۳

حمیدرضا امیری

احتمال شرطی

(قضیه‌ی حاصل‌ضرب، نمودار درختی، افرازها و قضیه‌ی بیز)

برای دانش‌آموزان دوره پیش‌دانشگاهی

اشاره: در شماره‌ی قبل مشاهده شد که با توجه به رابطه‌ی $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$ حاصل شده که به قانون ضرب احتمالات معروف است. حال می‌توانیم با استفاده از استقرای ریاضی تعمیم رابطه‌ی فوق را به‌عنوان یک قضیه (قضیه‌ی حاصل ضرب) به صورت زیر بیان کنیم.

قضیه‌ی حاصل‌ضرب: اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند خواهیم داشت:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cdots\cap A_n)$$
$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

قضیه‌ی حاصل‌ضرب ما را در حل بسیاری از مسائل احتمال یاری می‌دهد. در زیر به بیان چند نمونه از این مسایل می‌پردازیم:

مسأله‌ی ۱: در جعبه‌ای ۱۱ مهره‌ی سیاه و سفید داریم که ۴ تای آن‌ها سیاه است. ۳ مهره را به تصادف و یکی پس از دیگری (بدون جایگذاری) بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد که هر سه مهره سفید باشند؟

حل: توجه دارید که در حل این مسأله و پس از خارج کردن مهره‌ی اول به نوعی باید از احتمال شرطی استفاده کرد: یعنی احتمال سفید بودن مهره‌ی دوم را بدهیم به شرط آن که اولی سفید باشد و احتمال سفید بودن مهره‌ی سوم را بدهیم به شرط آن که مهره‌های اول و دوم سفید باشند؛ و به همین دلیل می‌نویسیم: (احتمال سفید بودن مهره‌ی اول و دوم و سوم را به ترتیب A_1, A_2, A_3 فرض می‌کنیم)

$$P(\text{هر سه سفید})=P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|A_1\cap A_2)$$
$$=\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}=\frac{۱۴}{۶۶}$$

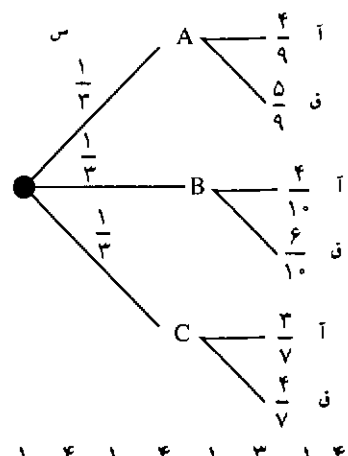
(وقتی می‌خواهیم احتمال سفید بودن مهره‌ی دوم را حساب کنیم فرض می‌کنیم مهره‌ی اول سفید بوده است، پس ۱ مهره از

مهره‌های سفید و ۱ مهره از اعضای فضای نمونه‌ای کم می‌کنیم و برای محاسبه‌ی احتمال سفید بودن مهره‌ی سوم فرض می‌کنیم که دو مهره‌ی اول و دوم سفید بوده‌اند؛ پس شرط سفید بودن مهره‌های اول و دوم برای مهره‌ی سوم فرض شده و به همین دلیل دو مهره از مهره‌های سفید و دو مهره از فضای نمونه‌ای کم کرده‌ایم)

فرآیندهای تصادفی متناهی و نمودار درختی

تعدادی (متناهی) آزمایش که هر کدام از آن‌ها دارای نتایج متناهی با احتمالی معین باشند یک **فرآیند تصادفی متناهی** نامیده می‌شود. نمودارهای درختی، مطابق آنچه در زیر خواهد آمد، روش بسیار خوبی برای تجزیه و تحلیل و تشریح چنین فرآیندهایی به شمار می‌رود. زیرا محاسبه‌ی احتمال فرآیندهای تصادفی از طریق نمودارهای درختی، خطا را به صفر رسانیده و از هرگونه جاافتادگی حالت‌ها یا زیاده‌گویی و تکرار بی‌مورد جلوگیری می‌کند. دقت داشته باشید که محاسبه‌ی احتمال روی هر یک از شاخه‌های نمودار درختی توسط قضیه‌ی حاصل‌ضرب انجام می‌پذیرد.

مسأله‌ی ۲: در سه جعبه‌ی A و B و C به ترتیب ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی؛ ۶ قرمز و ۴ آبی؛ ۴ قرمز و ۳ آبی وجود دارد. یکی از این سه جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟

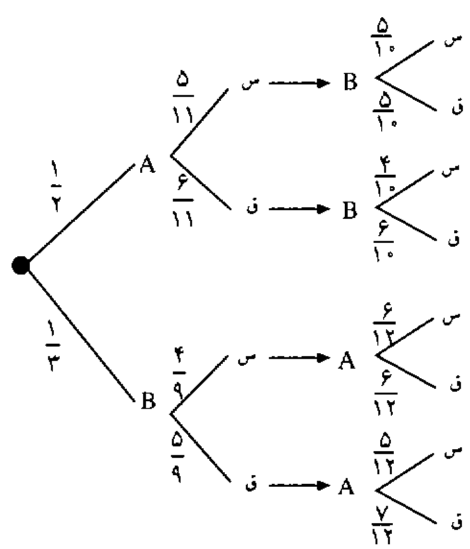


$$P(\text{آبی})=\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۹}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۱۰}+\frac{۳}{۷}\right)$$

مسأله‌ی ۳: در جعبه‌ی A، ۵ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی قرمز و در جعبه‌ی B، ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. یکی از دو جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج کرده و در جعبه‌ی دیگر می‌گذاریم و سپس از آن جعبه‌ی دیگر مهره‌ای به تصادف برمی‌داریم.

الف: چقدر احتمال دارد مهره‌ی دوم قرمز باشد؟

ب: چقدر احتمال دارد دو مهره همرنگ باشند؟

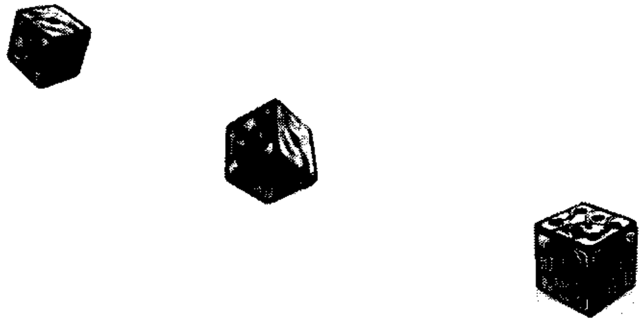


الف: با توجه به نمودار و این که به طور مثال اگر مهره‌ی سفید از جعبه‌ی A خارج شود و در جعبه‌ی B قرار گیرد ۱ مهره‌ی سفید به مهره‌های سفید و ۱ مهره به فضای نمونه‌ای جعبه‌ی B اضافه می‌شود؛ داریم (روی مسیرها یا شاخه‌هایی حرکت می‌کنیم که به قرمز (ق) منتهی شود):

$$P(\text{قرمز})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۶}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۷}{۱۲}$$

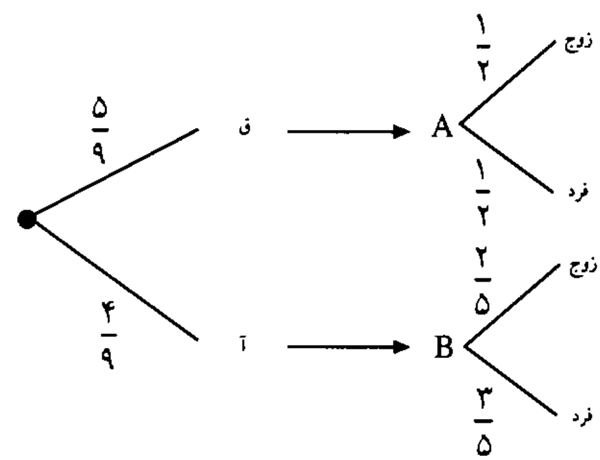
ب: برای حل قسمت ب روی مسیرهایی حرکت می‌کنیم که دو سفید یا قرمز وجود داشته باشد.

$$P(\text{دومهره همرنگ})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}$$
$$+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۶}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۷}{۱۲}$$



مسأله‌ی ۴ : در جعبه‌ای ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی وجود دارد و دو مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ مفروضند. یک مهره از جعبه به تصادف خارج می‌کنیم؛ اگر قرمز باشد از مجموعه‌ی A و اگر آبی باشد از مجموعه‌ی B عددی به تصادف برمی‌داریم. چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده فرد باشد؟

حل: نمودار درختی این فرایند تصادفی را رسم می‌کنیم:



$$P(\text{فرد}) = \frac{۵}{۹}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۵}$$

قانونِ بیز و کاربردهای آن

با توجه به این که $(A\cap B)=(B\cap A)$ و قانون ضرب احتمالات می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(B)\times P(A|B)\\P(B\cap A)&=P(A)\times P(B|A)\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow P(B)\times P(A|B)=P(A)\times P(B|A)$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)$$

در واقع قانون فوق ارتباطی است بین $P(A|B)$ و $P(B|A)$ و این ارتباط در حل بسیاری از مسائل پیچیده‌ی احتمال به کمک ما می‌آید و راه‌حل را قابل فهم و ساده در اختیار ما قرار می‌دهد.

گاهی اوقات شرط و مشروط به گونه‌ای تعریف می‌شوند که ما نمی‌توانیم ارتباط لازم و قابل‌فهمی بین آن‌ها برقرار کنیم، ولی اگر جای شرط و مشروط را عوض کنیم مسأله به راحتی قابل فهم و حل است؛ به عبارت دیگر ممکن است $P(A|B)$ مفهوم نباشد ولی $P(B|A)$ کاملاً قابل درک باشد. به مسأله‌ی بعد توجه کنید:

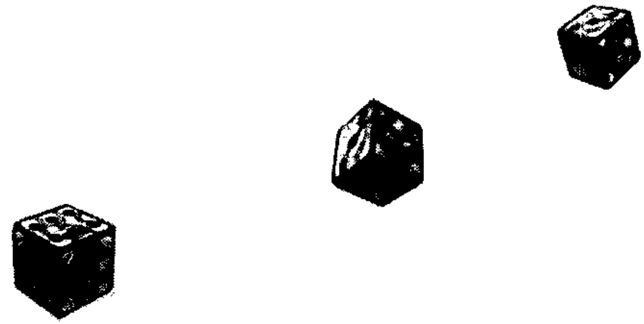
مسأله‌ی ۵ : در جعبه‌ی A، ۴ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی B، ۶ مهره‌ی قرمز و ۲ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی C، ۳ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. یکی از سه جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. اگر این مهره آبی باشد چقدر احتمال دارد از جعبه‌ی C باشد؟

حل: اگر B را پیشامدی که رخ داده (مهره آبی است) و A را پیشامد مطلوب (مهره از جعبه‌ی C باشد) فرض کنیم باید $P(A|B)$ را به دست آوریم که تا حدودی نامفهوم است (احتمال این که از جعبه‌ی C باشد به شرطی که بدانیم آبی است) ولی اگر جای A و B عوض شود $P(B|A)$ کاملاً مفهوم است یعنی احتمال آن که مهره آبی باشد به شرط آن که بدانیم از جعبه‌ی C انتخاب شده است که برابر است با $\frac{۵}{۸}$، و با توجه به قانون بیز یعنی $P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)$ محاسبه‌ی $P(A|B)$ نیز آسان خواهد بود (توجه دارید که $P(A)$ یعنی احتمال آن که مهره از جعبه‌ی C باشد که $\frac{۱}{۳}$ است و $P(B)$ یعنی احتمال آبی بودن مهره که شبیه مسأله‌ی ۲ و به روش درختی قابل محاسبه است.

$$P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}(\frac{۴}{۸}+\frac{۲}{۸}+\frac{۵}{۸})}\times\frac{۵}{۸}=\frac{\frac{۵}{۸}}{\frac{۱۱}{۸}}=\frac{۵}{۱۱}$$

یک راه‌حل شگفت‌انگیز و بسیار ساده برای مسأله‌ی فوق

ما می‌خواهیم احتمال این را حساب کنیم که مهره از جعبه‌ی

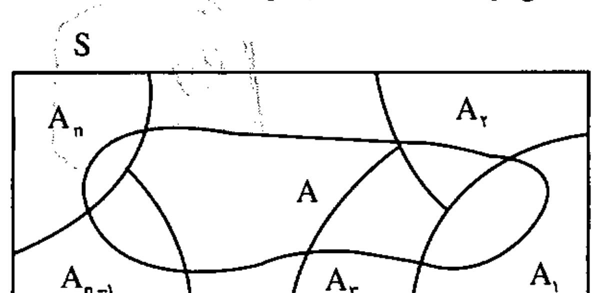


C باشد به شرط آن که بدانیم مهره‌ی انتخابی آبی است. پس فضای نمونه‌ای را پیشامد رخ داده در نظر می‌گیریم، یعنی تعداد کلّ مهره‌های آبی که تعدادشان ۱۱ عدد است و تعداد مهره‌های آبی در جعبه‌ی C، ۵ می‌باشد، پس احتمال مورد نظر، $\frac{5}{11}$ است!

تذکر بسیار مهمّ: از روش ذکر شده فقط وقتی می‌توان استفاده کرد که تعداد کلّ مهره‌ها در هر جعبه با جعبه‌های دیگر برابر باشد. در مسأله‌ی قبل هر سه جعبه دارای ۸ مهره می‌باشند و در واقع فضای نمونه‌ای هر جعبه با جعبه‌های دیگر همشانس است. حال اگر تعداد مهره‌های جعبه‌ها برابر نباشد، جواب صحیح فقط از طریق قانون بیز قابل محاسبه است.

قضیه‌ی افرازها (قانون احتمال کلّ)

گاهی اوقات پیشامد A از فضای نمونه‌ای S پیشامدی با تعداد حالت‌های بسیار زیاد بوده و لذا عملاً امکان محاسبه‌ی احتمال رخداد آن از طریق نمودار درختی ضعیف است و حجم زیادی از عملیات جبری را به خود اختصاص می‌دهد. حال اگر بتوانیم افرازی مناسب و شناخته‌شده برای پیشامد A در نظر بگیریم، با توجه به قضیه‌ی افرازها یا قانون احتمال کلّ به راحتی می‌توان با راه‌حلّی کوتاه، P(A) را محاسبه کرد.



با توجه به شکل قبل می‌توان نوشت:

$$A = S\cap A = (A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cap A$$
$$= (A_1\cap A)\cup\cdots\cup(A_n\cap A)$$

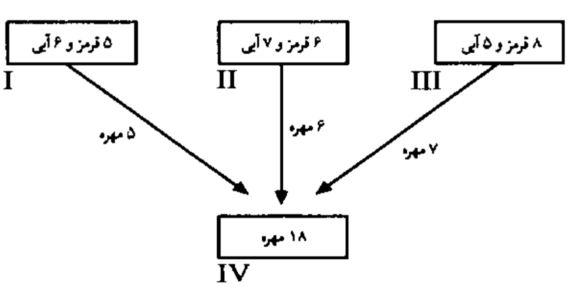
و چون A_iها افرازی برای مجموعه‌ی A هستند لذا همه‌ی $(A_i\cap A)$ ها با هم ناسازگارند و می‌توان نوشت،

$$P(A) = P(A_1\cap A) + P(A_2\cap A)+\cdots+P(A_n\cap A)$$

$$\xrightarrow{\text{قانون ضرب}} P(A) = P(A_1)P(A|A_1)$$
$$+P(A_2)P(A|A_2)+\cdots+P(A_n)P(A|A_n)$$
$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)$$

تساوی اخیر به قانون احتمال کلّ معروف است.

مسأله‌ی ۶: در سه جعبه‌ی (I)، (II) و (III) به ترتیب، ۵ قرمز و ۶ آبی، ۶ قرمز و ۷ آبی، ۸ قرمز و ۵ آبی وجود دارد از جعبه (I) ۵ مهره و از جعبه‌ی (II) ۶ مهره و از جعبه‌ی (III) ۷ مهره به تصادف خارج کرده و به صورت دَرهم در جعبه‌ی شماره (IV) که خالی بوده، می‌ریزیم و سپس مهره‌ای از جعبه‌ی (IV) به تصادف برمی‌داریم چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟



همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای ۱۸ مهره‌ای که در جعبه‌ی (IV) قرار گرفته حالت‌های بسیار متنوع و زیادی می‌توانیم در نظر بگیریم. بنابراین به فکر افرازی مناسب برای فضای نمونه‌ای هستیم و اگر پیشامد آبی بودن مهره را A فرض کنیم، بهترین و مناسب‌ترین افراز به صورت زیر تعریف می‌شود.

A_1 = مهره از جعبه‌ی (I) باشد

A_2 = مهره از جعبه‌ی (II) باشد

A_3 = مهره از جعبه‌ی (III) باشد

در واقع ما مسأله را از آخر به اول نگاه کردیم؛ یعنی گفتیم که اگر از جعبه‌ی (IV) مهره‌ای به تصادف خارج کنیم از این سه

حالت خارج نیست : یا مهره از جعبه ی (I) بوده یا از جعبه ی (II) و یا جزء هفت مهره‌ای بوده که از جعبه ی (III) درون (IV) قرار گرفته است . دقت دارید که افراز فوق کاملاً شناخته شده و مفهوم هستند ، یعنی جعبه های (I) ، (II) و (III) را ما کاملاً می شناسیم ؛ حال می توان نوشت :

$$P(A) = P(A_1) \times P(A|A_1) + P(A_2) \times P(A|A_2)$$
$$+P(A_3) \times P(A|A_3)$$

$P(A_1)$ یعنی احتمال آن که مهره از جعبه ی (I) باشد و مقدار این احتمال $\frac{5}{18}$ است زیرا از ۱۸ مهره‌ای که در جعبه ی (IV) قرار دارد ، ۵ مهره از جعبه ی (I) است و $P(A|A_1)$ یعنی احتمال آن که مهره آبی باشد به شرط آن که بدانیم از جعبه ی (I) است که مقدار آن برابر است با $\frac{6}{11}$ (۶ آبی در بین ۱۱ مهره ی جعبه ی (I) وجود دارد) پس به همین صورت برای قسمت‌های بعد می توان نوشت :

$$P(A) = \frac{5}{18} \times \frac{6}{11} + \frac{6}{18} \times \frac{7}{13} + \frac{7}{18} \times \frac{5}{13}$$

نتیجه ی مهّم : با توجه به قانون بیز و قانون احتمال کلّ می توان نوشت :

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \times P(B|A)$$

(در بعضی از منابع رابطه ی فوق را به عنوان قضیه ی بیز معرفی کرده‌اند)

تذکر مهّم : در مسائل احتمال شرطی که رنگ یا نوع یا جنس اشیاء مورد نظر باشد از نمودار درختی استفاده می شود ولی اگر رنگ یا نوع یا جنس اشیاء مشخص و مفروض در نظر گرفته شود و منبع آن شیئی مورد نظر باشد از قضیه ی بیز استفاده می شود .

تذکر : گاهی اوقات در حل مسائل احتمال شرطی از رابطه ی اصلی احتمال شرطی استفاده می شود ، یعنی از رابطه ی $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. به مثال بعد توجه کنید .

مسأله ی ۷ : در یک کلاس ۲۰٪ دانش‌آموزان در درس ریاضی ، ۱۵٪ در درس شیمی و ۱۰٪ در هر دو درس مردود شده‌اند . دانش‌آموزی را به طور تصادفی از این کلاس انتخاب می کنیم . مطلوب است احتمال آن که :

I) در درس ریاضی مردود باشد به شرط آن که بدانیم در شیمی مردود است .

II) در درس شیمی مردود باشد به شرط آن که بدانیم در ریاضی مردود است .

III) در درس ریاضی یا شیمی مردود باشد .

حل : فرض کنیم :

پیشامد مردود بودن در ریاضی = M

پیشامد مردود بودن در شیمی = C

$$\text{I)}\ \ P(M|C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\text{II)}\ \ P(C|M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{III)}\ \ P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C)$$
$$= \frac{20}{100} + \frac{15}{100} - \frac{10}{100}$$
$$\Rightarrow P(M \cup C) = \frac{25}{100}$$

تذکر : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $\overline{A}$ متمم پیشامد A باشد . در این صورت داریم :

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)}$$
$$= \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$= 1 - P(A|B)$$
$$\Rightarrow P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$$