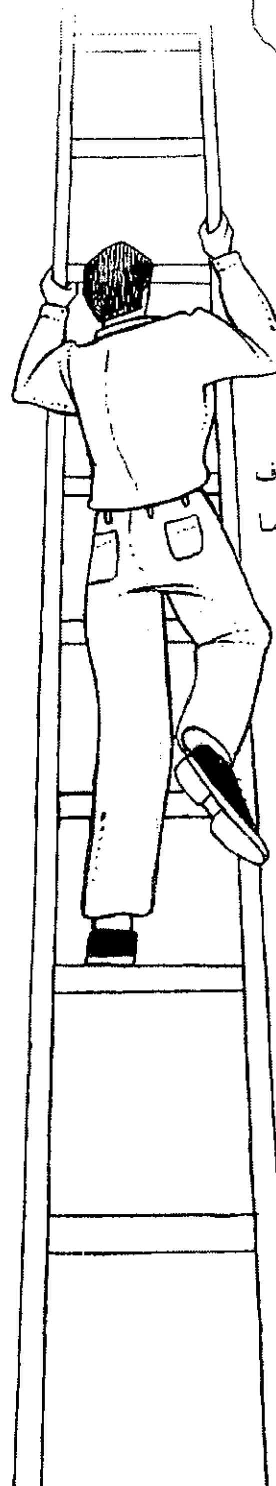
استقرای ریاضی

محدودیت های استدلال استقرایی و اصول استقرای ریاضی

میرشهرام صدر

برای دانش آموزان سال سوم ریاضی



برخی از ریاضیدانان بزرگ، وقتی به درستی قانونی تا حداکثر بیست حالت پشت سر هم پی می بردند، آن قانون را به صورت یک حکم کلی بیان می کردند. از این رو، تا میانه های قرن هفدم میلادی با استفاده از استدلال استقرایی، حکم های بسیاری در ریاضیات، به ویژه در شاخهٔ نظریهٔ اعداد روی هم انباشته شده بود که به ذکر دو مورد از آن ها می پردازیم.

پی یر فرما[1] (۱۶۵۱ ـ ۱۶۰۱ م)، ریاضیدان بزرگ فرانسوی تصور می کرد که عدد $F_n = 2^{2^n} + 1$ به ازای عددهای حسابی n، اول است. این عدد به «عدد فرما» معروف است. هرگاه به جای n، عددهای حسابی را قرار دهیم، ملاحظه می کنیم که عدد فرما برای $n = 5$ یک عدد اول نیست؛ زیرا:

$$n = 0 \Rightarrow F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

$$n = 1 \Rightarrow F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

$$n = 2 \Rightarrow F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$

$$n = 3 \Rightarrow F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

$$n = 4 \Rightarrow F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$

$$n = 5 \Rightarrow F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

ملاحظه می کنیم که F_5 عددی مرکب است.

مارَن مِرسن[2] (۱۶۴۸ ـ ۱۵۸۸م)، ریاضیدان فرانسوی و از دوستان صمیمی دکارت بود. او معتقد بود که عدد $M_n = 2^n - 1$ به ازای عددهای اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۳۱، ۶۷، ۱۲۷ و ۲۵۷ عددی اول، و به ازای بقیهٔ عددهای طبیعی کوچک تر از ۲۵۷، عددی مرکب است. این عدد به «عدد مرسن» معروف است. در صورتی که به جای n، عددهای اول یاد شده را قرار دهیم، عددهای مرسن به دست می آیند:

$n = ۲ \Rightarrow M_۲ = ۲^۲ - ۱ = ۳$

$n = ۳ \Rightarrow M_۳ = ۲^۳ - ۱ = ۷$

$n = ۵ \Rightarrow M_۵ = ۲^۵ - ۱ = ۳۱$

$n = ۷ \Rightarrow M_۷ = ۲^۷ - ۱ = ۱۲۷$

$n = ۱۳ \Rightarrow M_{۱۳} = ۲^{۱۳} - ۱ = ۸۱۹۱$

$\vdots$

$n = ۲۵۷ \Rightarrow M_{۲۵۷} = ۲^{۲۵۷} - ۱$

مرسن چند اشتباه صادقانه داشت. ابتدا این که او به خطا تصور کرد که $M_{۶۷} = ۲^{۶۷} - ۱$ و $M_{۲۵۷} = ۲^{۲۵۷} - ۱$ عددهایی اول هستند. دیگر این که $M_{۶۱} = ۲^{۶۱} - ۱$ و $M_{۸۹} = ۲^{۸۹} - ۱$ و $M_{۱۰۷} = ۲^{۱۰۷} - ۱$ را جزو اعداد اول به حساب نیاورده بود.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، بعضی از ریاضیدانان با بهره‌گیری از استدلال استقرایی (استقرای ناقص)، حکم‌هایی را صادر می‌کردند که در حالت کلی درست نبودند؛ زیرا آن‌ها با بررسی آزمایش‌های محدودی به یک نتیجهٔ کلی می‌رسیدند و می‌دانیم که چنین نتیجه‌هایی ممکن است با یک مثال نقض باطل شوند.

استدلال استقرایی

استدلال استقرایی، به طور معمول با مقایسهٔ مشاهده‌ها و نتیجه‌های ناشی از آزمایش‌های محدودی آغاز می‌شود. سپس نتیجهٔ این آزمایش‌ها را به همهٔ پدیده‌های مشابه تعمیم می‌دهند. استدلال استقرایی، اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود؛ زیرا مجموعه مشاهدات ما همواره محدود است و نمی‌توانیم آزمایش را روی همهٔ پدیده‌ها انجام دهیم. فقط روش خوبی برای حدس زدن است و برای اثبات درستی این حدس، باید از اصول استقرای ریاضی استفاده کرد.

اصل استقرای ریاضی

فرض کنیم نردبانی با تعداد نامتناهی پله و از لحاظ فیزیکی در حالت تعادل موجود باشد. به نظر شما با چه ویژگی‌هایی می‌توان از این نردبان بالا رفت؟

در جواب ممکن است بگویید:

روی هر پله‌ای که هستیم باید بتوانیم از آن به روی پلهٔ بلافاصله بعد از آن برویم. یا فاصلهٔ بین پله‌ها باید طوری باشد که امکان دستیابی از هر پله به پلهٔ بعدی میسّر باشد.

این جواب‌ها کامل نیستند! ابتدا باید بگوییم که در مرحلهٔ اول باید پایمان روی پلهٔ اول برسد. سپس در مرحلهٔ بعدی بگوییم که اگر پایمان روی هر پله (برای مثال پله kام) رسید، آن‌گاه بتوانیم از روی آن به پلهٔ بلافاصلهٔ بعدی (یعنی پله $k+۱$ ام) برویم. با این دو ویژگی می‌توان از نردبان تا بی‌نهایت بالا رفت.

این سؤال را برای این مطرح کردیم که اصل استقرای ریاضی را با یک مثال عملی به ذهن بسپارید تا آن را فراموش نکنید. اصل استقرای ریاضی به صورت زیر است:

اصل استقرای ریاضی

هر زیر مجموعهٔ S از N که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعهٔ $\mathbb{N}$ برابر است:

۱. $۱ \in S$

۲. هرگاه $n \in S$، آن‌گاه $(n+۱) \in S$.

معادل اصل استقرای ریاضی

فرض کنید، $p(n)$ حکمی دربارهٔ عدد طبیعی n باشد. برای اثبات درستی این حکم به کمک معادل اصل استقرای ریاضی، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحلهٔ اول: حکم باید به ازای $n = ۱$ درست باشد.

مرحلهٔ دوم: *فرض استقرا*: فرض می‌کنیم که حکم به ازای $n = k; (k \in \mathbb{N})$ درست باشد.

مرحلهٔ سوم: حکم *استقرا*: ثابت می‌کنیم که حکم برای $n = k+۱$ درست است.

مرحلهٔ چهارم: در این صورت، حکم برای هر عدد طبیعی n درست است.

مثال: با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای عدد طبیعی n ثابت کنید:

الف) $1+2+3+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

ب) $2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$

ج) $(1+a)^n \ge 1+na\ (a \ge -1)$

د) $\log x^n = n\log x\ (x>0)$

هـ) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

و) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$

ز) $\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{8\times 13}+\dots+\frac{1}{(5n-2)(5n+3)}=\frac{n}{3(5n+3)}$

حل : الف) برای این که نشان دهیم حکم برای $n=1$ درست است، کافی است از طرف چپ برابری حکم، جملهٔ اول را انتخاب کنیم و به جای n در طرف راست برابری حکم، عدد ۱ را قرار دهیم:

$n=1: 1=\frac{1}{2}\times 1\times(1+1)=1$ درست است

برای نوشتن فرض استقرا، کافی است به جای n در صورت مسأله، k را قرار دهیم:

فرض استقرا $n=k: 1+2+3+\dots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$

برای نوشتن حکم استقرا باید به جای n در صورت مسأله، $(k+1)$ را قرار دهیم

حکم استقرا $n=k+1: 1+2+3+\dots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در طرف چپ برابری حکم استقرا، قبل از جملهٔ $(k+1)$ ام، جمله kام را می‌نویسیم. برای اثبات درستی حکم استقرا، با یک مقایسه با فرض استقرا، درمی‌یابیم که باید به دو طرف فرض، $(k+1)$ را اضافه کنیم. بنابراین داریم:

$$1+2+3+\dots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) \qquad (1)$$

ملاحظه می‌کنیم که طرف چپ برابری حکم به دست آمده است. اکنون با انجام عملیاتی، طرف راست برابری (۱) را به صورت طرف راست برابری حکم می‌نویسیم:

$$1+2+3+\dots+k+(k+1)=(k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)=(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

پس حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

ب) $n=1: 2=1(1+1)=2$ درست است

فرض استقرا $n=k: 2+4+6+\dots+2k=k(k+1)$

حکم استقرا $n=k+1: 2+4+6+\dots+2k+2(k+1)=(k+1)(k+2)$

به دو طرف فرض $2(k+1)$ را اضافه می‌کنیم:

$$2+4+6+\dots+2k+2(k+1)=k(k+1)+2(k+1)$$
$$=(k+1)(k+2)$$

پس حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

ج)

$n=1: (1+a)^1 \ge 1+1\times a \Rightarrow 1+a \ge 1+a$

درست است

فرض استقرا $n=k: (1+a)^k \ge 1+ka$

حکم استقرا $n=k+1: (1+a)^{k+1} \ge 1+(k+1)a$

دو طرف فرض را در $(1+a)$ ضرب می‌کنیم:

$$(1+a)(1+a)^k \ge (1+a)(1+ka)$$
$$\Rightarrow (1+a)^{k+1} \ge 1+a+ka+ka^2$$

با مقایسهٔ نابرابری اخیر و حکم استقرا ملاحظه می‌کنیم که برای اثبات حکم باید، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$1+a+ka+ka^2 \ge 1+(k+1)a$$
$$\Rightarrow 1+a+ka+ka^2 \ge 1+ka+a \Rightarrow ka^2 \ge 0$$

نابرابری آخر، همواره درست است؛ پس حکم استقرا برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

د) $n=1: \log x^1 = 1\times\log x$ درست است

فرض استقرا $n=k: \log x^k = k\log x$

حکم استقرا $n=(k+1): \log x^{(k+1)}=(k+1)\log x$

به دو طرف فرض، logx را اضافه می‌کنیم:

$$\log x+\log x^k=\log x+k\log x$$
$$\Rightarrow \log x\times x^k=(k+1)\log x$$
$$\Rightarrow \log x^{(k+1)}=(k+1)\log x$$

پس حکم استقرا برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

هـ) درست است $n=۱: ۱^۳ = (\frac{۱(۱+۱)}{۲})^۲ = ۱$

فرض استقرا $n=k: ۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+k^۳ = (\frac{k(k+۱)}{۲})^۲ = \frac{k^۲(k+۱)^۲}{۴}$

حکم استقرا $n=(k+۱): ۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+k^۳+(k+۱)^۳ = (\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲})^۲ = \frac{(k+۱)^۲(k+۲)^۲}{۴}$

به دو طرف فرض استقرا، $(k+۱)^۳$ را اضافه می‌کنیم:

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+k^۳+(k+۱)^۳ = \frac{k^۲(k+۱)^۲}{۴}+(k+۱)^۳$$

$$= \frac{k^۲(k+۱)^۲+۴(k+۱)^۳}{۴} = \frac{(k+۱)^۲(k^۲+۴k+۴)}{۴}$$

$$= \frac{(k+۱)^۲(k+۲)^۲}{۴}$$

پس حکم استقرا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است:

و) $n=۱: (۲\times۱)! < ۲^{۲\times۱}(۱!)^۲ \;;\; ۲<۴$

فرض استقرا $n=k: (۲k)! < ۲^{۲k}(k!)^۲$

حکم استقرا $n=(k+۱): (۲(k+۱))! < ۲^{۲(k+۱)}((k+۱)!)^۲ \;;$

$$(۲k+۲)! < ۲^{۲k+۲}[(k+۱)!]^۲$$

دو طرف فرض استقرا را در $(۲k+۱)(۲k+۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$(۲k+۲)(۲k+۱)(۲k)! < (۲k+۲)(۲k+۱)۲^{۲k}(k!)^۲$$

$$(۲k+۲)! < ۲(k+۱)(۲k+۱)۲^{۲k}(k!)^۲$$

اکنون برای برقراری حکم استقرا، باید نشان دهیم:

$$۲(k+۱)(۲k+۱)۲^{۲k}(k!)^۲ < ۲^{۲k+۲}[(k+۱)!]^۲ \quad (۱)$$

$$\Rightarrow ۲(k+۱)(۲k+۱)۲^{۲k}(k!)^۲ < ۲^{۲k}\times۲^۲(k+۱)^۲(k!)^۲$$

$$\Rightarrow ۲k+۱ < ۲(k+۱) \Rightarrow ۱<۲$$

چون نابرابری آخر، همواره درست است، پس نابرابری (۱) برقرار می‌باشد؛ درنتیجه، حکم استقرا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

ز) درست است $n=۱: \frac{۱}{۳\times۸} = \frac{۱}{۳(۵\times۱+۳)} = \frac{۱}{۳\times۸}$

فرض استقرا $n=k$:

$$\frac{۱}{۳\times۸}+\frac{۱}{۸\times۱۳}+...+\frac{۱}{(۵k-۲)(۵k+۳)} = \frac{k}{۳(۵k+۳)}$$

حکم استقرا $n=k+۱$:

$$\frac{۱}{۳\times۸}+\frac{۱}{۸\times۱۳}+...+\frac{۱}{(۵k-۲)(۵k+۳)}+\frac{۱}{(۵k+۳)(۵k+۸)} = \frac{k+۱}{۳(۵k+۸)}$$

دو طرف فرض استقرا را با $\frac{۱}{(۵k+۳)(۵k+۸)}$ جمع می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۳\times۸}+\frac{۱}{۸\times۱۳}+...+\frac{۱}{(۵k-۲)(۵k+۳)}+\frac{۱}{(۵k+۳)(۵k+۸)}$$

$$= \frac{k}{۳(۵k+۳)}+\frac{۱}{(۵k+۳)(۵k+۸)} = \frac{k(۵k+۸)+۳}{۳(۵k+۳)(۵k+۸)}$$

$$= \frac{۵k^۲+۸k+۳}{۳(۵k+۳)(۵k+۸)} = \frac{(۵k+۳)(k+۱)}{۳(۵k+۳)(۵k+۸)} = \frac{k+۱}{۳(۵k+۸)}$$

درنتیجه، حکم برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $۵^n-۱$ بر ۴ بخش‌پذیر است.

حل: ابتدا حکم استقرا را به زبان ریاضی می‌نویسیم:
برای هر عدد طبیعی n داریم:

$۵^n-۱=۴k;\ (k\in\mathbb{Z})$

$n=۱: ۵^۱-۱=۴k$ درست است

فرض استقرا $n=k: ۵^k-۱=۴k_۱$

حکم استقرا $n=k+۱: ۵^{k+۱}-۱=۴k_۲$

دو طرف فرض را در ۵ ضرب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$5^{k+1}-5=20k_1;\quad 5^{k+1}-1=20k_1+4;$$
$$5^{k+1}-1=4\underbrace{(5k_1+1)}_{k_2\in Z}=4k_2$$

درنتیجه، حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $4^n+15n-1$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

حل: ابتدا حکم استقرا را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$4^n+15n-1=9k;\quad (k\in Z)$$

$n=1:\ 4^1+15\times1-1=9k;\ 18=9k$ درست است

فرض استقرا $n=k:\ 4^k+15k-1=9k_1$

حکم استقرا $n=(k+1):\ 4^{k+1}+15(k+1)-1=9k_2$

$$\Rightarrow 4^{k+1}+15k+14=9k_2$$

دو طرف فرض را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$4(4^k+15k-1)=36k_1;\ 4^{k+1}+60k-4=36k_1$$
$$4^{k+1}+15k+45k-4+18=36k_1+18$$
$$4^{k+1}+15k+14=36k_1+18-45k$$
$$4^{k+1}+15k+14=9\underbrace{(4k_1+2-5k)}_{k_2\in Z}=9k_2$$

درنتیجه، حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $9^{n+1}-8n-9$ بر ۶۴ بخش‌پذیر است.

حل:

$$9^{n+1}-8n-9=64k;\quad (k\in Z)$$

$n=1:\ 9^{1+1}-8\times1-9=64k;\ 64=64k$ درست است

فرض استقرا $n=k:\ 9^{k+1}-8k-9=64k_1$

حکم استقرا $n=(k+1):$

$$9^{k+2}-8(k+1)-9=64k_2;\Rightarrow 9^{k+2}-8k-17=64k_2$$

دو طرف فرض استقرا را در ۹ ضرب می‌کنیم:

$$9(9^{k+1}-8k-9)=576k_1;\ 9^{k+2}-72k-81=576k_1$$
$$9^{k+2}-8k-17=576k_1+64k+64$$
$$9^{k+2}-8k-17=64\underbrace{(9k_1+k+1)}_{k_2\in Z}=64k_2$$

درنتیجه، حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: حاصل حدّ زیر را بیابید.

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

حل: ابتدا مجموع جملات را با استفاده از استدلال استقرایی حدس می‌زنیم. سپس حدس خود را به کمک معادل اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم و با استفاده از آن، این حدّ را محاسبه می‌کنیم.

$$n=1:\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}=\frac{n}{n+1}$$
$$n=2:\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}=\frac{n}{n+1}$$
$$n=3:\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{3}{4}=\frac{3}{3+1}=\frac{n}{n+1}$$

با ادامهٔ روند استدلال استقرایی می‌توان حدس زد که مجموع جملات این حد برابر با $\frac{n}{n+1}$ است. اکنون حدس خود را به کمک معادل اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$n=1:\ \frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1+1}$ درست است

فرض استقرا $n=k:\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

حکم استقرا $n=(k+1):\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+$

$$\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

به دو طرف فرض استقرا $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

پس حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است. درنتیجه به درستی حدس خود پی می‌بریم و از آن در محاسبهٔ حد به صورت زیر استفاده می‌کنیم: $A=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

ادامه دارد.

زیرنویس

1. pierre fermat
2. Marin Mersenne