• سید محمدرضا هاشمی موسوی
www.primenumbersformula.com

اصل خوش ترتیبی - استقرای ریاضی

آشنایی با نظریهٔ اعداد

نظریهٔ اعداد، یکی از شاخه‌های زیبا و جالب ریاضی است که ریشه در تاریخ بشر دارد و به دلیل زیبایی و کارایی همواره مورد علاقه بوده است. پیشرفت‌های علوم دیگر مانند رایانه و رمزنگاری که تکیه بر نظریهٔ مقدماتی اعداد دارند، به شادابی و زنده بودن این شاخه از دانش بشری کمک کرده‌اند.

نظریهٔ اعداد، شامل موضوع هایی در ریاضیات است که توانسته توجه بشر را برای هزاران سال به خود جلب کند. در این شاخه از ریاضیات، به مسأله‌ها، قضیه‌ها و برهان‌هایی برمی‌خوریم که بیش از دو هزار سال قدمت دارند. برای مثال، در حدود سال ۳۰۰ قبل از میلاد مسیح(ع)، اقلیدس برهانی مقدماتی و ساده برای اثبات بی‌نهایت بودن اعداد اول ارایه داد. مسأله‌هایی نیز طرح شده‌اند که چند صد سال، عدهٔ کثیری از علاقه‌مندان و ریاضیدانان را به خود مشغول داشته و باعث پیدایش شاخه‌هایی جدید و نظریه‌های بدیع شده‌اند.

امروزه نظریهٔ اعداد، آن‌چنان وسعت یافته که تقریباً در تمام شاخه‌های ریاضی رخنه کرده و حتی توانسته در علوم غیرریاضی همچون رایانه، کاربرد بسیار داشته باشد. همچنین

در این شاخه از ریاضیات، مسأله های لاینحل بسیاری وجود دارد که تا به امروز انسان به حل آن نزدیک هم نشده است. یکی از مسأله هایی که حدود ۳۵۰ سال دوام آورد، قضیهٔ بزرگ فرما بود که بالأخره در سال ۱۹۹۴ میلادی به توسط اندرو وایلز در بیش از ۲۰۰ صفحه به اثبات رسید و این، اثری بسیار عظیم در ریاضیات قرن بیستم گذاشت. اما از این موفقیت، بسیاری ناخرسند شدند؛ زیرا قضیهٔ بزرگ فرما که سال های سال انگیزه ای برای ارایهٔ نظریه های جدید ریاضیات بود، از میان رفت.

می دانیم اعداد صحیح و به خصوص اعداد صحیح مثبت (طبیعی) و قاعده های مربوط به حساب آن ها، جزو قدیمی ترین و پایه ای ترین فراورده های تفکر بشری محسوب می شود و انسان ها در تمدن های باستانی، به اهمیت و ضرورت شمارش برای مقاصدی چون داد و ستد، اندازه گیری طول و مساحت زمین ها و ساختمان ها، تعیین وقت و غیره پی بردند و تقریباً پنج هزار سال پیش، چینی ها و مصری ها به طور منظم حساب و شمارش را در زندگی روزمرهٔ خود به کار می بردند.

نظریهٔ اعداد، شاخه ای از ریاضیات است که بیشتر به خواص اعداد طبیعی:

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

می پردازد. در مورد چگونگی به وجود آمدن اعداد طبیعی، اطلاع درستی در دست نیست. اما شواهدی وجود دارند که نشان می دهند بشر اولیه اعداد طبیعی را برای شمارش مورد استفاده قرار داده است و به تدریج روش هایی را برای نمایش اعداد و انجام محاسبات ابداع کرده است.

اگر به صورتی ساده، ولی کلی بخواهیم این علم را توصیف کنیم، باید بگوییم که نظریهٔ اعداد، شاخه ای از ریاضیات است که به مطالعهٔ اعداد و خواص آنها می پردازد، که البته منظور اعداد صحیح، یعنی ... و ۲ و ۱ و ۰ و ۱- و ۲- و... و در حالت خاص اعداد طبیعی و در حالتی خاص تر، اعداد اول است:

$2, 3, 5, 7, \ldots$

نظریهٔ اعداد به روش های بسیار جالب توانسته است در طراحی الگوریتم های بسیاری سودمند و مؤثر باشد. در این راستا می توان از حساب کامپیوتری نام برد که روش ها و الگوریتم های محاسباتی بسیاری در دههٔ گذشته کشف شده است.

موضوع های قابل توجه و جذاب همچون اعداد اول، قضیهٔ اساسی حساب، بخش پذیری و تجزیهٔ اعداد بزرگ، تشخیص اعداد اول بسیار بزرگ، معادله و دستگاه های سیال (مانند معادله مربوط به قضیهٔ بزرگ فرما)، همیشه از زمان های قدیم تاکنون، ریاضیدانان بسیاری را به خود مشغول داشته که در این راستا ریاضیدانان بزرگی همچون فرما دچار اشتباهاتی شده اند که امروزه حتی بر دانش آموزان دبیرستانی نیز آشکار است.

در اوایل قرن نوزدهم، کارل فردریش گاوس، ریاضیدان بزرگ آلمانی، با بیان هم نهشتی ها توانست راهی نو را برای حل بسیاری از مسأله های نظریهٔ اعداد نشان دهد و درواقع راهگشای حل مشکلات فراوان شود. هم نهشتی ها کاربردهای بسیاری در دانش کامپیوتر، از جمله حساب با اعداد صحیح بزرگ، رمزنگاری، فایل حافظهٔ کامپیوتر و ایجاد اعداد شبه تصادفی دارد.

یکی از اساسی ترین و مهم ترین مباحث نظریه اعداد، مبحث مربوط به **اعداد اول** و قضیه ها و احکام آن است.[1] این اعداد درواقع سنگ بنای شالودهٔ نظریهٔ اعداد را تشکیل می دهند و شاید از بحث انگیزترین و به نوعی جالب ترین اعداد طبیعی اند. اعدادی که تعدادشان بی نهایت است و ممکن است مسأله های بسیاری در رابطه با این اعداد طرح شود که حل آنها

نیاز به سال‌ها تفکر و مطالعه و پژوهش داشته باشد.

د و مسأله که از ابتدا مورد بحث بوده است، یکی یافتن قاعده یا قانونی برای تولید اعداد اول و دیگر چگونگی توزیع آنها بین اعداد طبیعی است. شاید این اعداد را به خاطر این اول می‌نامند که هم اعدادی ساده (از نظر تجزیه) و هم زیربنایی (از نظر تجزیهٔ بقیه اعداد طبیعی به جز یک، به حاصل ضرب آنها) هستند. کار بر روی اعداد، هیچ پیشنیازی نمی‌خواهد، به همین علت برای همه کس قابل فهم و بسیار سرگرم کننده است. توصیف نظریه اعداد را از زبان یکی از ریاضیدانان مشهور انگلیس «هاردی» می‌آوریم:

«نظریه مقدماتی اعداد، باید یکی از مهم‌ترین موضوع‌ها برای تعلیم اولیه ریاضیات باشد. چندان اطلاع قبلی نمی‌خواهد و موضوعش ملموس و مأنوس است. طریقه‌های استدلالی که به کار می‌گیرد، ساده، کلی و تعدادشان کم است و از لحاظ تحریک کنجکاوی طبیعی آدمی، در علوم ریاضی مانند ندارد. یک ماه تعلیم فهیمانه در نظریه اعداد، دو بار آموزنده‌تر، دو بار مفیدتر و حداقل ده بار سرگرم‌کننده‌تر از همان مدت تعلیم حسابان برای مهندسان است.»

برخی از اصول بنیادی نظریه اعداد

پیش از بیان اصول بنیادی نظریهٔ اعداد، به معرفی چند مجموعهٔ اصلی می‌پردازیم.

دنبالهٔ اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شود و هر عضو دیگر آن، با افزودن یک واحد به عدد قبلی به دست می‌آید. با مجموعهٔ اعداد طبیعی:

$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$

و عمل‌های جمع و ضرب آنها و با ویژگی‌های این دو عمل اصلی و نیز با عمل تفریق روی مجموعه اعداد صحیح:

$Z = \{\cdots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots\}$

آشنا شده‌اید.

همچنین هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ مثل P که هیچ مقسوم‌علیه مثبتی جز P و ۱ نداشته باشد، عدد اول است. مجموعهٔ اعداد اول را با $\mathbb{P}$ نمایش می‌دهیم:

$\mathbb{P} = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, \cdots\}$

با کمی دقت، ملاحظه می‌شود که تمام اعداد صحیح مثبت را می‌توان از راه جمع کردن تعداد مناسبی ۱، تولید کرد:

$۱ = ۱,\ ۲ = ۱+۱,\ ۳ = ۱+۱+۱,\ ۴ = ۱+۱+۱+۱,\ \cdots$

اگر به مجموعهٔ تولید شده توسط واحد، قرینه‌های آنها و عدد صفر را هم اضافه کنیم، مجموعهٔ اعداد صحیح، یعنی Z به وجود می‌آید.

حال که Z (مجموعهٔ اعداد صحیح) را توانستیم تولید کنیم، آمادهٔ بررسی خواص و اصول بنیادی اعضای این مجموعه می‌شویم.

تعریف عضو ابتدا و انتهای یک مجموعه

اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ و ($\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی)، در این صورت a عضو ابتدا نامیده می‌شود؛ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \text{(I)}\ \ a \in A \\ \text{(II)}\ \ \forall x \in A \Rightarrow a \le x \end{cases}$$

به همین ترتیب، عدد b عضو انتهاست؛ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \text{(I)}\ \ b \in A \\ \text{(II)}\ \ \forall y \in A \Rightarrow y \le b \end{cases}$$

توجه: شرط اول برای عضو ابتدا و انتها یکسان است.

باید توجه داشته باشیم که **شرط اول** بسیار مهم است؛ زیرا برای مثال، مجموعهٔ زیر **عضو انتها** ندارد:

$A = \{x \in \mathbb{R} : x < ۲۵\}$

هر چند همهٔ اعضای مجموعهٔ A از ۲۵ کوچک‌ترند؛ ولی چون ۲۵ عضو A نیست ($۲۵ \notin A$)، پس ۲۵ نمی‌تواند عضو انتها باشد و بدیهی است که عدد حقیقی قبل از ۲۵ مشخص نیست! (چرا؟)

مثال ۱. عضو ابتدا و انتهای مجموعهٔ زیر را تعیین کنید.

$B = \{x \in Z : -۵ < x < ۳\}$

حل: ابتدا اعضای مجموعهٔ B را مشخص می‌کنیم:

$B = \{-۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$

بدیهی است که بین ۵- و ۴- عدد صحیحی وجود ندارد؛ پس عدد ۴- کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ B است و درنتیجه عضو ابتداست. همچنین واضح است که بین ۲ و ۳ نیز عدد

صحیحی موجود نیست؛ پس، عدد ۲ بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ B است و درنتیجه عضو انتهاست.

قرارداد: عضو ابتدا و انتهای مجموعهٔ A را که درواقع به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن مجموعه محسوب می‌شوند، با نماد $a = \min A$ (عضو ابتدای A) و $b = \mathrm{Max}A$ (عضو انتهای A) نشان می‌دهند.

مثال ۲. برای مجموعهٔ زیر، حاصل $\frac{\min A + \mathrm{Max}A}{2}$ را بیابید.

$A = \{x \in \mathbb{Z}: -3 \le x < 6\}$

حل: با توجه به اعضای مجموعهٔ A، بدیهی است که عضو ابتدا و انتهای A به ترتیب ۳- و ۵- هستند.

بنابراین:

$\frac{\min A + \mathrm{Max}A}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$: $\mathrm{Max}A = 5$ (عضو انتهای A) و $\min A = -3$ (عضو ابتدای A)

مثال ۳. در صورت وجود، عضو ابتدا و عضو انتهای مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

I) $A = \{x \in \mathbb{R}: -2 \le x < 3\} = [-2, 3)$

II) $B = \{x \in \mathbb{Q}: -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{2}\}$

III) $C = \{x \in \mathbb{Z}: -\sqrt[9]{3} \le x \le \sqrt[3]{4}\}$

IV) $D = \{x \in \mathbb{N}: -83 \le x < 1384\}$

V) $E = \{x \in \mathbb{R}: -\sqrt[4]{3} \le x \le \sqrt[3]{4}\} = [-\sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{4}]$

حل:

I) مجموعهٔ A عضو انتها ندارد؛ ولی دارای عضو ابتدای $\min A = -2$ است.

II) مجموعهٔ B دارای عضو ابتدا و انتها نیست؛ زیرا اگرچه به‌ظاهر $-\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ هردو به مجموعهٔ B تعلق دارند و به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعضای این مجموعه هستند، ولی درواقع با توجه به تعریف مجموعهٔ B که شامل اعداد گویای بین $-\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ است، هیچ‌کدام به Q تعلق ندارند و مجموعهٔ B معادل مجموعه زیر است:

$B = \{x \in \mathbb{Q}: -\sqrt{5} < x < \sqrt{2}\}$

III) با توجه به $\sqrt[3]{4} \approx 1/587$ و $\sqrt[9]{3} \approx 1/2457$، عضو ابتدای مجموعهٔ C برابر $\min C = -1$ و عضو انتهای آن برابر $\mathrm{Max}C = 1$ است؛ زیرا:

$C = \{x \in \mathbb{Z}: -1 \le x \le 1\} = \{-1, 0, 1\}$

IV) با توجه به $x \in \mathbb{N}$، بدیهی است که $\min D = 1$ و $\mathrm{Max}D = 1383$؛ زیرا مجموعهٔ D معادل مجموعهٔ زیر است:

$D = \{x \in \mathbb{N}: 1 \le x \le 1383\}$

V) با توجه به مجموعهٔ $E = [-\sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{4}]$، بدیهی است که عضوهای ابتدا و انتهای آن به ترتیب $\min E = -\sqrt[4]{3}$ و $\mathrm{Max}E = \sqrt[3]{4}$ است.

در این‌جا، این سؤال مطرح می‌شود که آیا عضو ابتدا یا عضو انتها در صورت وجود، منحصربه‌فرد هستند؟

پاسخ این سؤال را به توسط قضیهٔ زیر می‌توان داد.

قضیه. اگر $A \subseteq \mathbb{R}$، در این صورت عضوهای ابتدا و انتهای A در صورت وجود، منحصربه‌فرد هستند.

برهان. فرض کنیم a_1 و a_2 هردو عضو ابتدای A باشند، باید ثابت کنیم $a_2 = a_1$. چون a_1 و a_2 هر دو عضو ابتدا در نظر گرفته شده‌اند، پس طبق تعریف باید: $a_1 \in A$ و $a_2 \in A$؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \min A,\ a_2 \in A \Rightarrow a_1 \le a_2 \\ a_2 = \min A,\ a_1 \in A \Rightarrow a_2 \le a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = a_2$$

به همین ترتیب و با روشی مشابه، منحصربه‌فرد بودن عضو انتها نیز اثبات می‌شود.

در این‌جا، دو مفهوم دیگر، یعنی کران پایین و کران بالا در یک مجموعه را بیان می‌کنیم.

کران پایین: اگر $S \subseteq \mathbb{R}$، عدد حقیقی a را کران پایین مجموعهٔ S می‌نامیم؛ در صورتی که:

$\forall x \in S \Rightarrow a \le x$

گوییم مجموعهٔ S از پایین کراندار است و اگر S از پایین کراندار نباشد، می‌گوییم از پایین بی‌کران است.

برای مثال، مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{R}: 3 < x < 4\}$، دارای کران پایین ۳ است که هر عدد حقیقی کوچک‌تر از ۳ نیز، یک کران پایین برای مجموعهٔ A محسوب می‌شود.

کران بالا: اگر $S \subseteq \mathbb{R}$، عدد حقیقی b را کران بالای S

می‌نامیم؛ در صورتی که:

$\forall x \in S \Rightarrow x \le b$

گوییم مجموعهٔ S از بالا کراندار است و اگر S از بالا کراندار نباشد، می‌گوییم از بالا بی‌کران است. برای مثال، مجموعهٔ $B=\{x \in \mathbb{R}: 1 < x < \sqrt{3}\}$، دارای کران بالای $\sqrt{3}$ است که هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از $\sqrt{3}$ نیز، یک کران بالای مجموعهٔ B محسوب می‌شود.

تذکر ۱. اگر به تعریف‌های اخیر دقت شود، متوجه خواهیم شد که دو تفاوت اساسی بین مفهوم‌های فوق وجود دارد؛ یعنی عضو ابتدا که منحصربه‌فرد است و باید عضو مجموعه باشد؛ در مقابل آن کران پایین نه لزومی دارد که عضو مجموعه باشد و نه لازم است که منحصربه‌فرد باشد. به همین ترتیب، کران بالا نیز لزومی ندارد که عضو مجموعه باشد و نه لازم است که منحصربه‌فرد باشد. به‌همین خاطر، می‌توانیم مجموعهٔ کران‌های پایین و مجموعهٔ کران‌های بالا را تعریف کنیم.

تذکر ۲. با توجه به تعریف‌های ارائه شده، می‌توان گفت: I) هر عضو ابتدا یک کران پایین است؛ ولی هر کران پایین، ممکن است عضو ابتدا نباشد. به همین ترتیب، هر عضو انتها یک کران بالاست؛ ولی هر کران بالا، ممکن است عضو انتها نباشد. II) عضو ابتدای یک مجموعه، در صورت وجود، بزرگ‌ترین کران پایین آن مجموعه است و عضو انتهای هر مجموعه، در صورت وجود، کوچک‌ترین کران بالای آن مجموعه است.

مثال ۴. آیا مجموعهٔ زیر عضو ابتدا، عضو انتها، کران پایین و کران بالا دارد؟

$$D=\{x \in \mathbb{R}: x^2 \ge 2\}$$

حل: ابتدا مجموعه D را به صورتی ساده‌تر می‌نویسیم:

$$D=\{x \in \mathbb{R}: x \ge \sqrt{2} \text{ یا } x \le -\sqrt{2}\}$$
$$=(-\infty,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},+\infty)$$

بدیهی است که مجموعهٔ D از بالا و پایین بی‌کران است؛ پس نمی‌تواند دارای عضو ابتدا و انتها باشد.

مثال ۵. در مجموعهٔ زیر، عضو ابتدا، عضو انتها، بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالا را تعیین کنید.

$$S=\{x \in \mathbb{R}: x^2 \le 2\}$$

حل: ابتدا مجموعهٔ S را به صورتی ساده‌تر می‌نویسیم:

$$S=\{x \in \mathbb{R}: -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\}=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

اعداد $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ به‌ترتیب عضو ابتدا و عضو انتهای مجموعه S هستند و $-\sqrt{2}$ یک کران پایین S (بزرگ‌ترین کران پایین[2]) و $\sqrt{2}$ یک کران بالای S (کوچک‌ترین کران بالا[3]) محسوب می‌شوند.

در این‌جا، برای ورود به مطلب اصلی، یعنی بخش‌پذیری در Z و بیان قضیهٔ تقسیم، نیاز داریم چند اصل و قضیهٔ مهم در رابطه با مجموعه‌های مرتب و خوش‌ترتیب بیان شود که پس از آن بتوانیم اصلی مهم به نام اصل خوش‌ترتیبی را بیان کنیم.

تعریف مجموعهٔ مرتب: اگر رابطهٔ R روی مجموعهٔ S تعریف شده باشد و رابطهٔ R سه خاصیت انعکاسی، پادتقارنی و تعدی را داشته باشد، رابطهٔ R را یک رابطهٔ ترتیب می‌نامند و مجموعهٔ S همراه رابطهٔ R یک مجموعهٔ مرتب است.

مثال ۶. آیا $\mathbb{R}$ همراه رابطهٔ $(\le)$ یک مجموعهٔ مرتب است؟

حل: چون رابطهٔ $(\le)$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$، یک رابطهٔ ترتیب است:

$\mathrm{I})\forall a \in \mathbb{R}, a \le a$ (انعکاسی)

$\mathrm{II})\forall a,b \in \mathbb{R}, a \le b, b \le a \Rightarrow a=b$ (پادتقارنی)

$\mathrm{III})\forall a,b,c \in \mathbb{R}, a \le b, b \le c \Rightarrow a \le c$ (تعدی)

پس $\mathbb{R}$ همراه $(\le)$ یک مجموعهٔ مرتب است.

تعریف مجموعهٔ خوش‌ترتیب: اگر $S \subseteq \mathbb{R}$ و S همراه رابطهٔ R یک مجموعهٔ مرتب باشد، مجموعهٔ S را خوش‌ترتیب می‌نامیم؛ در صورتی که هر زیر مجموعهٔ ناتهی S دارای عضو ابتدا باشد.

مثال ۷. آیا مجموعهٔ زیر خوش‌ترتیب است؟

$$S=\{x \in \mathbb{R}: 2 \le x \le 6\}$$

حل: مجموعهٔ S خوش‌ترتیب نیست؛ زیرا $(3,4) \subseteq S$ و بازهٔ $(3,4)$ دارای عضو ابتدا نیست. بنابراین اگر S خودش عضو ابتدا داشته باشد، شرط لازم است؛ ولی کافی نیست.

مثال ۸. آیا مجموعهٔ زیر خوش‌ترتیب است؟

$A=\{x\in Z: x>-۳\}$

حل : مجموعهٔ A خوش‌ترتیب است؛ زیرا خودش دارای عضو ابتداست :

$\min A=-۲$

همچنین هر زیرمجموعهٔ آن نیز دارای عضو ابتداست؛ زیرا $A\subseteq Z$ و از پایین کراندار است .

تبصرهٔ ۱ . قضیه‌ای تحت این عنوان که «اگر A زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد صحیح Z و از پایین کراندار باشد، در این صورت، A دارای عضو ابتداست»، ثابت شده است .

تبصرهٔ ۲ . قضیه‌ای تحت این عنوان که «هر زیرمجموعهٔ ناتهی Z که از بالا کراندار باشد، دارای عضو انتهاست»، ثابت شده است .

تمرین . آیا مجموعه‌های زیر خوش‌ترتیب هستند؟

I) $A=\{x\in \mathbb{R}: ۱\le x\le ۳\}$

II) $B=\{x\in Z: x>-۱\}$

III) $C=\{x\in Z: x\le ۲\}$

اصل خوش‌ترتیبی

هر زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی، دارای عضو ابتداست .

به طور کلی، اگر مجموعه‌ای دارای این خاصیت باشد که تمام زیرمجموعه‌های ناتهی آن عضو ابتدا داشته باشد، یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب نامیده می‌شود . بنابراین، اصل خوش‌ترتیبی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد :

«مجموعهٔ اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) خوش‌ترتیب است» .

مثال ۹ . کدام یک از مجموعه‌های زیر، خوش‌ترتیب است؟

I) $A=\{x\in \mathbb{R}: x\ge -۵\}$

II) $B=\{x\in \mathbb{R}: ۸\le x\le ۳۴\}$

III) $C=\{x\in Z: x<-۳\}$

IV) $D=\{x\in Z: x>-۴\}$

حل :

I) مجموعهٔ A خودش دارای عضو ابتداست؛ ولی زیرمجموعهٔ $(-۴,-۳)\subseteq A$ عضو ابتدا ندارد .

II) مجموعهٔ B دارای عضو ابتدا و انتهاست؛ ولی زیرمجموعهٔ $(۹,۱۰)\subseteq B$ عضو ابتدا ندارد .

III) مجموعهٔ C خودش دارای عضو ابتدا نیست .

IV) مجموعهٔ D خودش دارای عضو ابتداست و هر زیرمجموعهٔ ناتهی آن نیز دارای عضو ابتداست؛ بنابراین D خوش‌ترتیب است (عدد ۴- یک کران پایین D و هر زیرمجموعهٔ D است) .

تمرین . کدام یک از مجموعه‌های زیر، خوش‌ترتیب است؟

I) $A=\{x\in Z: x\le -۲\}$

II) $B=\{x\in \mathbb{N}: x\ge ۷\}$

III) $C=\{x\in \mathbb{R}: x\ge -۳\}$

IV) $D=\{x\in Q: x>\sqrt{۲}\}$

VI) $E=\{x\in Z: -۳۴<x\le ۸\}$

V) $F=\{x\in Z: x>۴\}$

در این جا، با بیان اصلی به نام «اصل استقرای ریاضی» که در واقع، با اصل خوش‌ترتیبی معادل است (به بیان دیگر، با قبول هریک می‌توان دیگری را ثابت کرد)، این قسمت را خاتمه می‌دهیم .

اصل استقرای ریاضی[۴]

اگر $S\subseteq \mathbb{N}$ و S دارای دو خاصیت زیر باشد، آن‌گاه $S=\mathbb{N}$.

I) $۱\in S$.

II) برای هر K، اگر $K\in S$ آن‌گاه $(K+۱)\in S$.

می‌توانیم این اصل را به‌عنوان یک قضیه و با استفاده از اصل خوش‌ترتیبی اثبات کنیم .

برهان . فرض می‌کنیم $S\subseteq \mathbb{N}$ و دو شرط (I) و (II) برقرار باشند . باید ثابت کنیم: $S=\mathbb{N}$. اگر فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف)، پس باید عضوی در $\mathbb{N}$ باشد که آن عضو در S نباشد . به بیان ریاضی $T=\mathbb{N}-S\neq\varnothing$ و چون $T\subseteq \mathbb{N}$ ، طبق اصل خوش‌ترتیبی باید مجموعهٔ T دارای عضو ابتدا باشد . با فرض این که $t_1\in T$ ، عضو ابتدای T باشد، با توجه به (I) یعنی $۱\in S$ و $T=\mathbb{N}-S$ ، نتیجه می‌شود $۱\notin T$ ؛ پس $t_1>۱$ $(t_1-۱>۰)$ ؛ بنابراین $(t_1-۱)\in \mathbb{N}$ و بدیهی است که

$t_1 > (t_1 - 1)$ و از آن‌جا که t_1 عضو ابتدای T است، پس نتیجه می‌شود که $(t_1 - 1) \notin T$؛ بنابراین باید $(t_1 - 1) \in S$ و با توجه به (II) باید $((t_1 - 1) + 1) \in S$ یا $t_1 \in S$ که با $t_1 \in T$ تناقض دارد؛ پس فرض خلف باطل است و درنتیجه حکم برقرار است؛ یعنی $S = \mathbb{N}$.

نتیجهٔ اصل استقرای ریاضی (معادل اصل استقرای ریاضی)

اگر در اعداد طبیعی گزاره نمایی مانند $p(n)$ داشته باشیم و برای آن $p(1)$ درست باشد و به ازای هر k طبیعی از درستی $p(k)$، درستی $p(k+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $p(n)$ به ازای هر عدد طبیعی چون n درست است.

تعمیم این مطلب: فرض کنیم $p(n)$ گزاره نمایی در اعداد صحیح (Z) باشد و برای یک $m \in Z$، عبارت $p(m)$ درست باشد و هرگاه $n \geq m$ و از درستی $p(n)$، درستی $p(n+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $p(n)$ به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$ درست است.

تذکر: این نتیجه می‌تواند در اثبات بسیاری از مسأله‌های ریاضی که به صورت گزاره‌نماهایی در $\mathbb{N}$ مطرح می‌شوند، کاربرد داشته باشد. ولی همیشه به این مطلب باید توجه داشت که این نوع استدلال، در کل ناقص است و ممکن است برخی از گزاره‌نماها همهٔ شرط‌های استقرایی را داشته باشند؛ ولی همواره برقرار نباشند؛ یعنی گزاره‌نما برای $p(1)$ درست باشد و همچنین از درستی $p(k)$، درستی $p(k+1)$ نیز نتیجه شود؛ ولی در کل $p(n)$ درست نباشد.

درواقع استدلال استقرایی، به طور معمول با مقایسهٔ مشاهده‌ها و نتیجه‌های حاصل از آزمایش‌های محدودی آغاز می‌شود. سپس نتیجهٔ این آزمایش‌ها را به همهٔ پدیده‌های مشابه تعمیم می‌دهند. در اصل، استدلال استقرایی، اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود؛ زیرا مجموعهٔ مشاهدات ما همواره محدود است و نمی‌توانیم آزمایش را روی همهٔ پدیده‌ها انجام دهیم. این نوع استدلال، فقط روش خوبی برای حدس‌زدن است و برای اثبات درستی این حدس، باید از اصول استقرای ریاضی استفاده کرد.

مثال ۱۰. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$p(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حل:

$$p(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

فرض استقرا: $p(k) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

حکم استقرا: $p(k+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\text{سمت چپ حکم} = \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + k} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{\overbrace{(k+1)(k+2)}^{\text{سمت راست حکم}}}{2}$$

مثال ۱۱. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $25^n - 1$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

حل: حکم استقرا را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$25^n - 1 = 8k$ (حکم استقرا)

$n = 1: 25^1 - 1 = 24 = 8 \times 3;$

و $n = k: 25^k - 1 = 8k_1$ (فرض)

$n = k+1: 25^{k+1} - 1 = 8k_2$ (حکم)

اگر دو طرف فرض را در ۲۵ ضرب کنیم، در این صورت:

$25^{k+1} - 25 = 200k_1;$

$25^{k+1} - 1 = 200k_1 + 24 = 8(25k_1 + 3) = 8k_2$

(حکم برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است).

تمرین. به روش استقرا ثابت کنید به ازای هر n طبیعی عدد $p(n) = 2^{2n} + 15n - 1$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

(ادامه در شمارهٔ بعد)

زیرنویس

۱. برای اطلاع از آخرین دستاوردها و اکتشافات و تحولات در زمینه نظریه اعداد به سایت نویسنده مقاله رجوع شود.

2. Infimum

3. Supermum

۴. برای اطلاع بیشتر از این موضوع به شماره‌های (۴۰) و (۴۱) مجله ریاضی رشد برهان متوسطه رجوع شود.