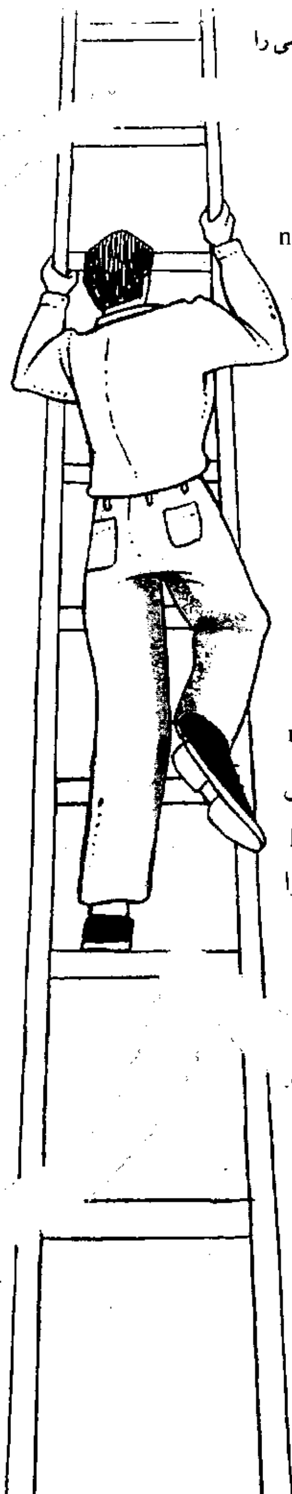
۲

استقرای ریاضی

میرشهرام صدر

برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی



در شمارهٔ قبل با استدلال استقرایی و محدودیت‌های آن آشنا شدید، همچنین اصل استقرای ریاضی را بیان کردیم و کاربرد این اصل را در حل مسأله‌ها ملاحظه کردید، اینک در ادامه مطلب داریم:

تعمیم معادل اصل استقرای ریاضی (استقرای تعمیم‌یافته)

تاکنون با حکم‌هایی مواجه شده‌ایم که درستی آن‌ها به‌ازای عددهای طبیعی $n \geq ۱$ برقرار بودند. اما ممکن است با حکم‌هایی روبه‌رو شویم که از مرحله‌ای به بعد، در اعداد طبیعی درست باشند، مانند حکم $۲^n > ۵n + ۶$ که به ازای عددهای طبیعی $n \geq ۵$ برقرار است؛ زیرا:

$n = ۱$: $۲ > ۱۱$ نادرست

$n = ۲$: $۴ > ۱۶$ نادرست

$n = ۳$: $۸ > ۲۱$ نادرست

$n = ۴$: $۱۶ > ۲۶$ نادرست

$n = ۵$: $۳۲ > ۳۱$ درست

$n = ۶$: $۶۴ > ۳۶$ درست

$n = ۷$: $۱۲۸ > ۴۱$ درست

چنین حکم‌هایی را با استفاده از استقرای ریاضی **تعمیم‌یافته** اثبات می‌کنند. فرض کنیم $p(n)$ حکمی دربارهٔ عدد صحیح n باشد، اگر به‌ازای یک $m \in Z$، $p(m)$ درست باشد و حکم برای هر $n \geq m$ برقرار باشد، آن‌گاه طی مراحل زیر حکم را ثابت می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: عدد صحیح m مناسب را به‌دست می‌آوریم.

مرحلهٔ دوم: درستی حکم را به ازای $n = m$ نشان می‌دهیم.

مرحلهٔ سوم: فرض استقرا: فرض می‌کنیم که حکم به‌ازای $n = k \geq m$ درست باشد.

مرحلهٔ چهارم: حکم استقرا: ثابت می‌کنیم که حکم برای $n = k + ۱$ درست است.

مرحلهٔ پنجم: در این صورت، حکم برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است.

مثال. با استفاده از اصل استقرای **تعمیم‌یافته**، برای هریک از حکم‌های زیر، ابتدا عدد طبیعی مناسب m را بیابید، سپس حکم را برای هر عدد طبیعی $n \geq m$

ثابت کنید:

الف) $n^3 < 3^n$

ب) $n! > 3^n$

ج) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^n-1} < \frac{n}{2}$

د) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

حل. **الف)** ابتدا با اندکی جست‌وجو، m مناسب را می‌یابیم:

$n=1:\ 1<3$
$n=2:\ 8<9$
$n=3:\ 27<27$
$n=4:\ 64<81$
$n=5:\ 125<243$

ملاحظه می‌کنیم که $m=4$.

فرض استقرا $n=k\ge 4:\ k^3<3^k$

حکم استقرا $n=(k+1):\ (k+1)^3<3^{k+1}$

دو طرف فرض استقرا را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$3k^3<3^{k+1}$

با مقایسه رابطهٔ اخیر و حکم استقرا ملاحظه می‌کنیم که برای اثبات حکم استقرا باید درستی نابرابری $(k+1)^3<3k^3$ را نشان دهیم:

$k^3+3k^2+3k+1<3k^3$

برای اثبات این نابرابری، با فرض $k\ge 4$، درستی دو نابرابری $k^3+1<k^3+k^3$ و $3k^2+3k<k^3$ را ثابت می‌کنیم:

۱) $k^3+1<k^3+k^3 \Leftrightarrow k^3>1$ (برای $k\ge 4$ درست است)

۲) $3k^2+3k<k^3 \Rightarrow k^3-3k^2-3k>0;$

$k(k^2-3k-3)>0 \quad (I)$

با فرض $k\ge 4$ و تشکیل جدول تعیین علامت برای عبارت $P=k^2-3k-3$، درستی رابطهٔ (I) برقرار است. پس حکم برای هر عدد طبیعی $n\ge 4$ برقرار است.

ب)

$n=1:\ 1>3 \quad ; \quad n=5:\ 120>243$
$n=2:\ 2>9 \quad ; \quad n=6:\ 720>729$
$n=3:\ 6>27 \quad ; \quad n=7:\ 5040>2187$
$n=4:\ 24>81 \quad ; \quad n=8:\ 40320>6561$

ملاحظه می‌کنیم که $m=7$.

فرض استقرا $n=k\ge 7:\ k!>3^k$

حکم استقرا $n=(k+1):\ (k+1)!>3^{k+1}$

دو طرف فرض استقرا را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$3k!>3^{k+1}$

برای اثبات حکم استقرا، باید نابرابری $(k+1)!>3k!$ را برای $k\ge 7$ ثابت کنیم:

$(k+1)!>3k! \Rightarrow (k+1)k!>3k! \Rightarrow k>2$

نابرابری آخر برای هر $k\ge 7$ برقرار است، پس حکم استقرا برای هر عدد طبیعی $n\ge 7$ درست است.

ج)

$n=1:\ 1<\frac{1}{2}$

$n=2:\ 1+\frac{1}{3}<\frac{2}{2};\ \frac{4}{3}<1$

$n=3:\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}<\frac{3}{2};\ \frac{31}{21}<\frac{3}{2}$

$n=4:\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}<\frac{4}{2};\ \frac{162}{105}<2$

ملاحظه می‌کنیم که $m=3$.

فرض استقرا $n=k\ge 3:\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}<\frac{k}{2}$

حکم استقرا $n=k+1$:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k+1}{2}=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}$$

به دو طرف فرض استقرا، $\frac{1}{2}$ را اضافه می‌کنیم:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2}<\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$$

برای اثبات حکم استقرا، باید درستی نابرابری زیر را نشان دهیم:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{1}{2}\Rightarrow 2^{k+1}-1>2\Rightarrow 2^{k+1}>3$$

نابرابری آخر، برای هر $k\ge 3$ برقرار است؛ بنابراین حکم استقرا برای هر عدد طبیعی $n\ge 3$ برقرار است.

د)

$$n=1:\ \frac{1}{\sqrt{1}}>\sqrt{1}$$

$$n=2:\ \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$$

$$n=3:\ \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}>\sqrt{3}$$

ملاحظه می‌کنیم که $m=2$.

فرض استقرا $n=k\ge 2$: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$

حکم استقرا $n=k+1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

به دو طرف فرض استقرا $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

برای اثبات حکم استقرا، باید نشان دهیم:

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}\Rightarrow\frac{\sqrt{k^2+k}+1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

$$\Rightarrow\sqrt{k^2+k}+1>k+1$$

$$\Rightarrow\sqrt{k^2+k}>k\Rightarrow k>0$$

نابرابری آخر، برای هر $k\ge 2$ برقرار است. بنابراین حکم استقرا برای هر عدد طبیعی $n\ge 2$ برقرار است.

به مثال‌هایی که تاکنون حل شد، دقت کنید. در همگی آن‌ها برای اثبات درستی حکم به ازای $n=k+1$، نیاز به یک فرض داشتیم؛ یعنی فرض می‌کردیم که حکم به ازای $n=k$ برقرار است. اما در بعضی از مسائل استقرا، برای اثبات درستی حکم به ازای عدد طبیعی n، به دو یا چند فرض نیاز داریم. برای مثال، در بعضی از حکم‌ها لازم است که فرض کنیم، حکم برای عددهای طبیعی $(n-1)$ و $(n-2)$ برقرار است. سپس با استفاده از این دو فرض می‌توانیم حکم استقرا را ثابت کنیم. در این گونه مسائل باید از **اصل استقرای قوی ریاضی** استفاده کنیم.

اصل استقرای قوی ریاضی

هر زیرمجموعه S از $\mathbb{N}$ که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعهٔ $\mathbb{N}$ برابر است:

۱. $1\in S$.

۲. اگر اعداد کوچک‌تر از n در S باشند، آن‌گاه $n\in S$.

معادل اصل استقرای قوی ریاضی

فرض کنیم $P(n)$ حکمی دربارهٔ عدد طبیعی n باشد. برای اثبات درستی این حکم به کمک معادل اصل استقرای قوی ریاضی، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحلهٔ اول: حکم باید به ازای $n=1$ درست باشد.

مرحلهٔ دوم: فرض‌های استقرا: فرض می‌کنیم که حکم به‌ازای عددهای طبیعی کم‌تر از $n\in\mathbb{N}$ درست باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم که حکم به ازای عددهای طبیعی $1,2,3,\dots,n-3,n-2,n-1$ برقرار باشد.

مرحلهٔ سوم: حکم استقرا: ثابت می‌کنیم که حکم برای عدد طبیعی n درست است.

مرحلهٔ چهارم: در این صورت حکم برای هر عدد طبیعی n درست است.

مثال: دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی

دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی را با $\{u_n\}$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u_1 = u_2 = 1 , \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

با توجه به تعریف بالا، دنبالهٔ عددهای فیبوناتچی به صورت زیر است:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

ثابت کنید در دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی، جملهٔ عمومی آن از دستور زیر به دست می‌آید:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

حل. به رابطهٔ $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ دقت کنید. ملاحظه می کنیم که جمله nام دنبالهٔ فیبوناتچی بر اساس جمله های (n−1)ام و (n−2)ام به دست می‌آید. یعنی برای اثبات درستی حکم به ازای $n \in \mathbb{N}$، باید درستی حکم را برای عددهای طبیعی (n−1) و (n−2) فرض کنیم. به همین منظور ازمعادل اصل استقرای قوی ریاضی استفاده می کنیم:

$$n = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$$ درست است

فرض های استقرا: فرض کنیم که حکم برای عددهای طبیعی کم‌تر از n برقرار باشد. یعنی جمله های u_1، u_2، u_3، ...، u_{n-2}، u_{n-1} برطبق دستور داده شده باشند. اکنون ثابت می کنیم که جمله nام دنبالهٔ فیبوناتچی از این دستور به دست می آید:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} =$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \quad (1)$$

می دانیم که:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

با قرار دادن (2) و (3) در (1) داریم:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

در نتیجه حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

مثال. دنبالهٔ $\{a_n\}$ با تعریف زیر را درنظر بگیرید:

$$a_0 = 2 , a_1 = 3 , \quad a_n = a_1 a_{n-1} - a_0 a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

جملهٔ عمومی این دنباله را بر حسب n بنویسید.

حل. ابتدا جملهٔ عمومی این دنباله را با استدلال استقرایی حدس می زنیم. سپس به کمک معادل اصل استقرای قوی ریاضی آن را ثابت می کنیم؛ زیرا همان‌طور که ملاحظه می کنید، جملهٔ (n+1)ام این دنباله با استفاده از دو جمله قبل از آن، یعنی جمله های nام و (n−1)ام به دست می‌آید.

بنابه فرض مثال داریم:

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

چند جملهٔ نخست دنباله را پیدا می کنیم:

$n = 0: \ a_0 = 2 = 2^0 + 1$

$n = 1: \ a_1 = 3 = 2^1 + 1$

$n = 2: \ a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 9 - 4 = 5 = 2^2 + 1$

$n = 3: \ a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 15 - 6 = 9 = 2^3 + 1$

$n = 4: \ a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 27 - 10 = 17 = 2^4 + 1$

$n = 5: \ a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 51 - 18 = 33 = 2^5 + 1$

$n = 6: \ a_6 = 3a_5 - 2a_4 = 99 - 34 = 65 = 2^6 + 1$

در نتیجه می توان حدس زد که جملهٔ عمومی این دنباله

به صورت $a_n = 2^n + 1$ است. اکنون حدس خود را به کمک اصل استقرای قوی ریاضی ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم که حکم برای عددهای طبیعی $2 \le k < n$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم که جملهٔ nام این دنباله از دستور $a_n = 2^n + 1$ به دست می‌آید:

$$an = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3(2^{n-1}+1) - 2(2^{n-2}+1)$$
$$= 3\times 2^{n-1} + 3 - 2\times 2^{n-2} - 2$$
$$= (3\times 2 - 2)2^{n-2} + 1 = 4\times 2^{n-2} + 1$$
$$= 2^2 \times 2^{n-2} + 1 = 2^n + 1$$

بنابراین، حکم برای هر عدد طبیعی $n \ge 2$ برقرار است.

مثال. دنبالهٔ عددی $\{a_n\}$ با این شرط‌ها تعریف شده است:

$$a_0 = a \ , \ a_1 = b \ , \ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$$

ثابت کنید که جملهٔ عمومی این دنباله از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$a_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-1} \times \frac{b-a}{3\times 2^{n-1}}$$

حل. فرض کنیم که حکم برای عددهای صحیح $0 \le k < n$ برقرار باشد؛ یعنی:

$$a_0 = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{0-1} \times \frac{b-a}{3\times 2^{0-1}} = \frac{a+2b}{3} - \frac{2b-2a}{3} = a$$
$$a_1 = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{1-1} \times \frac{b-a}{3\times 2^{1-1}} = \frac{a+2b}{3} + \frac{b-a}{3} = b$$
$$a_2 = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{2-1} \times \frac{b-a}{3\times 2^{2-1}} = \frac{a+2b}{3} - \frac{b-a}{6} = \frac{a+b}{2}$$
$$\vdots$$
$$a_{n-2} = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-3} \times \frac{b-a}{3\times 2^{n-3}}$$
$$a_{n-1} = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-2} \times \frac{b-a}{3\times 2^{n-2}}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که جملهٔ nام این دنباله از همین دستور محاسبه می‌شود:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-2} \times \frac{b-a}{3\times 2^{n-2}} +$$
$$\frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-3} \times \frac{b-a}{3\times 2^{n-3}}\Big)$$
$$= \frac{a+2b}{3} + \frac{1}{2}\left[(-1)^{n-3} \times \frac{b-a}{3\times 2^{n-2}}(-1+2)\right]$$
$$= \frac{a+2b}{3} + \frac{1}{2}\left[(-1)^{n-1} \times (-1)^{-2} \times \frac{b-a}{3\times 2^{n-2}}\right]$$
$$= \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-1} \times \frac{b-a}{3\times 2^{n-1}}$$

پس حکم برای هر عدد صحیح نامنفی برقرار است.

تذکر ۱. در مثال قبل، از تعمیم معادل اصل استقرای قوی ریاضی (استقرای قوی تعمیم یافته) استفاده کردیم که به شرح زیر است.

فرض کنیم $p(n)$ حکمی دربارهٔ عدد صحیح n باشد. اگر به ازای یک $m \in Z$ ، $P(m)$ درست باشد و حکم برای هر $n \ge m$ برقرار باشد، آن‌گاه طی مراحل زیر حکم را ثابت می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: عدد صحیح m مناسب را پیدا می‌کنیم.

مرحلهٔ دوم: درستی حکم را به ازای $n=m$ بررسی می‌کنیم.

مرحلهٔ سوم: فرض‌های استقرا: فرض می‌کنیم که حکم برای عددهای صحیح $m \le k < n$ برقرار باشد.

مرحلهٔ چهارم: حکم استقرا: ثابت می‌کنیم که حکم برای عدد صحیح n درست است.

مرحلهٔ پنجم: در این صورت حکم برای هر عدد صحیح $n \ge m$ برقرار است.

تذکر ۲. برای اثبات تمام مسائلی که با استفاده از **معادل اصل استقرای ریاضی** ثابت می‌شوند، می‌توان از **معادل اصل استقرای قوی ریاضی** استفاده کرد. به این ترتیب که بعد از بررسی درستی حکم به ازای $n=1$، نوبت به نوشتن فرض‌های

استقرا می‌رسد که در این مرحله، فرض می‌کنیم، حکم برای عددهای طبیعی کم‌تر از n برقرار باشد. در مرحله‌ای که می‌خواهیم درستی حکم را به ازای عدد طبیعی n بررسی کنیم، فقط از یکی از فرض‌های استقرا (درستی حکم به ازای عدد طبیعی $(n-1)$) استفاده می‌کنیم.

مسأله. ثابت کنید هر عدد طبیعی $n > 1$ را می‌توان به حاصل ضربی از عددهای اول تجزیه کرد.

حل. اثبات به کمک اصل استقرای قوی ریاضی تعمیم یافته.

مرحلهٔ اول. فرض کنیم $n = 2$. می‌دانیم عدد ۲ را می‌توان به حاصل ضرب عددهای اول تجزیه کرد.

مرحلهٔ دوم. فرض کنیم که حکم برای عددهای طبیعی کمتر از n برقرار باشد، یعنی حکم برای عددهای $2, 3, 4, \ldots, (n-1)$ برقرار است.

مرحلهٔ سوم: ثابت می‌کنیم که حکم برای عدد طبیعی n نیز برقرار است.

اگر n عددی اول باشد که حکم درست است، فرض کنیم که n اول نباشد، لذا n مرکب است. پس می‌توان آن را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی به صورت $n = m \times k$ نوشت، واضح است که m و k هر دو کمتر از n هستند، پس بنابه فرض استقرا m و k را می‌توان به صورت حاصل ضرب عددهای اول نوشت. در نتیجه $n = m \times k$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب عددهای اول نوشت.

مرحلهٔ چهارم. پس حکم برای هر عدد طبیعی $n > 1$ برقرار است.

تمرین: درستی این اتحادها را ثابت کنید.

۱.

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \times n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

۲.

$$1\times2\times3 + 2\times3\times4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

۳.

$$\frac{1}{1\times3\times5} + \frac{1}{3\times5\times7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$$

۴.

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\ldots(1-\frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

۵.

$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\ldots(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

۶. مطلوب است محاسبهٔ حد زیر:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times5} + \frac{1}{5\times9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right)$$

۷. دنبالهٔ $\{u_n\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{n+2}{2}u_n$$

جملهٔ عمومی این دنباله را بر حسب n به دست آورید.

فهرست منابع

۱. جبر و احتمال (کتاب درسی)

۲. ریاضیات گسسته (کتاب درسی)

۳. جبر و احتمال / حمیدرضا امیری و میرشهرام صدر / انتشارات مدرسه

۴. استقرای ریاضی / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه

ادب ریاضی

[illegible]

۷۰ سالگی در شهر آکسفورد انگلستان درگذشت. عبدالسلام در سال ۱۳۵۸ شمسی (۱۹۸۰ م) همراه با دو فیزیکدان دیگر به نام‌های واینبرگ و گلاشو، به کسب جایزهٔ نوبل دست یافت. این جایزه به خاطر ارائهٔ «نظریه نیروهای بنیادی» به این دانشمندان اعطا شد که یکی از نقاط عطف در پیشرفت علم فیزیک نظری قرن بیستم است.

یکی از کارهای بزرگ این سه نفر، یافتن معادلاتی است که بین نیروی مغناطیس یا نیروی هسته‌ای ضعیف، ارتباطی (یا تقارنی) ضعیف را نشان می‌دهند.