اثبات نادرستی

«ادامهٔ منطق ریاضی»

● غلامرضا یاسی‌پور

◆ **اثبات نادرستی**[1]

در فصل قبل نادرستی استدلالات نادرست شامل گزاره‌های مرکب تابع ارزشی را با نسبت دادن ارزشهای راستیی به گزاره‌های سادهٔ ترکیب کننده‌شان به طریقی که مقدمه‌هایشان را راست و نتایجشان را دروغ کنند، ثابت می‌کردیم. در این‌جا برای اثبات نادرستی استدلالات نادرست شامل تسویرات از روشی بسیار نزدیک و وابسته به آن روش استفاده می‌کنیم. روش اثبات نادرستیی که در شرف توصیف آنیم با فرض اساسیمان در این مورد که دست‌کم یک فرد موجود است، ارتباط دارد.

فرض وجود دست‌کم یک فرد را می‌توان به بی‌نهایت طریق مختلف: اگر دقیقاً یک فرد موجود باشد، یا اگر دقیقاً دو فرد موجود باشند، یا اگر دقیقاً سه فرد موجود باشند، و غیره برقرار کرد. در مورد هر حالت یک تعادل منطقی اکید بین قضایای کلی نامرکب و ترکیبات تابع ارزشی قضایای فردی (شخصی) وجود دارد، به این ترتیب، اگر دقیقاً یک فرد، مثلاً a، موجود باشد، در این صورت:

$[(x)\ \varphi\ x] \equiv \varphi\ a$ و $[(\exists\ x)\ \varphi\ x] \equiv \varphi\ a$

اگر دقیقاً دو فرد، مثلاً a و b، موجود باشند، در این صورت:

$[(x)\ \varphi\ x] \equiv [\varphi\ a \wedge \varphi\ b]$ و $[(\exists\ x)\ \varphi\ x] \equiv [\varphi\ a \vee \varphi\ b]$

و در مورد هر عدد k، اگر دقیقاً k فرد، مثلاً a، b، c، ...، k موجود باشند، در این صورت

$[(x)\ \varphi\ x] \equiv [\varphi\ a \wedge \varphi\ b \wedge \varphi\ c \wedge \ldots \wedge \varphi\ k]$

و

$[(\exists\ x)\ \varphi\ x] \equiv [\varphi\ a \vee \varphi\ b \vee \varphi\ c \vee \ldots \vee \varphi\ k]$

راستی این دو شرطیها نتیجهٔ فوری تعاریفمان از سورهای عمومی و وجودی است. در این‌جا از چهار قاعدهٔ تسویر مذکور در بخش قبل استفاده‌ای به عمل نیامده است. بنابراین در مورد هر عالم یا مدل[2] ناتهی شامل هر تعداد متناهی افراد، هر قضیهٔ کلی منطقاً معادل ترکیب تابع ارزشیی از قضایای فردی است. در نتیجه به ازای هر چنین مدلی هر استدلال شامل سورها منطقاً معادل استدلالی شامل تنها قضایای فردی و ترکیبات تابع ارزشی آنهاست.

استدلال شامل سورهایی درست است اگر و فقط اگر با حداقل یک فرد، بی‌توجه به این‌که چند فرد در آن موجود است درست باشد. بنابراین هر استدلال شامل سورها درست است اگر و فقط اگر به ازای هر عالم یا مدل ناتهی ممکنی منطقاً معادل استدلال تابع ارزشیی باشد که درست است. در نتیجه می‌توانیم نادرستی یک استدلال مفروض را با نمایش دادن یا توصیف کردن مدلی که استدلال مفروض به ازای آن منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزشی نادرست است، اثبات کنیم. به این مقصود می‌توانیم با ترجمهٔ استدلال شامل سورهای مفروض به استدلالی منطقاً معادل و شامل قضایای فردی و ترکیبات تابع ارزشی آنها نایل شویم. به عنوان مثال، استدلال زیر را داریم:

H W

تمام ماهیهای وال سنگین‌اند.

E

تمام فیلها سنگین‌اند.

بنابراین تمام ماهیهای وال فیل‌اند.

ابتدا این استدلال را به صورت زیر علائمی می‌کنیم:

$(x)\ [Wx \Rightarrow Hx]$

$(x)\ [Ex \Rightarrow Hx]$

$\therefore$ (x) [Wx ⇒ Ex]

در حالت مدل شامل دقیقاً یک فرد ، مثلاً a، استدلال مفروض منطقاً معادل

Wa ⇒ Ha

Ea ⇒ Ha

$\therefore$ Wa ⇒ Ea

است که با نسبت دادن ارزش راستی T به «Wa» و «Ha» وF به «Ea» ثابت می‌شود که نادرست است. این نسبت ارزشهای راستی طریق مختصر توصیف مدل مورد بحث به عنوان مدلی است که تنها شامل یک فرد a که W (ماهی وال) و H (سنگین) است اما E (فیل) می‌باشد.[۳] در نتیجه استدلال اصلی به ازای مدل شامل دقیقاً یک فرد درست نیست ، و بنابراین نادرست است.

باید تأکید شود که در اثبات نادرستی استدلالات شامل سورها از قواعد تسویرمان استفاده نشده است. در مورد مدل شامل تنها یک فرد a گزارهٔ «Wa ⇒ Ha» را از گزارهٔ «(x) [Wx ⇒ Hx]» با استفاده از UI استنتاج نمی‌کنیم ، چه این دو گزاره در مورد این مدل منطقاً معادل‌اند زیرا در آن «Wa ⇒ Ha» تنها مثال جانشین تابع گزاره‌ای «Wx ⇒ Hx» است.

می‌شود چنین اتفاق بیفتد که یک استدلال نادرست شامل سورها ، به ازای هر مدل شامل دقیقاً یک فرد، منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزشی درست باشد، هر چند که، به ازای هر مدل شامل بیش از یک فرد، منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزشی نادرست خواهد شد. به عنوان مثال ؛ استدلال

W
تمام ماهیهای وال سنگین‌اند.
E
بعضی فیلها سنگین‌اند.
بنابراین تمام ماهیهای وال فیل‌اند.

که به صورت

(x) [Wx ⇒ Hx]

(∃ x) [Ex ∧ Hx]

$\therefore$ (x) [Wx ⇒ Ex]

علامتی می‌شود را در نظر می‌گیریم. این استدلال به ازای مدلی شامل تنها یک فرد a منطقاً معادل

Wa ⇒ Ha

Ea ∧ Ha

$\therefore$ Wa ⇒ Ea

است که استدلالی درست است. اما به ازای مدلی شامل دو فرد a و b استدلال مفروض منطقاً معادل

(Wa ⇒ Ha) ∧ (Wb ⇒ Hb)

(Ea ∧ Ha) ∨ (Eb ∧ Hb)

$\therefore$ (Wa ⇒ Ea) ∧ (Wb ⇒ Eb)

است که با نسبت دادن ارزش راستی T به «Wa» ، «Wb» ، «Ha» ، «Hb» ، «Eb» ، و ارزش راستی F به «Ea» ثابت می‌شود که نادرست است. در نتیجه استدلال اصلی نادرست است، زیرا مدلی وجود دارد که به ازای آن مدل، منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزش نادرست است.

* * *

یادداشتها

1 . Proving Invalidity

2 . Universe or model

۳ . در این جا فرض بر این است که توابع گزاره‌ای سادهٔ «Ax» ، «Bx» ، «Cx» ، ... نه لازم‌اند، یعنی، منطقاً تصدیق همهٔ افراد (به عنوان مثال: x یکسان با خودش است)، نه ناممکن، یعنی، منطقاً تکذیب همهٔ افراد (به عنوان مثال، x متفاوت با خودش است).

همچنین فرض می‌کنیم که تنها روابط منطقی بین توابع گزاره‌ای ساده آنهایی هستند که توسط مقدمات استدلال نادرست ثابت شده، بیان یا منطقاً و به طور ضمنی مقرر شده‌اند. نکتهٔ این محدودیتها در این است که نسبت به دلخواه دادن ارزشهای راستی به مثالهای جانشین این توابع گزاره‌ای ساده را بدون ناسازگاری مجاز می‌کند ـ چه البته توصیفات مدلیمان باید سازگار باشند.

* * *

مرجع :

Symbolic Logic

Irving M . Copi