔ (۱) را نمی‌توان از رابطهٔ (۲) به‌دست آورد، مگر این‌که همهٔ جمله‌های (۱)، دو جملهٔ قبلی داشته باشند. به‌عنوان مثال، اولین جملهٔ دنبالهٔ مورد بحث، اصلاً دارای جمله‌های پیشین نیست و جملهٔ دوم تنها بعد از یک جمله قرار دارد.

نتیجه می‌گیریم که برای محاسبهٔ دنباله باید علاوه بر شرط(۲)، دو جملهٔ اولیهٔ آن را نیز بدانیم. دانستن این موضوع کفایت می‌کند تا همهٔ جمله‌های دیگر دنبالهٔ (۱) را به‌دست آوریم.

درواقع، u_3 را می‌توان به‌عنوان مجموع دو جملهٔ قبلاً مشخص شدهٔ u_1 و u_2 محاسبه کرد. سپس u_4 برابر مجموع u_2 و u_3 است که قبلاً محاسبه کرده‌ایم. u_5 نیز مجموع دو جملهٔ قبلاً حساب شدهٔ u_3 و u_4 است، و به همین ترتیب، «در حالت تعدادی نامشخص از جمله‌ها» است.

به این طریق، صرفاً با گذر از دو جملهٔ متوالی به جملهٔ بلافاصله بعدی آن‌ها، می‌توانیم به هر جمله با اندیس قبلاً مشخص شده برسیم و آن را محاسبه کنیم.

۳. اکنون توجه خود را به حالت خاص و مهم دنبالهٔ (۱) با شرط (۲) معطوف می‌کنیم که در آن داریم:

$u_1 = 1,\ \ u_2 = 1$

همان‌گونه که در بالا اشاره کردیم، شرط (۲) این امکان را می‌دهد که به‌طور متوالی جمیع جمله‌های دیگر این دنباله را محاسبه کنیم. به سادگی محقق می‌شود که در این حالت، چهارده جملهٔ اولیهٔ دنباله عبارتند از اعداد:

۱،۱،۲،۳،۵،۸،۱۳،۲۱،۳۴،۵۵،۸۹،۱۴۴،۲۳۳،۳۷۷

که پیش از این در مسألهٔ خرگوش به آن‌ها برخوردیم.

دنبالهٔ (۱) هنگامی که:

$u_1 = u_2 = 1$

و رابطهٔ برگشتی توسط معادلهٔ (۲) داده شده باشد، به افتخار طراح این مسأله، به «دنبالهٔ فیبوناتچی»[11] موسوم است و جمله‌های آن «عددهای فیبوناتچی»[12] نامیده می‌شوند.

عددهای فیبوناتچی از ویژگی‌های جالب و مهم بسیاری برخوردارند که این مقاله به تحقیق و بررسی آن‌ها می‌پردازد.

ساده‌ترین ویژگی‌های عددهای فیبوناتچی

۱. این فصل را با محاسبهٔ مجموع n عدد اولیهٔ فیبوناتچی آغاز می‌کنیم. به‌ویژه قصد داریم ثابت کنیم که:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1 \qquad (1-1)$$

درواقع داریم:

$$u_1 = u_3 - u_2$$
$$u_2 = u_4 - u_3$$
$$u_3 = u_5 - u_4$$
$$\dots$$
$$u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$
$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$$

با جمع جمله به جملهٔ همهٔ این معادله‌ها داریم:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - u_2$$

کار باقی‌مانده به خاطر آوردن این نکتهٔ مهم است که:

$$u_2 = 1$$

۲. سپس نشان می‌دهیم که مجموع n عدد اولیهٔ فیبوناتچی با اندیس‌های فرد، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n} \qquad (2\text{-}1)$$

برای اثبات این فرمول، توجه می‌کنیم که:

$$u_1 = u_2$$
$$u_3 = u_4 - u_2$$
$$u_5 = u_6 - u_4$$
$$\dots$$
$$u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}$$

نتیجهٔ مطلوب با جمع جمله به جملهٔ همهٔ این معادله‌ها به‌دست می‌آید.

۳. مجموع n جملهٔ اولیهٔ عددهای فیبوناتچی با اندیس‌های زوج، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1 \qquad (3\text{-}1)$$

اثبات این رابطه چنین است: بنا به (۱ـ۱) می‌دانیم که:

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_{2n}=u_{2n+2}-1$$

از تفریق (۱ـ۲) از این معادله، نتیجهٔ

$$u_2+u_4+\dots+u_{2n}=u_{2n+2}-1-u_{2n}=u_{2n+1}-1$$

را حاصل می‌کنیم.

گذشته از این، (۱ـ۳) را جمله به جمله از (۱ـ۲) تفریق می‌کنیم. درنتیجه به‌دست می‌آوریم:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\dots+u_{2n-1}-u_{2n}=-u_{2n-1}+1 \qquad (۱ـ۴)$$

اکنون با جمع

$$u_{2n+1}=u_{2n}+u_{2n-1}$$

با هر دو طرف (۱-۴)، به‌دست می‌آوریم:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\dots-u_{2n}+u_{2n+1}=u_{2n}+1 \qquad (۱-۵)$$

با ترکیب (۱ـ۴) و (۱ـ۵) در فرمولی جداگانه، نتیجه می‌گیریم که مجموع تناوبی[13] n عدد اولیهٔ فیبوناتچی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\dots+(-1)^{n+1}u_n=(-1)^{n+1}u_{n-1}+1 \qquad (۱-۶)$$

۴. فرمول‌های (۱ـ۱) و (۱ـ۲) با جمع جمله به جملهٔ یک مجموعهٔ کامل از معادله‌های واضح، استخراج شده‌اند. در این‌جا کاربرد دیگری از این شیوه را با استفاده از اثبات دیگر فرمولی برای مجموع مربع‌های n عدد اولیهٔ فیبوناتچی به‌دست می‌دهیم. یعنی:

$$u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2=u_nu_{n+1} \qquad (۱-۷)$$

برای رسیدن به این مقصود، ملاحظه می‌کنیم که:

$$u_k u_{k+1}-u_{k-1}u_k=u_k(u_{k+1}-u_{k-1})=u_k^2$$

با جمع جمله به جملهٔ معادله‌های حاصل، یعنی:

$$u_1^2=u_1u_2$$
$$u_2^2=u_2u_3-u_1u_2$$
$$u_3^2=u_3u_4-u_2u_3$$
$$\dots$$
$$u_n^2=u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_n$$

به (۱ـ۷) خواهیم رسید.

زیرنویس

1. fibonacci
2. Viéte
3. Leonardo of Pisa
4. filius Bonacci
5. Hindu-Arabic numerals
6. Rabbit Problem
7. recurrent sequences
8. recurrence process
9. recurrence relation
۱۰. خواننده می‌تواند تفصیلات بیش‌تر مربوط به نظریهٔ عمومی دنباله‌های برگشتی را در کتاب مارکوشویچ (A. I. Marku shevich) بیابد.
11. fibonacci sequence
12. fibonacci numbers
13. alternating sum

ادب ریاضی

یکی از هدف‌های عمدهٔ کتاب‌های کمک‌آموزشی، پرداختن به این مسألهٔ مهم است که ریاضیات به کجا می‌رود؟ برای دانش‌آموز و دانشجو مسألهٔ اول این است که ریاضیات چیست؟ به این مسأله معمولاً پاسخ‌هایی، گرچه ناقص، داده می‌شود و این پاسخ‌ها را می‌توان ضمن بیانات دبیر و استاد و طی مطالب کتاب درسی دریافت. اما معمولاً، به سؤال دوم یعنی، ریاضیات به کجا می‌رود؟ پاسخی در خور داده نمی‌شود و دانشجو و دانش‌آموز ریاضیات، باید پاسخ این پرسش را در کتاب‌های کمک‌آموزشی معتبر بیابد.

در تاریخ [illegible] درباره کوشی چنین آمده است

گاووس بزرگ که همواره محزون و ترشروی بود، قسمتی از اکتشافات خود را از دیگران مخفی داشته بود و کوشی، کسی بود که توانست این اکتشافات را از نو به دست آورد و نظریهٔ ریاضی خیره کننده‌ای ارائه دهد، در آن دوران کودک چهارساله‌ای بیش نبود. پدر کوشی که در ادارهٔ پلیس رتبهٔ ستوانی داشت، مردی مقدس و جامع اطلاعات مذهبی و مادرش زنی به تمام معنی باتقوا بود و کوشی این صفت‌های فرشته‌گون را از پدر و مادر آموخت.