احتمال شرطی در فضاهای هم‌شانس و غیرهم‌شانس

• حمیدرضا امیری

می‌دانیم، احتمال رخداد پیشامد A به شرط آن‌که پیشامد B (هر دو از فضای نمونه‌ای S) رخ داده باشد، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

از طرف دیگر می‌دانیم، اگر $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ فضای نمونه‌ای یک پدیده یا آزمایش تصادفی باشد و $A\subseteq S$ پیشامدی تصادفی در فضای نمونه‌ای S باشد و فرض کنیم: $A=\{s_1,s_2,\dots,s_k\}$، در این صورت برای محاسبه‌ی $p(A)$ دو حالت در نظر گرفته می‌شود:

۱. اگر فضای نمونه‌ای S هم‌شانس باشد، یعنی برای هر i و j داشته باشیم: $p(\{S_i\})=p(\{S_j\})=\frac{1}{n}$، در این صورت:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{k}{n}$$

که در واقع، $\frac{k}{n}$ همان مجموع احتمال پیشامدهای ساده‌ی A است، یعنی:

$$p(A)=p(\{S_1\})+p(\{S_2\})+\dots+p(\{S_k\})=\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$$

۲. اگر فضای نمونه‌ای S غیرهم‌شانس باشد، یعنی i و j‌ای وجود داشته باشند، به قسمی که: $p(\{S_i\})\neq p(\{S_j\})$، در این صورت برای محاسبه‌ی $p(A)$ باید احتمال همه‌ی پیشامدهای ساده‌ی A را با هم جمع کنیم؛ یعنی:

$$p(A)=p(\{S_1\})+\dots+p(\{S_k\})$$

در واقع، از رابطه‌ی $p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ فقط در فضاهای هم‌شانس می‌توان استفاده کرد.

بنابراین، اگر فرمول احتمال شرطی را به صورت زیر ساده کنیم، یعنی بنویسیم:

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

فقط زمانی حق داریم از ساده شده‌ی این فرمول استفاده کنیم که فضای نمونه‌ای S، فضایی هم‌شانس تعریف شده باشد.

به مثال زیر توجه کنید:

مثال: اگر $S=\{a,b,c,d\}$، به طوری که $p(\{a,b\})=\frac{1}{5}$ و $p(\{a\})=p(\{b\})$ و $p(\{c\})=p(\{d\})$، در این صورت مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) $p(\{a,b,c\}|\{b,c,d\})$

ب) $p(\{d\}|\{b,d\})$

حل: واضح است که S فضایی غیر هم‌شانس است. پس ابتدا احتمال هر پیشامد ساده‌ی فضا را می‌یابیم (پیشامد ساده به پیشامدهای تک‌عضوی گفته می‌شود).

$$p(\{a,b\}) = p(\{a\}) + p(\{b\}) = \frac{۱}{۵}$$

$$\overset{\text{فرض}}{\Rightarrow} p(\{a\}) + p(\{a\}) = \frac{۱}{۵} \Rightarrow p(\{a\}) = \frac{۱}{۱۰} = p(\{b\})$$

$$p(S) = ۱ \Rightarrow p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) = ۱$$

$$\overset{\text{فرض}}{\Rightarrow} p(\{c\}) + p(\{c\}) = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow p(\{c\}) = \frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow p(\{d\}) = \frac{۲}{۵}$$

الف) $$p(\{a,b,c\}|\{b,c,d\}) = \frac{p(\{a,b,c\}\cap\{b,c,d\})}{p(\{b,c,d\})}$$

$$= \frac{p(\{b,c\})}{p(\{b,c,d\})} = \frac{p(\{b\}) + p(\{c\})}{p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\})}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۲}{۵}}{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۲}{۵} + \frac{۲}{۵}} = \frac{\frac{۵}{۱۰}}{\frac{۹}{۱۰}} = \frac{۵}{۹}$$

ب) $$p(\{d\}|\{b,d\}) = \frac{p(\{d\}\cap\{b,d\})}{p(\{b,d\})} = \frac{p(\{d\})}{p(\{b\}) + p(\{d\})}$$

$$= \frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۲}{۵}} = \frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۵}{۱۰}} = \frac{۴}{۵}$$

حال اگر به اشتباه بخواهیم از رابطه‌ی $p(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

الف) $$p(\{a,b,c\}|\{b,c,d\}) = \frac{n(\{b,c\})}{n(\{b,c,d\})} = \frac{۲}{۳}$$

ب) $$p(\{d\}|\{b,d\}) = \frac{n(\{d\})}{n(\{b,d\})} = \frac{۱}{۲}$$

که در هر دو مورد جواب غلط است. بنابراین، توجه به این مطلب اهمیت دارد که در فضاهای غیرهم‌شانس، هیچ‌گاه نباید از رابطه‌ی $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده کرد.

منظور اصلی‌ام را از نوشتن این مقاله، با ذکر یک مثال و در واقع طرح یک سؤال و ایجاد چالشی بیان می‌کنم!

مثال: خانواده‌ای دو فرزند دارد. اگر بدانیم یکی از فرزندان این خانواده پسر است، چه‌قدر احتمال دارد فرزند دیگر هم پسر باشد؟

حل: واضح است که فضای نمونه‌ای این پدیده یک فضای هم‌شانس است. یعنی اگر

S = {(پ و پ) و (د و د) و (پ و د) و (د و پ)}

فضای نمونه‌ای باشد، همواره:

p({(پ و پ)}) = p({(د و د)}) = p({(پ و د)}) = p({(د و پ)}) = $\frac{۱}{۴}$

یعنی:

p({(پ و پ)}) = p(اولی پسر و دومی پسر) = $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

p({(پ و د)}) = p(اولی دختر و دومی پسر) = $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

قبل از این‌که بخواهیم مسئله را از طریق فرمول احتمال شرطی حل کنیم، به طور معمول و طبیعی چه جوابی برای مسئله به ذهن شما می‌رسد؟ احتمال پسر بودن یک فرزند چه‌قدر است؟ بله درست فکر کرده‌اید. احتمال $\frac{۱}{۲}$ است. در واقع اگر خانواده‌ای هر تعداد فرزند داشته باشد، احتمال آن که یکی از آن‌ها (فرق نمی‌کند کدام یکی، اولی، دومی، ... یا آخری) پسر باشد، همواره $\frac{۱}{۲}$ است.

حالا همین مسئله را از طریق احتمال شرطی حل می‌کنیم؛ یعنی با محدود کردن فضای نمونه‌ای. می‌دانیم که گذاشتن شرط روی هر مسئله‌ی احتمال، فضای نمونه‌ای را محدود می‌کند. در این مثال نیز چون شرط کرده‌ایم یکی از فرزندان این خانواده پسر است، پس حالت (د و د) از بین می‌رود. یعنی اگر فرض کنیم، B پیشامدی باشد که رخ داده است و A پیشامد مطلوبی که به دنبال محاسبه‌ی احتمال آن هستیم، خواهیم داشت:

A = {(پ و پ)} و B = {(پ و پ) و (پ و د) و (د و پ)}

$$\Rightarrow p(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{۱}{۳}$$

به نظر شما کدام جواب، جواب واقعی و صحیح است: $\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۱}{۲}$؟ اگر $\frac{۱}{۲}$ جواب صحیح است، اشتباه کجا صورت گرفته؟ حال اگر بخواهیم همین مسئله را از طریق «قانون بیز» حل کنیم، کدام یک از دو جواب تأیید می‌شود؟

فرض کنیم A پیشامد آن باشد که فرزند دیگر هم پسر باشد (هر دو پسر)، و B پیشامد آن باشد که یکی از فرزندان پسر باشد. پس به

دنبال همان $p(A|B)$ هستیم که طبق قانون بیز داریم :

$$p(A|B)=\frac{p(A)}{p(B)}\times p(B|A)$$

$$p(A)=\frac{1}{4} \text{ و } p(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \text{ و } p(B|A)=1$$

($p(B|A)$ یعنی احتمال آن‌که یکی پسر باشد . اگر بدانیم هر دو پسرند ، همواره این احتمال ۱ است .)

$$p(A|B)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\times 1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

بنابراین مشاهده می‌شود ، همان عددی که قبل از حل مسئله نیز حدس زده بودید ، برای این احتمال حاصل می‌شود . لذا باید اشتباهی در محاسبه‌ی عدد $\frac{1}{3}$ صورت گرفته باشد!

در واقع این اشتباه از آن‌جا ناشی می‌شود که ما توجه نکردیم ، زمانی که شرطی روی یک مسئله گذاشته می‌شود و فضای نمونه‌ای محدود می‌شود ، این امکان وجود دارد که شرط گذاشته شده ، فضای نمونه‌ای را از حالت هم‌شانس خارج کند و فضای نمونه‌ای محدود شده ، به یک فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس تبدیل شود . به عبارت دیگر ، گاهی اوقات شرط گذاشته شده چنان است که دیگر در فضای نمونه‌ای حاصل ، احتمال هر عضو فضای نمونه‌ای با اعضای دیگر برابر نیست .

در مثال فوق ، ابتدا فضای نمونه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود .

{(پ و د) و (د و پ) و (د و د) و (پ و پ)}= S

وقتی شرط می‌کنیم که «یکی از فرزندان پسر است» ، واضح است که حالت (د و د) از S حذف و فضای نمونه‌ای محدودشده به صورت {(د و پ) و (پ و د) و (پ و پ)}=S' حاصل می‌شود . حال این سؤال پیش می‌آید که آیا با شرط اعمال شده ، S' یک فضای هم‌شانس است یا خیر؟ یعنی اگر ما بدانیم یکی از فرزندان پسر است ، آیا شانس (د و پ) با شانس (پ و پ) یکسان است؟ مسلماً چنین نیست! در واقع ، وقتی می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است ، شانس هر دو پسر از یکی پسر و یکی دختر بیشتر است . پس فضای غیرهم‌شانس تولید شده است و لذا حق نداریم در محاسبه‌ی احتمال ، از رابطه‌ی $p(A)=\frac{n(A)}{n(S')}$ استفاده کنیم .

به یک مثال دیگر توجه کنید :

اگر سه کارت A_1 و A_2 و A_3 به ترتیب با این ویژگی که A_1 هر دو طرفش قرمز و A_2 یک طرف قرمز و یک طرف آبی و A_3 هر دو طرف آبی ، مفروض باشند و این سه کارت را در یک کیسه بریزیم و یک کارت به تصادف خارج کنیم ، به شرط آن‌که بدانیم یک طرف کارت قرمز است ، چه‌قدر احتمال دارد طرف دیگر آن نیز قرمز باشد؟

برای حل این مسئله نیز اگر نکات ذکر شده و مطلب مهم در مسئله‌ی قبل را در نظر نگیریم ، جوابی اشتباه خواهیم یافت . به این ترتیب که می‌گوییم چون می‌دانیم یک طرف کارت قرمز است ، پس فضای نمونه‌ای حاصل و محدود شده به صورت $S'=\{A_1,A_2\}$ به دست می‌آید و احتمال آن‌که کارت A_1 (هر دو طرف قرمز) خارج شده است ، برابر است با $\frac{1}{2}$ که این پاسخ اشتباه است . اما اگر به این نکته توجه کنیم که شرط گذاشته شده روی مسئله ، فضای S' را به فضایی غیرهم‌شانس تبدیل کرده است ، از «قانون بیز» و قانون احتمال کل که در آن‌ها از $n(A)$ یا $n(S')$ استفاده نمی‌شود ، کمک می‌گیریم و به جواب درست هم خواهیم رسید!

حال فرض کنیم A پیشامد آن باشد که هر دو طرف قرمز باشد (کارت A_1 انتخاب شود) و B پیشامد آن باشد که یک طرف کارت قرمز است . پس باید $p(A|B)$ را محاسبه کنیم . طبق قانون بیز داریم :

$$p(A|B)=\frac{p(A)}{p(B)}\times p(B|A)$$

هم‌چنین برای محاسبه‌ی $P(B)$ به دو طریق می‌توان عمل کرد : یکی آن‌که احتمال قرمز بودن یک طرف کارت را مستقیماً با توجه به این‌که در سه کارت مفروض ، سه طرف آبی و سه طرف قرمز داریم ، پس احتمال قرمز بودن یک طرف قرمز برابر است با $\frac{3}{6}$ یا $\frac{1}{2}$.

و راه دیگر ، استفاده از قانون احتمال کل است . به این ترتیب که کارت انتخاب شده یا A_1 است یا A_2 و یا A_3 . پس می‌توان نوشت :

$$p(B)=p(B|A_1)\times p(A_1)+p(B|A_2)\times p(A_2)+p(B|A_3)\times p(A_3)$$

$$\Rightarrow p(B)=1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

($p(B|A_1)$ یعنی احتمال آن‌که یک طرف قرمز باشد ، به شرط آن‌که بدانیم کارت A_1 انتخاب شده که این احتمال ۱ است .)

مشاهده می‌کنید که از هر دو راه ، احتمال قرمز بودن یک طرف کارت $\frac{1}{2}$ است . پس می‌توان نوشت :

$$p(A|B)=\frac{p(A)}{p(B)}\times p(B|A)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\times 1=\frac{2}{3}$$

($P(A)$ یعنی احتمال آن‌که کارت A_1 انتخاب شود و $P(B|A)$ یعنی احتمال آن‌که یک طرف قرمز باشد ، به شرط آن‌که بدانیم A_1 انتخاب شده است .)

بنابراین ، در حل مسائل احتمال شرطی باید به این نکته توجه کنیم که در مواردی ممکن است شرط اعمال‌شده روی مسئله ، فضای نمونه‌ای محدود شده‌ی غیرهم‌شانس به‌وجود آورد که در این شرایط برای حل مسئله از قوانینی چون قانون بیز یا قانون احتمال کل استفاده خواهیم کرد .