اصل حُجره‌ها

● مهدی نساجی، سال سوّم دبیرستان

در ریاضیات، اصولی وجود دارند که گرچه به‌نظر بسیار ساده و بدیهی می‌آیند، امّا درمواقع حسّاس به کمک ریاضی‌دان آمده، بعضاً باعث حلّ مسائل مشکلی می‌شوند. به‌عنوان مثال می‌توانیم به اصول ضرب و ردّ و شمول اشاره کنیم. ذیلاً به یکی از این اصول بدیهی که در حلّ مسائل ما را یاری می‌کند، توجّه می‌کنیم.

اصل لانه‌کبوتری (لانه زنبوری)

دکتر علی‌رضا جمالی در مجلّهٔ رشد ریاضی شمارهٔ ۱۷ تعریف آن را چنین آورده است: «فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند و $(m<n)$ در این صورت اگر n شیئی را در m حجره قرار دهیم به هر صورت اعمّ از این‌که حجره‌ها خالی بماند یا نه، حدّاقل یکی از این حجره‌ها حاوی دو شیء یا بیشتر از این اشیا خواهد بود».

چون این تعبیر را می‌توان برای کبوترها یا زنبورها و لانه‌هایشان هم داشت لذا به آن اصل لانه‌کبوتری و یا لانه زنبوری هم می‌گویند.
حال می‌خواهیم چند مسأله را با توجّه به این اصل حلّ کنیم:

مسألهٔ اوّل : اگر در یک میهمانی ۴۰۰ نفر وجود داشته باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت که حدّاقل ۲ نفر از آنها دریک روز به‌دنیا آمده‌اند؟

حل : بلی، زیرا اگر n را تعداد افراد و m را تعداد روزهای سال بگیریم چون $n = ۴۰۰ > ۳۶۵ = m$ پس طبق اصل حجره‌ها حدّاقل دو نفر وجود دارند که دریک روز به‌دنیا آمده‌باشند مثلاً در روز سوم دی ماه.

به مسألهٔ بعد که شبیه همین مسأله است توجّه کنید:

مسألهٔ دوّم : در مجموعه‌ای متشکل از ۸ نفر، حداقل دو نفر موجودند که روز تولد آنها دریکی از روزهای هفته مثلاً شنبه است.
(حل برعهدهٔ خواننده می‌باشد.)

مسألهٔ سوّم : اثبات کنید حداقل دو درخت در دنیا وجود دارند که تعداد برگهایشان مساوی است (باید توجه داشت که تعداد برگهای پربرگترین درخت جهان از تعداد کلّ درختان جهان کمتر است که واقعاً هم چنین است).

حل: m عبارت است از عدهٔ برگهای درختی که بیشترین تعداد برگها را درمیان مجموعهٔ همهٔ درختان‌داراست. ضمناً عدّهٔ همهٔ درختان روی زمین را n درنظر بگیریم. باتوجه به فرض $m<n$، پس بنابر اصل حجره‌ها حداقل دو درخت وجود دارند که تعداد برگهایشان یکی است.

مسألهٔ چهارم : اثبات کنید برروی زمین حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد موهای سرشان یکی می‌باشد.
(می‌دانیم که تعداد موهای پرموترین انسان (حدود ۳۰۰,۰۰۰ تار مو) از تعداد کل انسانها (حدود ۵,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ نفر) کمتر می‌باشد.)

حل : این مسألهٔ همان مسألهٔ قبل است که فقط نوع طرح آن تغییر کرده است.

مسألهٔ پنجم : یک گلّه گاو شامل ۷ رأس گاو، به رنگهای قهوه‌ای، سیاه، و سفید می‌باشد. اگر گاوها متعلق به دو نفر باشند ثابت کنید یکی از این دو نفر حداقل دارای دو گاو هم رنگ می‌باشد.

حل : این گاوها را به هرطریق که بین این دو نفر تقسیم کنیم، همواره یک نفر وجود خواهدداشت که حداقل چهار گاو متعلق به اوست. (به تقسیم‌بندی زیر توّجه کنید.)

شخص B	شخص A
۶	۱
۵	۲
۴	۳
۳	۴
۲	۵
۱	۶

می‌بینیم‌که درهرحالت همواره یک‌نفرحداقل‌دارای ۴ رأس‌گاو است.

پس چون یک نفر درهرحالت حداقل دارای چهار گاو است و سه نوع رنگ موجود است، پس بنابراصل حجره‌ها حداقل دو گاو همرنگ متعلق به یکی از آنها می‌باشد.

مسألۀ ششم : فرض کنیم که $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ مجموعه‌ای متشکل از $n + 1$ عدد طبیعی باشد، ثابت کنید در این مجموعه حداقل دو عدد مانند a_i و a_j $(i \neq j)$ وجود دارد که:

$$a_i - a_j = k \,.\, n \quad (k \in z)$$

حل : باتوجه به‌قاعده تقسیم داریم:

$$a_i = k' \,.\, n + r'$$

$$a_j = k'' \,.\, n + r'' \quad (k' , k'' \in z \,,\, 0 \leq r' , r'' < n)$$

می‌دانیم که r' و r'' به‌ترتیب باقیمانده‌های تقسیم دو عدد a_i و a_j بر n می‌باشند، حال اگر ما بتوانیم اثبات کنیم که در این مجموعه حداقل دو عدد مثل a_i و a_j وجود دارند که دارای باقیمانده‌های یکسان می‌باشند مسأله حل می‌شود.

می‌گوییم ما $n + 1$ عدد طبیعی داریم که اگر تمامی عددهای این مجموعه را بر n تقسیم کنیم بزرگترین باقیمانده، $n - 1$ و کوچکترین باقیمانده، صفر خواهدبود.

رشتۀ باقیمانده‌ها $\quad 0 , 1 , 2 , \dots , n - 1$

تعداد باقیمانده‌ها nتا است لذا تعداد عددهای مجموعه‌از تعداد باقیمانده بیشتر است، به عبارت دیگر $n < n + 1$ ، پس مطابق اصل لانه کبوتری حدّاقل دو عدد وجود دارند مانند a_i و a_j که باقیمانده‌هایشان با هم برابر است پس $r' = r''$:

$$a_i = k' \,.\, n + r'$$

$$a_j = k'' \,.\, n + r'' \quad \Rightarrow a_i - a_j = (k' - k'').n$$

$$r' = r'' \qquad k' - k'' = k \in z \quad \Rightarrow a_i - a_j = k.n$$

مسألۀ هفتم : عدد طبیعی n مفروض است ثابت کنید یک عدد طبیعی با ارقام صفر و یک موجود است (در مبنای ده) که بر n قابل قسمت می‌باشد.

حل : $n + 1$ عدد زیر را درنظر می‌گیریم:

$$0 , 1 , 11 , 111 , \dots , \underbrace{111\dots1}_{n \text{ تا}}$$

بر طبق مسألۀ قبل حداقل ۲ عدد از بین این عددها مانند a و b$(a>b)$ موجودند که تفاضلشان بر n بخش‌پذیراست. واضح است که $a - b$ واجد خاصیت حکم مسأله است، یعنی فقط از ارقام صفر و یک تشکیل شده‌است، پس یک عدد طبیعی با ارقام صفر و یک موجود است که بر n قابل قسمت می‌باشد.

مسألۀ هشتم : ثابت کنید دریک میهمانی اگر n نفر حضور داشته باشند حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد دوستانشان با هم برابر است. (اگر A با B دوست باشد B هم با A دوست است.)

حل : کسی‌که کمترین دوست را دارد تعداد دوستانش صفر است و کسی که بیشترین دوست را دارد تعداد دوستانش $n - 2$ می‌باشد چون او به‌غیر از خودش و کسی‌که هیچ دوست ندارد با بقیه دوست است.

$$0 , 1 , 2 , \dots , n - 2$$

باتوجه به رشتۀ فوق افراد این میهمانی $n - 1$ نوع دوست می‌توانند داشته باشند در صورتی‌که n نفرند پس طبق اصل حجره‌ها دو نفر وجود دارند که تعداد دوستانش برابر است.

مسألۀ نهم : (المپیاد جهانی سال ۱۹۷۲) مجموعه‌ای از عددهای دو رقمی با ده عضومتمایز در دستگاه عددنویسی دهدهی مفروض است. ثابت کنید که همیشه می‌توان دو زیر مجموعۀ جدا از هم از این مجموعه انتخاب کرد که مجموع عضوهای آنها با هم برابر باشند.

حل : می‌دانیم مجموعهٔ n عضوی $S = \{a_1 , a_2 , \dots , a_n\}$ دارای 2^n زیر مجموعه است بنابراین مجموعهٔ مفروض دارای $2^{10} = 1024$ زیر مجموعه خواهد بود. عددهای مجموعهٔ S' $(S' \subset S)$ همگی دو رقمی‌اند بنابراین از ۹۹ بزرگتر نیستند. به این ترتیب مجموع عضوهای‌هر زیر مجموعه نمی‌تواند از 99×10 یعنی ۹۹۰ بیشتر باشد. (در واقع مجموع عددهای مجموعهٔ S' از این عدد هم کمتر است، بیشترین مجموع وقتی به‌دست می‌آید که ده عدد عضو مجموعهٔ S' عددهای پشت سرهم از ۹۰ تا ۹۹ باشند که در این صورت مجموع آنها ۹۴۵ خواهدبود.) چون هر یک از ۹۹۰ یا بهتر بگوییم ۹۴۵ مجموع ممکن است به یکی از ۱۰۲۴ زیر مجموعه متعلق باشند، بنابر اصل حجره‌ها دست کم دو زیر مجموعهٔ S'_i و S'_j وجود دارند که مجموع عضوهای آن برابرند و این حکم مسأله را اثبات می‌کند.

مسألهٔ دهم : (المپیاد کشور انگلیس سال ۱۹۷۰) ثابت کنید از هر مجموعه‌ای که شامل n عدد طبیعی باشد، می‌توان زیر مجموعه‌ای غیرتهی چنان انتخاب کرد که مجموع عضوهای آن بر n بخش‌پذیر باشد.

حل : فرض کنید برای مجموعه‌ای که شامل n عدد طبیعی $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ است حکم مسأله درست نباشد در این‌صورت هیچ‌کدام از عددهای زیر:

$$S_1 = a_1 , S_2 = a_1 + a_2 , \dots , S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

بر n بخش‌پذیر نیستند از آن جا که عددهای فوق در تقسیم بر n، به تعداد $n - 1$ (بجز صفر) باقیماندهٔ ممکن خواهند داشت، بنابر اصل حجره‌ها دو عدد S_i و S_j $(j>i)$ پیدا می‌شود که در تقسیم بر n باقیمانده‌های برابر داشته باشند. بنابراین تفاضل آنها:

$$S_j - S_i = a_{i+1} + \dots + a_j = k \cdot n \qquad k \in z$$

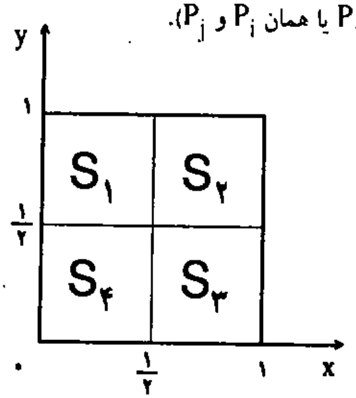
بر n بخش‌پذیر است. حال اگر به عددهای $a_{i+1} , \dots , a_j$ بنگریم خود اعضای یک زیر مجموعه از مجموعهٔ اصلی ما می‌باشند که مجموع آنها بر n بخش‌پذیر است، این همان چیزی است که فرض ما را نقض می‌کند و درستی حکم اثبات می‌گردد.

مسألهٔ یازدهم : مجموعه‌ای شامل ۱۳۶۹ عدد طبیعی است، ثابت کنید می‌توان زیرمجموعه‌ای غیرتهی از این مجموعه جدا کرد که مجموع عضوهای آن بر ۱۳۶۹ بخش‌پذیر باشد.

حل : این مسأله از مسائل المپیاد آزمایشی ریاضی دبیرستان امام صادق علیه‌السّلام در سال ۱۳۶۹ انتخاب شده است که حالتی خاص از مسأله قبل می‌باشد و حلّ آن در حالت کلی n بررسی شده‌است.

مسألهٔ دوازدهم : مربع S به‌طول واحد مفروض است، در داخل این مربع پنج نقطهٔ P_1 , P_2 ، ... و P_5 را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که d_{ij} فاصلهٔ P_i و P_j باشد. ثابت کنید حداقل زوجی از این نقاط مانند: P_i و P_j موجودند $(i \neq j)$ به‌طوری که $d_{ij} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

حل : مجموعهٔ نقاط داخل ناحیهٔ S را به چهار مجموعهٔ جدا از هم‌مانند شکل افراز می‌کنیم. چون ما مربع را به چهار مربع متمایز از هم تقسیم کرده‌ایم، پس بنابراصل حجره‌ها دو نقطه از پنج نقطهٔ P_1 , P_2 ، ... ، P_5 بایددریکی‌از زیرمجموعه‌های S_1 , S_2 , S_3 و S_4 باشند (مثلاً P_1 و P_2 یا همان P_i و P_j).



می‌دانیم d_{ij} بیشترین مقداری که می‌تواند پیدا کند کمتر از قطر است پس باتوجه به رابطهٔ فیثاغورس، $d_{ij} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

حال آیا حکم فوق با تبدیل $\frac{1}{\sqrt{2}}$ به عدد کوچکتر باقی می‌ماند؟

(اثبات برعهدهٔ خواننده می‌باشد.)

مسألهٔ چهاردهم : (المپیاد کشور انگلیس سال ۱۸۶۶) ثابت کنید از بین ۵۲ عدد درست دلخواه همیشه می‌توان دو عدد طوری انتخاب کرد که مجموع یا تفاضل آنها، بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

حل : همهٔ باقیمانده‌های ممکن تقسیم بر ۱۰۰ را به‌ترتیب زیر گروه‌بندی می‌کنیم:

(۰ ، ۱۰۰) ، (۱ ، ۹۹) ، (۲ ، ۹۸) ، ... ، (۵۰ ، ۵۰)

(البتّه لازم به تذکر است که ۱۰۰ باقیمانده نیست و همچنین دوبار از عدد ۵۰ استفاده کرده‌ایم که این اشکالی به حل وارد نمی‌کند.)

از آن‌جا که تعداد گروه‌ها برابر ۵۱ و تعداد عددهای مفروض برابر ۵۲ است، اگر باقیمانده‌های مساوی نداشته‌باشیم بنابر اصل حجره‌ها دو عدد پیدا می‌شود که باقیماندهٔ آنها بر ۱۰۰ ، با یکی از این گروهها تطبیق می‌کند. در این صورت مجموع این دو عدد بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است، اگر باقیمانده‌های مساوی داشته‌باشیم در این صورت تفاضل آنها بر ۱۰۰ بخش‌پذیر خواهدبود.

مسألهٔ پانزدهم : (المپیاد کشور یوگسلاوی سال ۱۹۷۷) ۲۰ عدد طبیعی $a_1 < a_2 < \dots < a_{20}$ که از ۷۰ تجاوز نمی‌کنند داده شده است. ثابت کنید در بین تفاضلهای $a_j - a_i$ $(j>i)$ دست کم چهار عدد برابر پیدا می‌شود.

حل : از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم که حکم مسأله نادرست باشد، در این‌صورت بین ۱۹ عدد:

$$a_{20} - a_{19} ، a_{19} - a_{18} ، \dots ، a_2 - a_1$$

چهار عدد برابر پیدا نمی‌شود. بنابراین در بین آنها از عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ و ۶ نمی‌توان بیش‌از سه بار پیداکرد، دست کم یکی از این عددها از ۶ بزرگتر است پس:

$$a_{20} - a_1 = (a_{20}-a_{19}) + (a_{19}-a_{18}) + \dots + (a_2-a_1) \geq$$

$$7 + (6+6+6) + (5+5+5) + \dots + (1+1+1) = 70$$

درصورتی‌که ما می‌دانیم: $a_{20} - a_1 < 70 - 1 = 69$

زیرا هیچ‌کدام از عددهای طبیعی فوق از ۷۰ بزرگتر نیستند. پس فرض ما غلط است در نتیجه حکم ثابت است.

تمرینها

۱ـ اطلاعاتی در دست است که هیچ شخصی در سرش بیش از ۳۰۰,۰۰۰ تار مو ندارد و طبق یک سرشماری جدید جمعیت شهر نیویورک ۷,۷۸۱,۹۸۴ نفر است. ملاحظه می‌شود که در شهر نیویورک حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد موهای سرشان برابر است. بزرگترین عدد صحیحی که می‌توان در ادعای زیر به‌جای n قرار داد چه‌قدر است؟

«درشهر نیویورک n شخص وجود دارند که تعداد موهای سرشان برابر است.»

۲ـ در یک گلّه گاوهای دو دهکده چهار رنگ گاو وجود دارد: قرمز، سفید، سیاه، و خالدار. تعداد گاوها روی هم ۶۵ رأس است. ما می‌دانیم که در میان هر پنج گاو همرنگ حداقل دو گاو همسن وجود دارد. نشان دهید که سه گاو از یک دهکده وجود دارند که همرنگ و همسن می‌باشند.

۳ـ فرض کنیم اطلاع داریم که حداقل یکی از a_1 و b_1 دارای ویژگی P و حداقل یکی از a_2 و b_2 دارای ویژگی P و حداقل یکی از a_3 و b_3 دارای ویژگی P هستند. ثابت کنید حداقل دو تا از a_1 و a_2 و a_3 و یا حداقل دوتا از b_1 و b_2 و b_3 دارای ویژگی P هستند.

۴ـ شطرنج بازی ۱۱ هفته فرصت دارد خود را برای شرکت در سابقه‌ای آماده سازد. برای این منظور تصمیم می‌گیرد هر روز حداقل یک دست بازی کند ولی برای این که خسته نشود در هیچ هفته بیش از ۱۲ دست بازی ننماید و برطبق تصمیم عمل می‌کند. ثابت کنید که چند روز متوالی هست که در طی آنها جمعاً ۲۰ دست‌بازی کرده است.

۵ـ فرض کنیم A مجموعهٔ متشکل از ۷ عدد متمایز طبیعی باشد که هیچ یک از ۲۴ تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید که عددهای حاصل از حاصل جمع اعضای هر یک از زیر مجموعه‌های تهی A نمی‌توانند دو به دو متمایز باشند، یعنی حداقل دو زیر مجموعه وجود دارد که حاصل جمع اعضای آن مساوی است.

۶ـ (المپیاد کشور یوگسلاوی سال ۱۹۸۱) مجموعهٔ عددهای ۱ و ۲ و ... و ۱۰۰ را به ۷ زیر مجموعه افراز کرده‌ایم. ثابت کنید در یکی از این زیر مجموعه‌ها یا چهار عدد a و b و c و d وجود دارد که:

$$a + b = c + d$$

و یا سه عدد e و f و g وجود دارد به نحوی که

$$e + f = 2g$$

۷ـ مسائل المپیاد جهانی سالهای ۱۹۷۸ و ۱۹۸۵ را ملاحظه کنید.

فهرست منابع

۱ـ مقالهٔ اصل حجره‌ها و استعمال آن ترجمهٔ دکتر علیرضاجمالی مجلّهٔ رشد ریاضی شمارهٔ ۱۷.

۲ـ ویژه‌نامهٔ مسابقات ریاضی دانش‌آموزی کشور، مجلّهٔ ریاضی‌دان جوان شماره‌های ۱ و ۲.

۳ـ ایوان نیون، ترجمهٔ علی عبیدی، بتول جذبی، ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم، از سری کتب ریاضیات پیش دانشگاهی ـ شمارهٔ ۱۵، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۴ـ ترجمه و تألیف پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل، مسأله‌های المپیادهای ریاضی، انتشارات فاطمی.

۵ـ جمعی از مؤلّفان شوروی، ترجمه پرویز شهریاری، مسأله‌های المپیاد ریاضی در کشورهای مختلف، انتشارات فردوس

۶ـ واسیلیف، ترجمه پرویز شهریاری، آمادگی برای المپیاد ریاضی، انتشارات فاطمی.

۷ـ مسائل المپیاد آزمایشی ریاضی، دبیرستان نمونه امام صادق علیه‌السّلام (واقع در سه راه آذری).

ادب و ریاضی

مَثَل غولان

در جزیره‌ای گروهی از غولهای محیل و وحشی زندگی می‌کردند که چون وحشی بودند هر خارجی وارد در ساحل را می‌کشتند وچون محیل بودند، کاری می‌کردند که آن خارجی خود محکومیت خود را اعلام کند. بدین ترتیب که سؤالی از او می‌کردند، اگر جواب صحیح می‌داد، او را در پیشگاه الههٔ راستی و اگر جواب غلط می‌داد، در پیشگاه الههٔ دروغ قربانی می‌کردند. روزی در برابر یک خارجی زیرکتر از خود این سؤال دور از احتیاط را مطرح کردند. سرنوشت تو چه خواهد بود؟

وخارجی پاسخ داد: «شما مرا قربانی الههٔ دروغ خواهید کرد» جواب مزبور، این بحث را برای غولان پیش آورد: آیا این شخص راست گفته است؟ نه، زیرا در این صورت باید او را قربانی الههٔ راستی کرد. پس آیا خلاف حقیقت را بیان داشته است؟ بازهم نه، زیرا لازم بود که او را در پیشگاه الههٔ دروغ قربانی کرد ودر این صورت او راست گفته بود ... مثل مورد بحث، این را دیگر بیان نمی‌کند که خارجی مزبور در جزیره سر سلسلهٔ پادشاهان شد.

مثل فوق نشان می‌دهد که هیچ مطلبی ذاتاً صحیح یا غلط نیست و می‌تواند حالت سومی هم داشته باشد، حتی می‌تواند بر حسب ماهیت، از این نظر که آن را با چه چیزی مقایسه می‌کنند، کیفیتهای مختلفی داشته باشد.

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دولاشه،پرویز شهریاری