اثبات نادرستی و ناتمامی قواعد استنتاج

غلامرضا یاسی‌پور

حقیقت را چو ما صد پاره کردیم
تمیز ثابت و سیاره کردیم
در آن عالم که جزو از کل فزون است
قیاس رازی و طوسی جنون است[1]
«اقبال لاهوری»

اثبات نادرستی[2]

درصورتی که بتوانیم نشان دهیم که تخصیصی از ارزشهای راستی[3] چنان موجود است که به ازای آن جمیع مقدمات[4] استدلالی[5] راست و نتیجهٔ[6] آن دروغ است ثابت کرده‌ایم که استدلال مورد بحث نادرست است. این کار را در حالت کلی با استفاده از رسم جدول ارزش[7] انجام می‌دهیم، اما این طریق به خصوص در مواردی که تعداد متغیرهای گزاره‌ای[8] موجود در استدلال زیاد باشد، طریقی طولانی و پرزحمت است. در این صورت اولی چنان است که طریق زیر را،که بسیار ساده‌تر است، اما به اندکی تمرکز حواس نیاز دارد، انتخاب کنیم.

در این طریق ابتدا از نتیجه آغاز می‌کنیم و به متغیرهای گزاره‌ای واقع در آن ارزشهایی چنان تخصیص می‌دهیم که آن را دروغ کنند. سپس به سراغ مقدمات می‌رویم و با رعایت ارزشهای قبلاً داده شده ارزشهایی به متغیرهای گزاره‌ای باقیمانده چنان تخصیص می‌دهیم که مقدمات را راست کنند. اگر چنین عملی امکان‌پذیر باشد استدلال‌مان نادرست است والاّ درست می‌باشد.

مثال ۱.نادرستی استدلال زیر را اثبات کنید:

اگر باران می‌بارد یا بهار است یا پاییز.
اگر پاییز باشد هوا سرد و ناخوشایند است.
هوا سرد نیست.
درنتیجه، اگر باران می‌بارد هوا ناخوشایند است.

فرض می‌کنیم:

A: باران می‌بارد
B: بهار است
C: پاییز است
D: هوا سرد است
E: هوا ناخوشایند است

و به این ترتیب استدلال فوق را به صورت زیر علامتی می‌کنیم:

$A \Rightarrow (B \vee C)$

$C \Rightarrow (D \vee E)$

$\sim D$

$\therefore\ A \Rightarrow E$

اکنون کاری می‌کنیم که نتیجهٔ استدلال یعنی $A \Rightarrow E$ دروغ شود و برای این کار به A و E به‌ترتیب T و F را تخصیص می‌دهیم. برای این‌که مقدمهٔ سوم یعنی $D\sim$ راست باشد باید D دروغ باشد، در این صورت باتوجه به این‌که E هم دروغ بوده برای راست شدن مقدمهٔ دوم $(C \Rightarrow (D \vee E))$ ناچاریم که به C ارزش F را تخصیص دهیم. اکنون به سراغ مقدمهٔ اول می‌رویم. به مقدم[9] آن یعنی A قبلاً ارزش T داده‌ایم، بنابراین برای این که مقدمه راست شود باید تالی[10] آن راست باشد. اما تالی آن ترکیبی فصلی[11] است که یک مؤلفهٔ[12] آن (C) قبلاً F گرفته، بنابراین باید به مؤلفهٔ دیگر آن (B)، T بدهیم. به این ترتیب توانستیم به متغیرهای گزاره‌ای واقع در صورت استدلالی‌مان ارزشهای راستی‌ای چنان تخصیص بدهیم که مقدمات استدلال را راست ونتیجهٔ آن‌را دروغ کنند، و دراین‌صورت استدلال نادرست است.

برای سادگی کارمی‌توان مراحل فوق را به‌ترتیب و با آغاز ازنتیجه و بعد مقدمات و سپس متغیرهای گزاره‌ای درسطری مطابق سطر زیر نوشت:

$A \Rightarrow E$	$\sim D$	$C \Rightarrow (D \vee E)$	$A \Rightarrow (B \vee C)$	A	B	C	D	E
F	T	T	T	T	T	F	F	F

مثال ۲. نادرستی استدلال زیر را اثبات کنید:

$T \equiv U$

$U \equiv (V \wedge W)$

$V \equiv (T \vee X)$

$T \vee X$

$\therefore\ T \wedge X$

چون به T یا X ارزش F دهیم نتیجه دروغ می‌شود، در این صورت دو حالت داریم:

۱) ارزش T دروغ و ارزش X راست است. آنگاه $T \vee X$ راست می‌شود، پس مقدمهٔ ۴ راست است و برای راست شدن مقدمهٔ ۳ باید V راست باشد. چون T دروغ است باید U دروغ باشد تا مقدمهٔ ۱ راست شود و به این ترتیب برای راستی مقدمهٔ ۲ باید مؤلفهٔ دوم آن $(V \wedge W)$ دروغ باشد و چون V راست است ناچار باید W دروغ باشد. به این ترتیب سطر زیر را داریم:

T	U	V	W	X
F	F	T	F	T

۲) ارزش T راست و ارزش X دروغ است. با استدلالی مشابه استدلال فوق سطر زیر را خواهیم داشت:

T	U	V	W	X
T	T	T	T	F

تبصره. در اینجا حالتی که در آن T و X هر دو دروغ باشند به کار نمی‌آید زیرا به ازای این حالت، مقدمهٔ ۴ $(T \vee X)$ دروغ می‌شود.

اکنون به اثبات ناتمام بودن قواعد استنتاج[13]مان می‌پردازیم. نوزده قاعده‌ای که تاکنون معرفی شده‌اند ناتمام[14]اند، به عبارت دیگر استدلال‌های درست تابع ارزشی[15] وجود دارند که درستی‌شان را نمی‌توان با استفاده از این نوزده قانون اثبات کرد. در مورد بحث و تعیین این ناتمامی[16] لازم است که تصور خاصیت ویژه‌ای را که «نسبت به یک مجموعهٔ قوانین استنتاج[17] موروثی» است معرفی کنیم، و برای این منظور تعریف زیر را مطرح می‌کنیم:

خاصیت ویژهٔ $\varnothing$ نسبت به یک مجموعهٔ قوانین استنتاج موروثی است اگر و تنها اگر وقتی که $\varnothing$ به یک یا بیشتر از یک گزاره تعلق داشته باشد به هر گزاره که به کمک آن قوانین استنتاج از آنها استنتاج می‌شود نیز متعلق باشد.

به عنوان مثال، راستی خاصیت ویژه‌ای است که نسبت به قوانین نوزده‌گانهٔ استنتاجی که قبلاً معرفی شدند موروثی است. همان طور که قبلاً نیز خاطرنشان شده، هر نتیجه، درصورتی که بتواند به کمک نوزده قانون استنتاجمان از مقدمات راست استنتاج شود، راست است، و در حقیقت، نباید هیچ یک از قوانین استنتاجی را که راستی نسبت به آنها موروثی‌نیست به کار بریم.

اکنون برای اینکه ثابت کنیم که یک مجموعهٔ قوانین استنتاج ناتمام است باید خاصیت ویژهٔ $\varnothing$ و استدلال درست α را طوری پیدا کنیم که

(۱) $\varnothing$ نسبت به آن مجموعهٔ قوانین استنتاج موروثی باشد، و

(۲) $\varnothing$ به مقدمات α متعلق باشد اما به نتیجهٔ آن تعلق نداشته باشد.

خاصیت ویژهٔ راستی نسبت به هر مجموعه از قوانین استنتاج که ممکن است به آن به طوری جدی علاقه‌مند باشیم موروثی است، و بنابراین در شرط (۱) صدق می‌کند. اما از آنجا که α یک استدلال درست است، از تعریفمان از درستی بلافاصله نتیجه می‌شود که راستی هیچ گاه نمی‌تواند در شرط (۲) صدق کند. درنتیجه برای اثبات ناتمامی قوانین نوزده‌گانه‌مان، باید خاصیت ویژهٔ دیگری غیر از راستی، که نسبت به نوزده قانونمان موروثی باشد، و بتواند به مقدمات استدلال درستی مانند α متعلق باشد اما به نتیجهٔ آن تعلق نداشته باشد بیابیم.

برای به دست آوردن چنین خاصیت ویژه‌ای، نمونهٔ سه عضوی‌ای را، که علامات واقع در قوانین نوزده‌گانه‌مان بتوانند برحسب آن تفسیر شوند، معرفی می‌کنیم. این سه عضو اعداد ۰، ۱ و ۲ اند که نقشهایی مشابه نقشهای ارزشهای راستی راست (T) و دروغ (F) قبلاً معرفی شده ایفا می‌کنند. هر گزاره یکی از این سه عضو نمونه را به خود تخصیص می‌دهد، و گفته می‌شود که یکی از سه مقدار ۰، ۱، یا ۲ را به‌خود می‌گیرد، قبول می‌کند یا دارد. درست چون در موارد قبل که متغیرهای گزاره‌ای p، q، r، ... مجاز بودند که دو ارزش راستی T و F را بگیرند در اینجا نیز مجاز می‌کنیم که متغیرهای گزاره‌ای p، q، r، ... سه ارزش ۰، ۱ و ۲ را بگیرند.

پنج علامت «~»، «∧»، «∨»، «⇒» و «≡» را، که در نوزده قانونمان ظاهر می‌شوند، می‌توان بار دیگر برای (یا برحسب) نمونهٔ سه عضوی‌مان بااستفاده از جداول سه ارزشی زیر تعریف کرد:

p	~p
۰	۲
۱	۱
۲	۰

p	q	p ∧ q	p ∨ q	p ⇒ q	p ≡ q
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱
۰	۲	۲	۰	۲	۲
۱	۰	۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۲	۲	۱	۱	۱
۲	۰	۲	۰	۰	۲
۲	۱	۲	۱	۰	۱
۲	۲	۲	۲	۰	۰

در مورد این تعاریف می‌توان تعاریف تحلیلی (اما معادل) به گونه‌ای دیگری را که در آنها «$\min(x,y)$» نمایشگر حداقل اعداد x و y و «$\max(x,y)$» نمایشگر حداکثر اعداد x و y است، به ترتیب زیر، به دست داد.

$$\sim p = 2 - p$$
$$p \wedge q = \max(p, q)$$
$$p \vee q = \min(p, q)$$
$$p \Rightarrow q = \min(2 - p, q)$$
$$p \equiv q = \max(\min(2 - p, q), \min(2 - q, p))$$

خاصیت ویژهٔ مطلوب $\varnothing$ که نسبت به نوزده قانون استنتاجمان

موروثی است،خاصیت ویژهٔ دارا بودن ارزش صفر است. برای اینکه ثابت کنیم که این خاصیت نسبت به قوانین نوزده‌گانهٔ مورد بحث موروثی است کافی است که نشان دهیم که نسبت به هر یک از آنها موروثی است، این مطلب را می‌توان درمورد هریک از این قوانین به کمک جدولی سه ارزشی نشان داد. به عنوان مثال، این مطلب را که داشتن ارزش ۰ نسبت به قانون انفصال موروثی است، می‌توان با استفاده از بررسی جدول فوق که ارزش «$p \Rightarrow q$» را به‌عنوان تابعی از ارزشهای «p» و «q» تعریف می‌کند ملاحظه کرد. در این جدول مقدمات «p» و «$p \Rightarrow q$» تنها در سطر اول ارزش ۰ دارند، و در این سطر نتیجهٔ «q» نیز ارزش ۰ دارد. بررسی همین جدول نشان می‌دهد که داشتن ارزش ۰ برای تسهیل، ترکیب عطفی، و جمع نیز موروثی است. قرار دادن «$\sim p$» و «$\sim q$» در ستونهای اضافی نشان می‌دهد که داشتن ارزش ۰ نسبت به انفصال نقیض و قیاس فاصل نیز موروثی است. این مطلب که ارزش مورد بحث نسبت به قیاس فرضی نیز موروثی است را می‌توان با استفاده از جدول روبرو نشان داد:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۰	۲	۰	۲	۲
۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۲	۱	۱	۲
۰	۲	۰	۲	۰	۰
۰	۲	۱	۲	۰	۱
۰	۲	۲	۲	۰	۲
۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۲	۰	۲	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۲	۱	۱	۱
۱	۲	۰	۱	۰	۰
۱	۲	۱	۱	۰	۱
۱	۲	۲	۱	۰	۱
۲	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۱	۰	۱	۰
۲	۰	۲	۰	۲	۰
۲	۱	۰	۰	۰	۰
۲	۱	۱	۰	۱	۰
۲	۱	۲	۰	۱	۰
۲	۲	۰	۰	۰	۰
۲	۲	۱	۰	۰	۰
۲	۲	۲	۰	۰	۰

در این جدول تنها سطرهای اول، دهم، نوزدهم، بیست و دوم، بیست و پنجم، بیست و ششم، و بیست و هفتم‌اند که مقدمات «$p \Rightarrow q$» و «$r \Rightarrow q$» در آنها ارزش ۰ دارند، و در هر یک از اینها نتیجهٔ «$p \Rightarrow r$» نیز دارای ارزش ۰ است، گرچه برای نشان دادن اینکه ارزش ۰ داشتن نسبت به برهان قاطع ذوحدین بانی و برهان قاطع دو حدین مخرب نیز موروثی است به جدولهایی بزرگتر از این جدول نیاز است، اما این جداول به سادگی رسم می‌شوند. (هر چند که ابداً به رسم آنها نیاز نیست، چه تعاریف تحلیلی سابق‌الذکر می‌توانند برای نشان دادن اینکه ارزش ۰ نسبت به برهانهای ذوحدین، آن چنان که بعداً نشان می‌دهیم، موروثی است، به کار روند.)

هنگامی که جداول سه ارزشی را، برای اثبات اینکه داشتن ارزش ۰ نسبت به این عمل که به جای گزاره‌ها معادلهای منطقی‌شان را قرار دهیم موروثی است، رسم می‌کنیم، به این موضوع نیز توجه می‌کنیم که هر چند که لازم نیست که خود دو شرطیها ارزش ۰ داشته باشند، عباراتی که در طرفین علامت تعادل واقع شده‌اند لزوماً دارای یک ارزشند. به عنوان مثال،در جدول مربوط به قانون اول دومورگان، (صفحه‌بعد) عبارات معادل «$\sim(p \wedge q)$» و «$\sim p \vee \sim q$» در هر سطر دارای یک ارزشند حتی اگر گزارهٔ تعادلشان از داشتن ارزش ۰ در سطرهای دو، چهار، و پنج خودداری کند. اما باید واضح باشد که داشتن ارزش ۰ نسبت به قرار دادن هر گزارهٔ معادل به جای هر گزاره یا قسمتی از آن، موروثی است. می‌توان دراثبات دیگری از این موضوع که داشتن ارزش

۰ نسبت به این نوزده قانون موروثی است از تعاریف تحلیلی علایم منطقی‌مان استفاده به‌عمل آورد، و به‌عنوان مثال، این مطلب را که داشتن ارزش ۰ نسبت به برهان قاطع ذوحدین بانی موروثی است، می‌توان توسط استدلال زیر نشان داد. بنا به فرض، «$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$» و «$p \vee r$» هر دو دارای ارزش ۰ اند. درنتیجه، هم «$p \Rightarrow q$» هم «$r \Rightarrow s$» ارزش ۰ دارند، بنابراین یا p = ۲ یا q = ۰ و، یا r = ۲ یا s = ۰ است. از آنجاکه «$p \vee r$» دارای ارزش ۰ است، یا p = ۰ یا r = ۰ می‌باشد. اگر p = ۰، دراین صورت $p \neq$ ۲ و از آن q = ۰، و اگر r = ۰ در این صورت $r \neq$ ۲ و از آن s = ۰، بنابراین یا q = ۰ یا s = ۰، که از آن همان‌طور که می‌خواستیم نشان دهیم «$q \vee s$» ارزش ۰ دارد.

p	q	~p	~q	p∧q	~(p∧q)	~p∨~q	~(p∧q)≡(~p∨~q)
۰	۰	۲	۲	۰	۲	۲	۰
۰	۱	۲	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۲	۲	۱	۲	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۲	۱	۱	۲	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۲	۲	۰	۰	۰
۲	۱	۰	۰	۲	۰	۰	۰
۲	۲	۰	۱	۲	۰	۰	۰

اکنون که نشان دادیم که خاصیت ویژهٔ داشتن ارزش ۰ نسبت به قوانین نوزده‌گانه‌مان موروثی است، برای اثبات ناتمامی این قوانین تنها به این نیاز است که استدلال درستی را ارائه دهیم که مقدماتش ارزش ۰ دارند و نتیجه اش‌ارزش ۰ ندارد. چنین استدلالی

$$A \Rightarrow B$$
$$\therefore A \Rightarrow (A \wedge B)$$

است که درستی‌اش به سادگی با استفاده از جدول ارزش مشخص می‌شود. در این استدلال، درحالتی که «A» ارزش ۱ و «B» ارزش ۰ دارد، مقدمهٔ «$A \Rightarrow B$» دارای ارزش ۰ است، درحالی‌که نتیجهٔ «$A \Rightarrow (A \wedge B)$» ارزش ۱ دارد. به این ترتیب نوزده قانونی که تاکنون معرفی شده‌اند ناتمامند.

+ + +

مراجع:

Irving M.Copi , Symbolic Logic

یادداشتها

۱. از کتاب گلشن راز جدید که اقبال لاهوری آن را در مقابل گلشن راز شیخ محمود شبستری سروده است. در این بیت مقصود از رازی «امام فخر رازی» و منظور از طوسی «خواجه نصیر طوسی» است.

2 - Proving Invalidity
3 - Truth Values
4 - Premisses
5 - Argument
6 - Conclusion
7 - Truth Table
8 - Statement Variable
9 - Antecedent
10 - Consequent
11 - Disjunction
12 - Component

۱۳. به مقالهٔ قواعد استنتاج مجلهٔ برهان شمارهٔ ۳ سال اول رجوع شود.

14 - Incomplete

۱۵. Truth Functionally Valid Arguments، استدلالاتی که مقدمات و نتیجه‌شان از گزاره‌های ساده یا مرکب تابع ارزش تشکیل شده باشند، و گزاره‌های مرکب تابع ارزش گزاره‌های مرکبی هستند که ارزش‌شان از ارزشهای مؤلفه‌هاشان تبعیت می‌کند، به‌عنوان مثال $p \wedge q$ یک گزارهٔ مرکب تابع ارزش است، زیرا ارزشش به ارزشهای مؤلفه‌های آن یعنی p و q وابسته است، و از آنها پیروی می‌کند.

۱۶. ایـن اثبـات از Professor Leo Simons از دانشگـاه سین‌سیناتی است.

17- Set of Rules of Inference