مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۲)

اصول جدید هندسه با نظریهٔ کامل موازیها

(اقتباس)

■ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

از مجلهٔ: QUANTOM

عموماً چنین در نظر گرفته می‌شود که نظریّه موازیها در هندسه تاکنون ناقص باقی مانده است. کوششهای بی‌فایده‌ای که از زمان اقلیدس به بعد، در دوره‌ای دو هزار ساله، انجام گرفته‌اند به این گمانم انداخت که مفاهیم مفروض، شامل حقیقتی، که اشخاص سعی در اثبات آن داشته‌اند، نیست و این مطلب را می‌توان مانند قوانین فیزیکی دیگر، تنها با استفاده از تجربه ـ فی‌المثل، با رصدهای نجومی ـ محقق کرد. سرانجام از درستی حدسم متقاعد شدم، و در حالی‌که این مسألهٔ مشکل را به‌طور کامل حل شده در نظر گرفته بودم، در سال ۱۸۲۶ مقاله‌ای راجع به این موضوع نوشتم[۱]. کاربرد این نظریّه جدید در هندسهٔ تحلیلی را می‌توان در مقالاتی تحت عنوان «راجع به اصول هندسه» «On the Elements of Geometry» چاپ شده در خلاصهٔ مذاکرات دانشگاه قازان مربوط به سالهای ۱۸۲۹ و ۱۸۳۰، نیز یافت. نتیجهٔ اصلی‌ای که من، با فرض اینکه خطوط وابسته به زوایایند، به آن رسیدم، موجودیت هندسه‌ای در مفهومی وسیعتر از آنچه که ابتدا توسط اقلیدس ارائه شده، را مجاز می‌کند. دانش مضمون در این صورت توسیع یافته را هندسهٔ انگاری نامیدم. این هندسه، شامل هندسهٔ عملی با محدودیت واقع در مفروضات معمول مورد نیاز در اندازه‌گیری واقعیش، به‌صورت حالت خاصی از آن، است. اثبات کفایت اصول جدید[۲] را در اثری، که اندکی پیش از این، در خلاصهٔ مذاکرات دانشگاه قازان به چاپ رسیده، به عهده گرفتم. در آن ایام، در حالی‌که مایل به رسیدن به این هدف، اگر نه از طریقی مستقیم، حداقل از کوتاه‌ترین مسیر قهقرایی، بودم، ترجیح می‌دادم که از طریق بنیادهای فرضی به معادلات مربوط به جمیع روابط و عبارات مربوط به هر کمیتی هندسی، اقدام کنم. و در صورتی که کشف من، فایده‌ای جز ترسیم نقصی در تز اصلی نمی‌داشته، دست کم، توجهی که به‌طور دائم به این موضوع مبذول می‌شده، وادارم می‌کند که شرحی مستوفا ارائه دهم. در این‌صورت کار را با بررسی نظریّه‌های قبلی آغاز می‌کنم.

به‌سادگی اثبات می‌شود که دو خط مستقیم، متمایل با زاویه‌ای یکسان نسبت به خط سوم، از آن‌جا که بدین‌ترتیب، بر یک خط عمودند، هیچ‌گاه تلاقی نمی‌کنند. در مقابل، اقلیدس بر این فرض بود، دو خط به‌طور نامساوی متمایل نسبت به خط سوم، باید همواره متقاطع شوند. اشخاص به‌خاطر متقاعد شدن در مورد درستی گزارهٔ اخیر، از وسایل متفاوتی، از قبیل کوشش پیشاپیش در یافتن مجموع زوایای مثلث، یا مقایسهٔ صفحات نامتناهی در دهانه‌های زوایای مورد بحث و بین عمودها[۳]، یا مجاز شمردن وابستگی زوایا تنها به مقدار اضلاع[۴]، یا، سرانجام، دادن ویژگیهای جدیدی، علاوه بر تعریف خط راست، به آن، استفاده به عمل آوردند. گرچه بعضی از براهین مزبور را می‌توان زیرکانه نامید، اما جمیع آنها نادرستند ـ ناکافی در اساس و فاقد دقت مطلوب ـ؛ برهانی در میان آنها وجود ندارد که، با ترکیب کردن سادگی و قاطعیت؛ بتواند به مبتدیان معرفی شود.

لژاندر، در سال ۱۸۰۰، سومین پرداختهٔ هندسه‌اش را، که در آن این قضیّه را که مجموع زوایای واقع در هر مثلث نمی‌تواند بیشتر از π ـ یعنی، دو زاویهٔ قائمه ـ باشد نتیجه گرفته بود، به چاپ رساند. در آن‌جا این را نیز به اثبات رسانده بود که مجموع زوایای مذکور نمی‌توانند کمتر از π باشند، اما او از این واقعیت غفلت کرده بود که خطوط مزبور می‌توانند از یکدیگر، بدون تشکیل مثلثی، بگذرند و در این‌صورت اندازهٔ مجموع زوایای مورد بحث، مستخرج از روش دیگر، نوعی یاوه می‌شود. بنا به همین علت است که لازم نمی‌دانم وارد تفصیلات خطایی شوم که خود لژاندر آن را با گفتن اینکه، در

حالی که مبناهای انتخاب شده جای اعتراض ندارند پذیرفته است، با بعضی از موانعی که توانسته بر آنها غالب آید مواجه شده است. لژاندر در *Compte rendus* آکادمی فرانسه در ۱۸۳۳ این قضیّه را اضافه کرده که مجموع زوایای مزبور، در صورتی که در مثلثی π باشد، باید در جمیع مثلثها π باشد. برایم لازم بوده که همین مطلب را در نظریّه‌ای، که در حدود ۱۸۲۶ نوشتم، ثابت کنم. حتی تصور می‌کنم که لژاندر چندین بار خود را بر همان مسیری که من با چنان توفیق اختیار کرده‌ام یافته است؛ اما شک نیست که طرفداری تعصب‌آمیز از مفروضات عموماً پذیرفته شده، به‌طور مداوم او را وادار به گرفتن نتیجه‌ای یا پر کردن رخنه‌های حاصل به طریقی که حتی با فرض جدید ناپذیرفتنی بوده، ساخته است...

اندیشهٔ قبول این مفهوم که زوایای مثلث باید به مقدار اضلاع بستگی داشته باشند، به عنوان اساس نظریّه موازیها پدیدار شد. در نظر اوّل چنین فرضی به اندازهٔ لازم بودنش ساده می‌نماید؛ اما چون در مفاهیممان غور کنیم و دریابیم که بر مبنای چه بنا شده‌اند، آنگاه وادار خواهیم شد که آنها را به همان اندازهٔ جمیع موارد دیگری که قبلاً در اختیار داشته‌ایم، دلخواه بنامیم. در طبیعت، به‌طور مستقیم، تنها حرکت را، که بدون آن نمی‌توان هیچ چیز را از طریق حواس درک کرد، درمی‌یابیم. بنابراین جمیع مفاهیم دیگر ـ و فی‌المثل، مفاهیم هندسی ـ توسط ذهنمان و به گونه‌ای مصنوعی ایجاد و به‌صورت جنبه‌هایی از حرکت در نظر گرفته شده‌اند؛ بنابراین، فضا به خودی خود، و به‌طور جداگانه، برایمان وجود ندارد. بنابراین، هنگامی که فرض می‌کنیم، بعضی از نیروهای واقع در طبیعت از یک هندسه و نیروهای دیگر از هندسهٔ خاص خودشان پیروی می‌کنند، تناقضی در ذهنمان پدید نمی‌آید.[5] برای واضحتر کردن ایدهٔ مورد بحث، فرض می‌کنیم که، چنان که غالب مردم عقیده دارند، نیروهای جاذبه چون در امتداد کره‌ای انتشار یابند، ضعیف شوند. در هندسه عملی مساحت کره، به ازای نیم‌قطر r، به‌صورت $4\pi r^2$ در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نیروی مورد بحث باید در مقدار، به‌صورت معکوس مربع فاصله کاهش یابد. در هندسهٔ انگاری‌ای که بنا می‌نهم رویهٔ کره

$$\pi(e^r - e^{-r})^2$$

است، و ممکن است چنین باشد که نیروهای مولکولی‌ای که اختلافشان وابسته به عدد e (همواره بی‌نهایت بزرگ) است، از هندسه‌ای چنین تبعیت کنند[6]. ...

اگر قرار باشد که مسألهٔ مشکل توازی از لحاظ تجربی حل شود، در این صورت، باید بدون هیچ شکی روش طرح شده توسط لژاندر ـ شش بار قرار دادن یک نیم‌قطر حول یک دایره ـ ناکافی در نظر گرفته شود. در اصول هندسه «*Elements of Geometry*» ام، با استفاده از رصدهای نجومی، ثابت کرده‌ام که در مثلثی، با اضلاع به بزرگی فاصلهٔ زمین از خورشید، مجموع زوایای داخلی نمی‌تواند از دو زاویهٔ قائمه به اندازه‌ای بیش از ۰/۰۰۰۰۰۳ ثانیه از یک درجه اختلاف داشته باشد. اختلاف مزبور از لحاظ هندسی با اضلاع مثلث مورد بحث تغییر می‌کند، و بنابراین هندسهٔ عملی قبلاً به کار رفته، همان گونه که پیش از این هم متذکر شدم، چیزی بیش از کافی برای اندازه‌گیریهای واقعی است. شخص می‌تواند به چنین نتیجه‌ای، با استفاده از قضایایی که به قدر کفایت ساده و با اساس این دانش سازگارند، برسد، گرچه نظریّه‌ای کامل بر این خواست است که توالی مسیر تعلیم تغییر یابد و مثلثات به آن افزوده شود.

از کم‌آمدهای نظریّهٔ موازیها تعریف خود توازی است. اما کم‌آمد مزبور، برخلاف گمان نابه‌جای لژاندر، به هیچ وجه، نه به هر گونه نقصی در تعریف خط، نه بر نقصهایی که ـ خود افزوده‌ام و ـ در مفاهیم اوّلیّه پنهان‌اند و من در صدد خاطرنشان کردن و در حد توانایی، تصحیح‌شان هستم، وابسته‌اند.

معمولاً شخص هندسه را با دادن سه کشیدگی به اجسام، دو کشیدگی به رویه‌ها، یک کشیدگی به خطوط، و هیچ کشیدگی به نقطه آغاز می‌کند. اشخاص، با طول، عرض، و ارتفاع نامیدن سه کشیدگی مزبور، و به معنی سه مختص در نظر گرفتن این اسامی، در انتقال این مفهوم نابهنگام با کلماتی که زبان روزمره به آنها معنی معینی می‌دهد که برای علوم دقیقه غیرقطعی است، تعجیل روا می‌دارند. در واقع، چگونه شخص می‌تواند بدون دانستن اینکه خط مستقیم چیست، اندازه‌گیری طول را تصور کند[7]؟ وچگونه شخص می‌تواند بدون اینکه پیشاپیش سخنی در مورد عمودها، یا صفحات، یا در مورد عمودهای در یک صفحه و در صفحات مختلف، گفته باشد، چیزی در مورد عرض یا ارتفاع بیان کند؟ سرانجام، در صورتی که در نقطه به هیچ وجه کشیدگی‌ای موجود نیست، آن وقت چه چیزی در آن باقی می‌ماند تا نقطه را موضوع بررسی قرار دهد؟ بگذارید چنین تقریر کنیم که هر آدمی به گونه‌ای آشکار خط مستقیم را به تصور در می‌آورد، بدون اینکه توضیحی در مورد چگونگی آن دهد؛ اما اکنون، شخص با به کار بردن خط مستقیم، چگونه به کار تخصیص دادن یک کشیدگی به خط خمیده و دو کشیدگی به رویهٔ خمیده می‌پردازد؟

سخنی درست است که لزومی ندارد بخواهیم تا طول، عرض، و

ارتفاع دو به دو متعامد باشند: کافی است که آنها را به صورت خطوطی در سوهای مختلف در نظر بگیریم. اما این حالت، مشکلات خاص خود را به همراه می‌آورد. با حفظ این قاعده که از مفاهیمی که باید بعداً مطرح شوند استفادهٔ پیشاپیش نکنیم، این سؤال پیش می‌آید: چگونه باید این خواسته را که سه بعد اجسام به سه خط راست واقع در صفحات مختلف متعلق باشند، بیان کنیم؟ به علاوه، سوهای متفاوت دو پاره‌خط، از نقطه‌ای که خط در آن می‌شکند، نباید با کشیدگی دوگانهٔ واقع در صفحه اشتباه شود. و سرانجام، چگونه باید به گونه‌ای کفایت‌آمیز، آنچه را که از «سو» یا «زاویه» مقصود داریم، تعریف کنیم؟ در مجموع: فضا، کشیدگی، مکان، جسم، رویه، خط، نقطه، سو، و زاویه کلماتی‌اند که هندسه با آنها آغاز می‌شود، اما هیچ‌گاه درکی واضح با آنها همراه نبوده است.

اما، ممکن است که جمیع این اشیا از جهتی دیگر نظر بیفکنیم. در این‌جا شخص باید به خاطر داشته باشد که ابهام موجود در این مفاهیم به علت تجریدی است که، چون آنها را در اندازه‌گیریهای واقعی به کار بریم، زائد می‌شود. و، بنابراین، به دلایلی که مناسبت نداشته‌اند داخل نظریه شده‌اند. رویه‌ها، خطوط، و نقاط، چنان که در هندسه تعریف شده‌اند، تنها در تصورمان موجودند، اما هنگامی که اندازه‌گیریهای واقعی رویه‌ها و خطوط را انجام می‌دهیم، از اجسام استفاده می‌کنیم. به این علت است که باید دربارهٔ رویه‌ها، خطوط، و نقاط تنها آن‌گونه که در اندازه‌گیریهای واقعی دانسته می‌شود، سخن گوییم، و در این صورت می‌توانیم مفاهیمی را نگه داریم که در ذهنمان به‌طور مستقیم با مفهوم اجسام در ارتباطند، و تصورمان با آنها خو کرده است، و می‌توانیم در طبیعت به‌طور مستقیم و بدون در بر گرفتن سایر مفاهیمی که مصنوعی و بیگانه‌اند، محققشان کنیم. اما علم مورد بحث، با مفاهیم جدید مزبور، از همان ابتدا مسیر تازه‌ای به دست می‌آورد که از آن تا زمانی که به هندسهٔ تحلیلی حرکت کند، پیروی می‌کند. بنابراین روش آموزش جنبه‌ای کاملاً متفاوت به خود می‌گیرد. و من بر این جهدم که توضیح دهم که این تبدیل چه نوع تبدیلی است.

دو رهیافت در ریاضیات موجودند: تحلیل و ترکیب. جنبهٔ متمایزکنندهٔ تحلیل عبارت از معادلاتی است که به عنوان اوّلین اساس هر اظهار به کار می‌رود و به جمیع نتایج منجر می‌شود. ترکیب، یا روش ترسیم، آن نمایشی را می‌خواهد که در ذهنمان به‌طور مستقیم با اوّلین مفاهیم (یعنی، مفاهیم اساسی) مرتبط است. فایدهٔ اصلی تحلیل این است که، با شروع از معادلات، شخص همواره به‌طور مستقیم به‌سوی هدف در نظر گرفته شده حرکت می‌کند. ترکیب تابع هیچ قاعدهٔ کلی‌ای نیست، اما شخص لزوماً باید از ترکیب، در حالی که معادله‌ای به دست آورده، برای رسیدن به خط مرزی آغاز کند که پس از آن همه چیز به‌سوی دانش اعداد رو می‌آورد. به عنوان مثال، شخص در هندسه اثبات می‌کند که دو خط عمود تقاطع نمی‌کنند؛ یا اگر بعضی از اجزای مثلثها مساوی باشند، آنگاه آن مثلثها مساوی می‌شوند. اما سعی در بررسی تحلیلی حالاتی چنین، یا کل نظریهٔ موازیها بی‌فایده است. رهیافتی چنین، هیچ‌گاه موفقیت‌آمیز نخواهد بود، درست همان‌گونه که شخص نمی‌تواند در اندازه‌گیری صفحات با خطوط راست مشخص شده، یا در اندازه‌گیری اجسام با صفحات مشخص شده، از ترکیب اجتناب کند. این موضوع اثبات می‌کند که در ترکیب شخص باید برای کمک به تحلیل رو آورد؛ با وجود این، مسلم است که تحلیل هیچ‌گاه نمی‌تواند تنها وسیله در اساسیات هندسه و مکانیک باشد. هندسه تا اندازه‌ای، همواره شامل چیزی مطلقاً هندسی است که نمی‌تواند از آن جدا شود. شخص می‌تواند برد ترکیب راتحدید کند، اما حذف کامل آن غیرممکن است. اما حتی در کوشش برای قرار دادن تحلیل به جای ترکیب، شخص نبایستی تا آن اندازه عجول باشد که هر دفعه، زمانی که تنها امکان داشته باشد که یک وابستگی را بی‌دانستن آن‌که شامل چیست، و به کنار از چگونگی بیان کردنش، پیش‌بینی کند، به معرفی توابع بپردازد. باتحدید بر تحلیل فوق، هدف درست و مکان صحیح را برای روش دیگری مشخص می‌کنیم که دانش مورد بحث را صرفاً بر چنان مفاهیمی بنیاد می‌نهد، که عمل برهان با استفاده از آن، جمیع موارد دیگر را، با استنتاج داده‌های جدید از داده‌های اصلی و با وسیع کردن حدود معرفت به گونه‌ای نامتناهی و در تمام جهات، استخراج می‌کند. داده‌های اصلی مورد بحث، بدون شک مفاهیمی هستند که در طبیعت از طریق حواسمان به دست می‌آوریم، و ذهنمان می‌تواند و باید آنها را به کمترین تعداد، چنان که بتوانند به عنوان بنیانی استوار به خدمت دانش درآیند، تحویل کند. اما معمولاً کسی رهیافت ترکیبی از این دست را، با تبعیت از جمیع قواعد مذکور در این‌جا، پیروی نمی‌کند؛ مردم ترجیح می‌دهند که تحلیل را حتی اگر نابه‌هنگام باشد، بپذیرند، و توسعهٔ البته ناکامل، مفاهیمی را پذیرا شوند که ذهن طبیعیمان را می‌سازند و نیاز به داشتن نامهایی دارند، و این کار را بدون وارد شدن به توضیحات بسیار و دردسر کشیدن از دقیق شدن تعریف آنها انجام می‌دهند. اما اگر سهولت و سادگی وادارمان می‌کند که چنان روش تعلیمی را اختیار کنیم، حقیقت متین و استوار همواره مزیت خود را که

گه‌گاه به کار بردنش ضروری است، دارد.

یادداشتها:

۱. اوّلین صورت هندسهٔ لُباچِوْسْکی در سال ۱۸۲۳ تکمیل شد، اما اولیای دانشگاه قازان اجازهٔ نشر آن را ندادند. در بیست و سوم فوریهٔ ۱۸۲۶، لباچوسکی گزارشی تحت عنوان «بیانیهٔ مختصری راجع به اصول هندسه همراه با اثبات دقیق قضیهٔ مربوط موازیها» «A Brief Statement of the Elements of Geometry with a Rigorous Proof of the Theorem on Parallels» در جلسهٔ دپارتمان فیزیک و ریاضی ارائه داد، اما این گزارش نیز به چاپ نرسید. تنها در سال ۱۸۲۹ بود که اثری که اقتباس این مقاله از آن است، در خلاصهٔ مذاکرات دانشگاه قازان «*Proceedings of Kazan University*» چاپ شد.

۲. در این‌جا «ابتداها»، همان‌گونه که از یونانی اقلیدس به انگلیسی ترجمه شد، به‌صورت «اصول» به ترجمه آمده است؛ در جاهای دیگر، هر جا که زمینهٔ بحث اقتضا کند، آن را به صورت «بنیادها» ترجمه کرده‌ایم.

۳. «perpendicule» که صورت قدیمیتر عبارت «perpendiculr» است.

۴. مقدار ضلع «content of a side» در این‌جا به معنی طول ضلع به کار رفته است.

* نشریه‌ای که در آن شرح و معرفی کتابهاست.

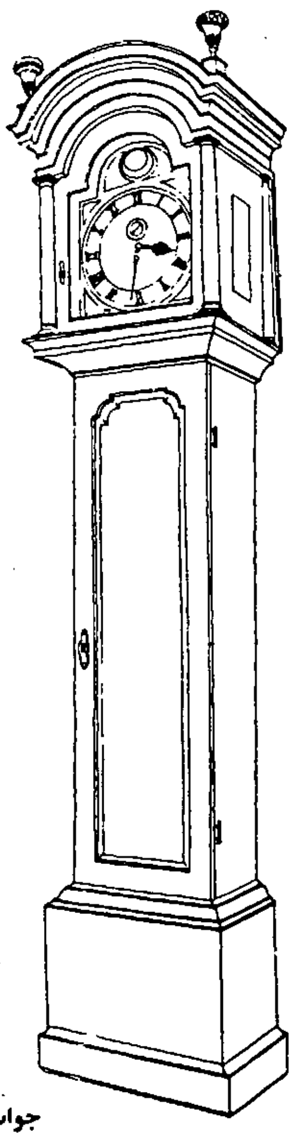
۵. این کلمات را می‌توان به‌عنوان پیشگویی در نظر گرفت: چنان‌که اکنون بخوبی آشکار شده، فضای ذرات نسبیتی ـ یعنی، ذرات متحرک با سرعتی نزدیک بسرعت نور ـ از احکام هندسهٔ لُباچِوْسْکی تبعیت می‌کنند.

۶. در این‌جا لُباچِوْسْکی حرف e را برای نمایش مبنای دستگاه لگاریتمهای طبیعی به کار نمی‌برد، بلکه، e عددی است که، توسط فرمول r= ۱ lne، با دایره‌ای به شعاع r مربوط است.

۷. نواقص تعریف «ساده‌لوحانهٔ» اقلیدسی («خط طولی است بدون پهنا»، و غیره) از مدتها پیش مشخص شده بودند. انتقادهای سازندهٔ آغاز قرن بیستم در میان مطالب بسیار دیگر، موضوعات غیرمتعارفی چون خم پئانو را، که از جمیع نقاط یک مربع می‌گذرد، و خمهایی را که در هیچ جا مشتق‌پذیر نیستند، مطرح کرد.

تفریح اندیشه ۴

برای این که یک ساعت دیواری سه ضربه بزند چهار ثانیه لازم دارد. برای این‌که ساعت مزبور ۹ ضربه بزند به چه مدت نیاز دارد؟



جواب در صفحهٔ ۸۸